Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

C. Baiocchi

Regolarità e unicità della soluzione di una equazione differenziale astratta

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 35, nº 2 (1965), p. 380-417

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_2_380_0>

REGOLARITÀ E UNICITÀ DELLA SOLUZIONE DI UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE ASTRATTA

Nota *) *di* C. BAIOCCHI (*a Pavia*) **)

Introduzione

È ben noto (cfr. ad es. [4], [5]) che lo studio della equazione differenziale lineare astratta del tipo:

(1) $\quad A(t)u(t) + u'(t) = f(t) \quad$ per $\quad t \in]T_0, T_1[; \quad u(T_0) = u_0$

(cfr. più avanti per le notazioni impiegate) si presta molto bene alla trattazione dei problemi ai limiti per una vasta classe di equazioni lineari.

Si consideri ad esempio il seguente classico problema di trasmissione del calore. Sia Ω un aperto limitato sufficientemente regolare dello spazio euclideo a n dimensioni $\mathcal{R}^n$; sia Γ la frontiera di Ω, ν la normale interna a Ω. Sia Q il cilindro $\Omega \times]T_0, T_1[$, $\Sigma = \Gamma \times]T_0, T_1[$ il suo « mantello ». Sia $\Gamma_1(t)$ una parte di Γ variabile con « sufficiente regolarità » al variare di t in $]T_0, T_1[$ (cfr. N. 7 per le ipotesi precise); sia $\Sigma_1 = \{\Gamma(t) \times t\}_{t \in]T_0, T_1[}$; $\Sigma_2 = \Sigma - \Sigma_1$. Si indichi con Δ_x il laplaciano rispetto alle variabili $x \equiv (x, x_2, ..., x_n)$ in Ω.

Assegnati $f(x, t)$, $u_0(x)$ in spazi opportuni si cerca $u(x, t)$ che

*) Pervenuta in redazione il 20 aprile 1965.
Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Pavia.

**) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 12 del Comitato per la Matematica del C.N.R.

verifichi:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &-\Delta_x u(x,\ t)+\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,\ t) \quad \text{in} \quad Q\\ &u(x,\ T_0)=u_0(x)\\ &u(x,\ t)\Big|_{\Sigma_1}=0; \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Sigma_2}=0 \end{aligned}$$

Il problema (2) rientra tra i problemi formulabili astrattamente per mezzo della (1).

In questa nota studio alcune proprietà delle soluzioni della (1) seguendo l'impostazione variazionale di Lions [4], [5]; in particolare otterrò teoremi di regolarità e unicità.

In un secondo lavoro (cfr. [1])applicherò i risultati ottenuti al problema del tipo (2) ottenendo teoremi di esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati in classi hilbertiane molto generali (cfr. N. 7 per risultati più precisi).

Nel secondo lavoro otterrò anche per i problemi misti del tipo Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann (corrispondenti rispettivamente a $\Gamma(t)=\Gamma$ e $\Gamma(t)=\varnothing$) teoremi di unicità e teoremi di regolarità sul cilindro infinito più « forti » di quelli ottenibili in forma astratta.

Alcuni risultati di questo lavoro sono stati esposti in una comunicazione fatta al « Convegno sulle equazioni alle derivate parziali » - Nervi (25/27-II-1965).

Colgo l'occasione per ringraziare il prof. J. L. Lions per le utili discussioni sull'argomento.

1. Ipotesi e notazioni. Posizione del problema.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert; $(h_1,\ h_2)_{\mathcal{H}}$ denoterà il prodotto scalare in $\mathcal{H}$ e $|\,h\,|_{\mathcal{H}}$ denoterà la norma in $\mathcal{H}$; $\mathcal{H}'$ denoterà lo antiduale forte di $\mathcal{H}$ e $<h',\ h>_{\mathcal{H}',\mathcal{H}}$ denoterà la antidualità tra un elemento $h'\in\mathcal{H}'$ ed un elemento $h\in\mathcal{H}$.

Siano dati due spazi di Hilbert, K ed H, tali che:

(1.1) $K \subset H$ [2]) ; *K denso in H* ; *K separabile* .

(si osservi che la (1.1) implica anche la separabilità di H).

Sia assegnata una famiglia $\{V(t)\}_{t \in]T_0, T_1[}$ di spazi di Hilbert che dipende dal parametro t variabile in $]T_0, T_1[$ con $-\infty \leqslant T_0 < T_1 \leqslant +\infty$ [3]); e si abbia:

(1.2) *per ogni $t \in]T_0, T_1[$ $V(t)$ è sottospazio vettoriale chiuso di K denso in H* .

Si supponga inoltre che la famiglia $\{V(t)\}$ « *dipende misurabilmente da t in K* » nel senso che, indicando con $P_{V(t)}: K \to K$ la proiezione ortogonale di K sul suo sottospazio chiuso $V(t)$, si abbia:

(1.3) *per ogni $k \in K$ la funzione $t \to P_{V(t)}k$ definita in $]T_0, T_1[$ ed a valori in K è misurabile* [4]) .

