

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

OTTO H. KEGEL

**Eine Charakterisierung der Sylowgruppen  
endlicher Gruppen**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 36, n° 1 (1966), p. 122-128

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1966\\_\\_36\\_1\\_122\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1966__36_1_122_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

## EINE CHARAKTERISIERUNG DER SYLOWGRUPPEN ENDLICHER GRUPPEN

di OTTO H. KEGEL (*Frankfurt a. M.*) \*)

Ist  $\mathcal{K}$  eine Klasse endlicher Gruppen, die mit der Gruppe  $G$  auch jedes epimorphe Bild einer jeden Untergruppe von  $G$  enthält und ist  $f$  eine Funktion, die jeder Gruppe  $G \in \mathcal{K}$  eine Menge  $f(G)$  « interessanter » Untergruppen (von  $G$ ) zuordnet, so wird man versuchen, die Menge  $f(G)$  der « interessanten » Untergruppen von  $G$  möglichst durch formale Vererbungseigenschaften der Funktion  $f$  zu charakterisieren. Es werden hier solche formalen Eigenschaften von  $f$  angeben, die auf der Klasse  $\mathcal{A}$  der endlichen auflösbaren Gruppen genau die Menge der  $\pi$ -Hallgruppen von  $G \in \mathcal{A}$  für eine feste (aber nicht spezifizierte) Primzahlmenge  $\pi$  charakterisieren; auf der Klasse  $\mathcal{E}$  aller endlichen Gruppen gilt für eine solche Funktion entweder  $f(G)$  enthält als einziges Element stets die Einheitsuntergruppe von  $G$ , oder  $f(G)$  enthält als einziges Element stets die Gruppe  $G$  selbst, oder aber die Menge  $f(G)$  ist genau die Menge der  $p$ -SyLOWgruppen von  $G$  für eine feste (aber nicht spezifizierte) Primzahl  $p$ . — Als Anwendung der formalen Eigenschaften solcher « SyLOWfunktionen » erhält man eine Charakterisierung der Klasse  $\mathcal{A}$  aller endlichen auflösbaren Gruppen. Eine weitere Charakterisierung

---

\*) Indirizzo dell'A.: Mathematisches Seminar der Universität Frankfurt (Main) — 6 Frankfurt — Robert Mayer Strasse 6-8 (Germania)

dieser Klasse beschreibt sie als die umfassendste Klasse endlicher Gruppen derart, daß mit  $G$  auch jedes epimorphe Bild einer jeden Untergruppe in ihr liegt, und  $G$  für jedes Paar  $(p, q)$  von Primzahlen eine  $(p, q)$ -Hallgruppe besitzt.

Ist  $\mathcal{K}$  eine Klasse endlicher Gruppen, die mit  $G$  auch jedes epimorphe Bild einer jeden Untergruppe von  $G$  enthält, so heiße die Funktion  $f$ , die jeder Gruppe  $G \in \mathcal{K}$  die Menge  $f(G)$  von Untergruppen von  $G$  zuordnet, eine *Sylowfunktion* auf  $\mathcal{K}$ , wenn sie die folgenden formalen Eigenschaften hat:

- 1) Für  $G \in \mathcal{K}$  ist  $f(G)$  eine Klasse konjugierter Untergruppen von  $G$ .
- 2) Für jeden Epimorphismus  $\sigma$  der Gruppe  $G \in \mathcal{K}$  gilt  $f(G^\sigma) = (f(G))^\sigma$ .
- 3) Zu jeder Untergruppe  $S \in f(U)$  mit  $U \subseteq G \in \mathcal{K}$  gibt es eine Untergruppe  $T \in f(G)$  mit  $S = T \cap U$ .
- 4) Gibt es für das Paar  $U \subseteq G \in \mathcal{K}$  ein  $T \in f(G)$  mit  $T \cap U \neq 1$ , so gibt es ein  $S \in f(U)$  mit  $S \neq 1$ .

Der Name Sylowfunktion stammt von folgendem Beispiel: Ist  $p$  eine Primzahl, so sei durch  $p$  auch die Funktion bezeichnet, die jeder endlichen Gruppe  $G$  die Menge  $p(G)$  ihrer  $p$ -Sylowgruppen zuordnet. Daß die Funktion  $p$  die Eigenschaften 1)-4) hat, also eine Sylowfunktion auf der Klasse  $\mathfrak{E}$  aller endlichen Gruppen ist, ist klar.

Ist  $\pi$  eine Menge von Primzahlen, so heißt die Untergruppe  $H$  der endlichen Gruppe  $G$  eine  $\pi$ -Hallgruppe von  $G$ , wenn jeder Primteiler der Ordnung von  $H$  in  $\pi$  liegt, aber kein Primteiler des Index  $[G : H]$ .

Für Sylowfunktionen gilt der

**SATZ 1:** *Ist  $\mathcal{K}$  eine Klasse endlicher Gruppen, die mit der Gruppe  $G$  auch jedes epimorphe Bild einer jeden Untergruppe von  $G$  enthält, und ist  $f$  eine Sylowfunktion auf  $\mathcal{K}$ , so gibt es eine Primzahlmenge  $\pi = \pi_f$ , so, daß  $f(G)$  für jedes  $G \in \mathcal{K}$  die Menge aller  $\pi$ -Hallgruppen von  $G$  ist. Jede  $\pi$ -Untergruppe von  $G$  ist in einer Untergruppe aus  $f(G)$  enthalten.*

**Beweis:** Zunächst werde gezeigt:

$f(G)$  ist eine Klasse konjugierter Hallgruppen von  $G$ .

Angenommen, dies ist falsch; dann gibt es unter den Gegenbeispielen zu dieser Aussage eine Gruppe  $G$  von kleinster Ordnung. Da  $T \in f(G)$  keine Hallgruppe von  $G$  ist, so gibt es einen gemeinsamen Primteiler  $p$  von der Ordnung von  $T$  und dem Index  $[G : T]$ . Sei  $P$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $G$  mit  $P \cap T \neq 1$ . Wegen Eigenschaft 4) besteht  $f(P)$  aus Untergruppen  $\neq 1$  von  $P$ . Ist nun  $P \neq G$ , so folgt aus der Minimalität von  $G$  die Aussage  $P \in f(P)$ ; und aus der Eigenschaft 3) erhält man die Existenz einer zu  $T$  konjugierten Untergruppe  $T_1 \in f(G)$ , die  $P$  enthält und daher zu  $p$  teilerfremden Index in  $G$  hat. Dies widerspricht der Wahl von  $P$ . — Daher gilt  $P = G$ .

Ist  $G$  elementar abelsch, so gibt es eine zu  $T$  komplementäre Untergruppe  $S \neq 1$  von  $G$ . Wegen Bedingung 2) gilt  $1 \in f(S)$ . Andererseits gibt es einen Automorphismus  $\sigma$  von  $G$  derart, daß  $T^\sigma \cap S \neq 1$ ; und die Eigenschaft 4) liefert einen Widerspruch. — Daher ist  $G$  nicht elementar abelsch.

Ist nun  $M$  eine maximale Untergruppe der  $p$ -Gruppe  $G$ , so gilt — wegen der Minimalität von  $G$  — entweder  $1 \in f(M)$  oder  $M \in f(M)$ . Gilt nun  $1 \in f(M)$ , so ist  $T \cap M = 1$  wegen Eigenschaft 4); also hat  $T$  die Ordnung  $p$ . Da  $G$  nicht elementar abelsch ist, so ist  $M \neq 1$ ; und es gibt eine Untergruppe  $U$  der Ordnung  $p$  in  $M$ . Nach Bedingung 2) gilt für die zu  $T$  isomorphe Gruppe  $U \in f(U)$ ; Bedingung 3) zeigt nun  $1 \in f(M)$ , was der Annahme über  $f(M)$  widerspricht. — Also gilt  $M \in f(M)$ . Nach Bedingung 2) ist dann  $1 \in f(G/M)$ . Es gibt dann aber einen Isomorphismus von  $G/M$  auf eine Untergruppe  $U$  der Ordnung  $p$  von  $M$ . Da nach Bedingung 4) gilt:  $U \in f(U)$ , so folgt aus der Eigenschaft 2):  $G/M \in f(G/M)$ ; ein Widerspruch! — Damit ist die Annahme,  $T \in f(G)$  sei keine Hallgruppe von  $G$  zum Widerspruch geführt; es kann kein solches Gegenbeispiel geben.