Si consideri lo spazio $L^2(T_0, T_1; V(t))$ definito da: $L^2(T_0, T_1; V(t)) = \{v(t) \in L^2(T_0, T_1; K)$; $v(t) \in V(t)$ *per quasi ogni* $t \in]T_0, T_1[\}$ [5]). $L^2(T_0, T_1; V(t))$ si considera spazio di Hilbert rispetto alla norma indotta da $L^2(T_0, T_1; K)$ (di cui è ovviamente sottospazio chiuso).

Sia $\varphi \in L^2(T_0, T_1; V(t))$. È allora $\varphi \in \mathfrak{D}'(T_0, T_1; K)$ (cfr. [7]) e quindi $\varphi' \in \mathfrak{D}'(T_0, T_1; K) \subset \mathfrak{D}'(T_0, T_1; H)$; ha perciò senso imporre che sia $\varphi' \in L^2(T_0, T_1; H)$ e allora (cfr. [5]) una tale φ

---

[2]) Algebricamente e topologicamente.

[3]) In [5] è sempre supposto che T_0 e T_1 siano finiti ma molti risultati valgono, con la stessa dimostrazione, anche per $T_0 = -\infty$ e $T_1 = +\infty$. In seguito non richiamerò più ciò, salvo quando supporre T_0 o T_1 non finiti apporti sostanziali modifiche.

[4]) Per la definizione di misurabilità di funzioni a valori vettoriali cfr. ad es. [2]; si osservi che per l'ipotesi di separabilità di K la misurabilità « forte » e la misurabilità « debole » coincidono (cfr. sempre [2]).

[5]) Per la definizione di $L^2(T_0, T_1; K)$ cfr. ad es. [2]. Si osservi che, grazie alla (1.3), lo spazio $L^2(T_0, T_1; V(t))$ ha senso (cioè esistono funzioni misurabili non identicamente nulle in $L^2(T_0, T_1; V(t))$).

coincide quasi ovunque con una funzione continua di t a valori in H [6]). Porrò:

$$\Phi(T_0, T_1; V(t)) = \{\Phi \in L^2(T_0, T_1; V(t)) ;$$
$$\Phi' \in L^2(T_0, T_1; H) ; \quad \Phi(T_1) = 0\} .$$

Sia assegnata, per ogni $t \in [T_0, T_1]$, *una forma* $a(t, u, v)$ *sesquilineare continua su* $K \times K$, tale che:

(1.4) *Per ogni coppia* u, v *di elementi di* K *la funzione* $t \to a(t, u, v)$ *è misurabile* .

(1.5) *Esiste una costante* M *tale che, per ogni coppia* u, v *di elementi di* K *e per ogni* $t \in [T_0, T_1]$ *si abbia* $| a(t, u, v) | \leqslant M \cdot | u |_K \, | v |$.

Si osservi (cfr. [5]) che la (1.4) implica la misurabilità (e la (1.5) la sommabilità) della funzione $t \to a(t, u(t), v(t))$ per ogni coppia $u(t)$, $v(t)$ di elementi di $L^2(T_0, T_1; V(t))$; ciò darà un senso alla successiva (1.6).

Si fissi $u_0 \in H$ arbitrario (se $T_0 = -\infty$ si deve prendere $u_0 = 0_H$) e $f \in L^2(T_0, T_1; V(t))'$. Si pongono i seguenti problemi:

PROBLEMA 1.1. - *Trovare* $u \in L^2(T_0, T_1; V(t))$ *tale che, per ogni* $\varphi \in \Phi(T_0, T_1; V(t))$:

$$\int_{T_0}^{T_1} [a(t, u(t), \varphi(t)) - (u(t), \varphi'(t))_H] dt = (u_0, \varphi(T_0))_H + \tag{1.6}$$
$$+ \langle f, \varphi \rangle_{L^2(T_0,T_1;V(t))', L^2(T_0,T_1;V(t))} .$$

PROBLEMA 1.2. - *Regolarità delle (eventuali) soluzioni del problema* 1.1.

PROBLEMA 1.3. - *Unicità della soluzione del problema* 1.1.

---

[6]) Ed a tale funzione si pensa identificata quando si considera il valore che φ assume nel punto $t \in [T_0, T_1]$.

Si dimostra (cfr. [5] e [4] dove si può trovare anche un'ampia bibliografia relativa a tali problemi) che una condizione sufficiente per la risolubilità del problema 1.1 è la seguente:

(1.7) *Esiste una costante* $a > 0$ *tale che, per ogni* $v \in V(t)$ *e per ogni* $t \in]T_0, T_1[$ *si abbia* $\operatorname{Re} a(t, v, v) \geqslant a \mid v \mid_K^2$ (a *indipendente da* t, v) .