Sind nun  $X$  und  $Y$  Gruppen aus der Klasse  $\mathfrak{K}$  und ist die Primzahl  $p$  ein Teiler der Ordnung von  $S \in f(X)$  und der Ordnung von  $Y$ , dann gibt es nach Bedingung 4) eine Untergruppe  $U$  der Ordnung  $p$  in  $S$ , so daß  $U \in f(U)$  gilt. Wegen der Eigenschaft 2) gilt dann aber für jede Untergruppe  $V$  der Ordnung  $p$  von  $Y$  ebenfalls  $V \in f(V)$ . Nach Bedingung 3) teilt nun aber  $p$  auch die Ordnung von  $T \in f(Y)$ .

Für jedes  $G \in \mathcal{K}$  sei  $\pi_G$  die Menge der Primteiler der Ordnung von  $G$ ; dann ist die gesuchte Primzahlmenge genau

$$\pi = \pi_f = \bigcup_{G \in \mathcal{K}} \pi_{f(G)}.$$

Für die letzte Aussage des Satzes sei  $V$  eine  $\pi$ -Untergruppe von  $G \in \mathcal{K}$  und sei  $H \in f(G)$  eine  $\pi$ -Hallgruppe von  $G$ . Da  $f(V)$  aus  $\pi$ -Hallgruppen von  $V$  besteht, gilt  $V \in f(V)$ . Wegen der Eigenschaft 3) der Sylowfunktionen gibt es also eine zu  $H$  konjugierte Untergruppe  $H_1 \in f(G)$  mit  $V \subseteq H_1$ .

ZUSATZ: Die Sylowfunktion  $f$  ordnet jeder Gruppe  $G$  der Klasse  $\mathcal{K}$  genau dann auflösbare  $\pi$ -Hallgruppen zu, wenn es zu jeder Teilmenge  $\pi'$  der Primzahlmenge  $\pi$  eine Sylowfunktion  $g$  auf  $\mathcal{K}$  gibt mit  $\pi' = \pi_g$ .

Beweis: Gibt es zu jeder Teilmenge  $\pi'$  von  $\pi$  eine Sylowfunktion  $g$  auf  $\mathcal{K}$  mit  $\pi' = \pi_g$ , und ist  $S \in f(G)$  mit  $G \in \mathcal{K}$ , so besitzt die endliche Gruppe  $S$  zu jedem Primteiler  $p$  ihrer Ordnung ein  $p$ -Komplement. Nach einem Satz von P. Hall [2] ist  $S$  dann aber auflösbar. — Ist andererseits  $S \in f(G)$  für jedes  $G \in \mathcal{K}$   $G \in \mathcal{K}$  unflösbar, und sei  $\pi' \subseteq \pi$ , so sei  $g$  die Funktion, die jedem  $G \in \mathcal{K}$  die Menge  $g(G)$  der  $\pi'$ -Hallgruppen von  $G$  zuordnet. Dann liegt für  $G \in \mathcal{K}$  jede  $\pi'$ -Untergruppe von  $G$  in einer auflösbaren  $\pi$ -Hallgruppe, und daher auch in einer  $\pi'$ -Hallgruppe von  $G$ . Nun verifiziert man direkt die Eigenschaften 1)-4):  $g$  ist also eine Sylowfunktion auf  $\mathcal{K}$ .

BEMERKUNG: In diesem Zusammenhang sei auch auf den Satz von Gol'berg hingewiesen, der im wesentlichen besagt, daß auf der Klasse  $\mathcal{K}$  der  $\pi$ -separablen endlichen Gruppen, die Funktion  $f$ , die jedem  $G \in \mathcal{K}$  die Menge  $f(G)$  der (auflösbaren!)  $\pi$ -Hallgruppen von  $G$  zuordnet, eine Sylowfunktion auf  $\mathcal{K}$  ist. (Vgl. etwa Kurosh [4], S. 196).

Schränkt man die Klasse  $\mathcal{K}$  nicht irgendwie ein, so gilt

SATZ 2: Ist  $f$  eine Sylowfunktion auf der Klasse  $\mathcal{K}$  aller endlichen Gruppen, so ist die  $f$  nach Satz 1 zugeordnete Primzahlmenge  $\pi$ , entweder leer oder einelementig, oder aber die Menge aller Primzahlen.

Dies ist die im Titel erwähnte Charakterisierung der Sylowgruppen.

Beweis: Gibt es in  $\pi_r$  mindestens zwei Primzahlen, so ist zu zeigen, daß  $\pi_r$  alle Primzahlen enthält.

Sind die Primzahlen 2 und 3 beide in  $\pi_r$  enthalten und enthält  $\pi_r$  nicht alle Primzahlen, so sei  $p$  die kleinste nicht in  $\pi_r$  enthaltene Primzahl. In der symmetrischen Gruppe  $S_{p+1}$  des Grades  $p+1$  kann es keine  $\pi_r$ -Hallgruppe geben; denn diese hätte den Index  $p$  in  $S_{p+1}$ , also hätte  $S_{p+1}$  eine Permutationsdarstellung vom Grade  $p$ , was wegen  $p > 3$  nicht geht. — Enthält also die Primzahlmenge  $\pi_r$  nicht alle Primzahlen, so enthält  $\pi_r$  sicher nicht beide Zahlen 2 und 3. Sind nun in dieser Situation  $p$  und  $q$  ( $p < q$ ) die beiden kleinsten Primzahlen, die in  $\pi_r$  vorkommen, dann gilt  $5 \leq q$ . Nach P. Hall ([3], Theorem A 4) gibt es in der symmetrischen Gruppe  $S_q$  des Grades  $q$  keine  $(p, q)$ -Hallgruppe. — Dies widerspricht Satz 1. — Daher stimmt  $\pi_r$  mit der Menge aller Primzahlen überein, wenn  $\pi_r$  mindestens zwei Primzahlen enthält.

Die Sylowfunktion  $f$  auf der Klasse  $\mathcal{K}$  endlicher Gruppen heißt *maximal bei  $G$  auf  $\mathcal{K}$* , falls  $G \notin f(G)$  und falls für jede Sylowfunktion  $s$  auf  $\mathcal{K}$  mit  $G \notin s(G)$  aus  $P \in f(G)$ ,  $Q \in s(G)$  und  $P \subseteq Q$  folgt  $P = Q$ ; sie heißt *nicht-trivial bei  $G$  auf  $\mathcal{K}$* , falls  $G \notin f(G)$ , aber die Ordnung von  $P \in f(G)$  mindestens zwei verschiedene Primteiler hat.

Durch  $\mathcal{K}(G)$  sei die Klasse aller epimorphen Bilder von Untergruppen der Gruppe  $G$  bezeichnet.  $\nu(G)$  bezeichne die Anzahl der verschiedenen Primteiler der Ordnung von  $G$ .

Mit diesen Bezeichnungen gilt

SATZ 3: *Für die endliche Gruppe  $G$  sind folgende Aussagen äquivalent:*

- a)  *$G$  ist auflösbar.*
- b) *Für jedes Paar von Primzahlen  $(p, q)$  besitzt jede Untergruppe  $U$  von  $G$  eine  $(p, q)$ -Hallgruppe.*
- c) *Für jede Gruppe  $H \in \mathcal{K}(G)$  mit  $\nu(H) \geq 4$  (bzw.  $\nu(H) = 3$ ) gibt es mindestens 4 (bzw. genau 3) Sylowfunktionen auf  $\mathcal{K}(G)$ , die bei  $H$  verschieden, nicht-trivial und maximal sind.*

Beweis: Nach den Hallschen Sätzen sind b) und c) Folgen von a). Angenommen, die Bedingung b) bzw. c) impliziert nicht

die Auflösbarkeit von  $G$ , so gibt es eine endliche Gruppe  $G$  von kleinster Ordnung, die nicht auflösbar ist, aber die Bedingung  $b$ ) bzw.  $c$ ) erfüllt. Da sich die Bedingungen  $b$ ) und  $c$ ) offenbar auf Untergruppen und auf epimorphe Bilder vererben, so ist jede echte Untergruppe und jedes echte epimorphe Bild von  $G$  auflösbar. Also ist  $G$  eine minimal-einfache Gruppe.

Ist  $\nu(G) = 3$ , so folgt aus der Bedingung  $b$ ) bzw. aus der Existenz von drei verschiedenen, nicht-trivialen, maximalen Sylowfunktionen bei  $G$  die Existenz eines  $p$ -Komplements für jeden Primteiler  $p$  der Ordnung von  $G$ ; und nach einem Satz von P. Hall [2] ist  $G$  auflösbar. Dies widerspricht unserer Annahme über  $G$ . Daher gilt  $\nu(G) \geq 4$ .

Nach einem von J. G. Thompson angekündigten Satz [6] ist die Struktur der minimal-einfachen Gruppen bekannt: Gilt für eine solche Gruppe  $G$  die Ungleichung  $\nu(G) \geq 4$ , so ist  $G$  zu einer Gruppe vom Typ  $PSL(2, q)$  oder zu einer Gruppe  $S(q)$  von Suzukischen Typ isomorph.

Daß die Gruppen der Form  $PSL(2, q)$  die Bedingungen 2) und 3) nicht erfüllen, ergibt sich aus der wohlbekannteren Übersicht über die Untergruppen von  $PSL(2, r^n)$  (vgl. Dickson [1], chapter XII): Sei  $p$  ein Primteiler von  $r^n + 1$ , so gibt es in  $PSL(2, r^n)$  für  $r^n \geq 4$  keine  $(p, r)$ -Hallgruppen. Ebenso einfach verifiziert man, daß es in  $PSL(2, r^n)$  höchstens drei verschiedene, nicht-triviale, maximale Sylowfunktionen gibt.

Die Ordnungen der einfachen Gruppen  $S(q)$  mit  $q = 2^{2n+1}$  von Suzuki haben die Form  $q^2(q^2 + 1)(q - 1)$ . Ist  $p$  ein Primteiler von  $q^2 + 1$ , dann entnimmt man der Liste der Untergruppen von  $S(q)$  (vgl. [5], § 15), daß es in  $S(q)$  keine  $(2, p)$ -Hallgruppen gibt. Ebenso stellt man fest, daß es bei  $S(q)$  genau drei verschiedene maximale Sylowfunktionen gibt.

Diese Aussagen widersprechen aber unserer Annahme, die Gruppe  $G$  mit  $\nu(G) \geq 4$  sei nicht auflösbar; also muß diese falsch sein. Damit ist der Satz bewiesen.

## LITERATUR

- [1] L. E. DICKSON: *Linear groups*. Leipzig 1901.
- [2] P. HALL: *A characteristic property of soluble groups*. J. London Math. Soc. XII (1937) 198-200.
- [3] P. HALL: *On theorems like Sylow's*. Proc. London Math. Soc. (III) 4 (1956) 268-304.
- [4] A. G. KUROSH: *The theory of groups*, English ed. New York 1956 vol. II.
- [5] M. SUZUKI: *On a class of doubly transitive groups*. Annals of Math. 75 (1962) 105-145.
- [6] J. G. THOMPSON: *Some simple groups*. Symposium on Group Theory. Harvard 1963, 21-22.

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 giugno 1965.