2. Riduzione al caso $T_0 = -\infty, T_1 = +\infty$.

2.1. – Comincio a studiare lo spazio $L^2(T_0, T_1; V(t))'$. Essendo per la (1.2), $V(t)$ chiuso in K, esisterà, per ogni $t \in]T_0, T_1[$, un sottospazio chiuso $W(t)$ di K univocamente determinato tale che $K = V(t) \oplus W(t)$ $\forall\, t \in [T_0, T_1]$; inoltre sarà anche $K' \equiv V'(t) \oplus W'(t)$ e nella dualità tra K' e K $V'(t)$ sarà il polare di $W(t)$ e $W'(t)$ il polare di $V(t)$. Si osservi che $V'(t)$ *dipende misurabilmente da* t *in* K' (in senso analogo alla (1.3)); infatti per ogni $k' \in K'$, $k \in K$ si ha, con ovvie notazioni:

$$\langle P_{V'(t)} k', k \rangle_{K',K} = \langle P_{V'(t)} k', P_{V(t)} k \rangle_{K',K} = \langle k', P_{V(t)} k \rangle_{K',K}$$

e l'ultimo membro è funzione misurabile di t per la (1.3); quindi (cfr. [4])) è misurabile la funzione $t \to P_{V'(t)} k'$ per ogni $k' \in K'$. Essendo poi $P_{W(t)} k = k - P_{V(t)} k$; $P_{W'(t)} k' = k' - P_{V'(t)} k'$ anche gli spazi $W(t)$ e $W'(t)$ dipendono misurabilmente da t rispettivamente in K ed in K'. Ha senso allora considerare gli spazi $L^2(T_0, T_1; V'(t))$; $L^2(T_0, T_1; W(t))$; $L^2(T_0, T_1; W'(t))$ (cfr. nota [4])) rispettivamente come sottospazi chiusi di $L^2(T_0, T_1; K')$, $L^2(T_0, T_1; K)$, $L^2(T_0, T_1; K')$.

TEOREMA 2.1. – *Valgono le seguenti relazioni*:

$$L^2(T_0, T_1; K) \equiv L^2(T_0, T_1; V(t)) \oplus L^2(T_0, T_1; W(t)) \tag{2.1}$$

$$L^2(T_0, T_1; K') \equiv L^2(T_0, T_1; V'(t)) \oplus L^2(T_0, T_1; W'(t)) \tag{2.2}$$

$$L^2(T_0, T_1; V(t))' \equiv L^2(T_0, T_1; V'(t)) \tag{2.3}$$

Dim. – Sia $k(t) \in L^2(T_0, T_1; K)$; pongo:

$$k_1(t) = P_{V(t)}k(t) ; \qquad k_2(t) = P_{W(t)}k(t) .$$

Si ha che $k_1(t)$ è misurabile; infatti per ogni $k' \in K'$ è:

$$\langle k', k_1(t) \rangle_{K',K} = \langle k', P_{V(t)}k(t) \rangle_{K',K} = \langle P_{V'(t)}k', k(t) \rangle_{K',K}$$

e l'ultima funzione è misurabile in quanto prodotto scalare di due funzioni misurabili (per la (1.3)); ne segue (cfr. [4])) la misurabilità di $k_1(t)$ e quindi quella di $k_2(t)$ essendo ovviamente $k_2(t) = k(t) - k_1(t)$; allora è $k_1(t) \in L^2(T_0, T_1; V(t))$ e $k_2(t) \in L^2(T_0, T_1; W(t))$. Per dimostrare la (2.1) basta dunque dimostrare che se $v(t) \in L^2(T_0, T_1; V(t))$ e $w(t) \in L^2(T_0, T_1; W(t))$ è:

$$(v(t), w(t))_{L^2(T_0,T_1;K)} = 0$$

e infatti per l'ortogonalità di $V(t)$ e $W(t)$ si ha:

$$(v, w)_{L^2(T_0,T_1;K)} = \int_{T_0}^{T_1} (v(t), w(t))_K dt = 0 .$$

Ne segue la (2.1) e (sostituendo in essa a K, $V(t)$, $W(t)$ rispettivamente K', $V'(t)$, $W'(t)$) la (2.2).

Essendo $L^2(T_0, T_1; V(t))$ sottospazio chiuso di $L^2(T_0, T_1; K)$ il suo antiduale sarà identificabile ad uno pazio s quoziente di $L^2(T_0, T_1; K') = (L^2(T_0, T_1; K))'$ cioè ad uno spazio del tipo $L^2(T_0, T_1; K')_{/N}$ dove N è il sottospazio chiuso di $L^2(T_0, T_1; K')$ formato dagli elementi che si annullano su $L^2(T_0, T_1; V(t))$. Ovviamente (essendo $W'(t)$ polare di $V(t)$) si ha $L^2(T_0, T_1; W'(t)) \subseteq N$ da cui, per la (2.2), $L^2(T_0, T_1; V(t))' \subseteq L^2(T_0, T_1; V'(t))$. Scambiando V con W si ha poi $L^2(T_0, T_1; W(t))' \subseteq \subseteq L^2(T_0, T_1; W'(t))$ da cui, applicando ripetutamente le (2.1) e (2.2), si ha:

$$L^2(T_0, T_1; K') \equiv (L^2(T_0, T_1; V(t)) \oplus L^2(T_0, T_1; W(t))' \equiv$$

$$\equiv L^2(T_0, T_1;\ V(t))' \oplus L^2(T_0, T_1;\ W(t))' \subseteq L^2(T_0, T_1;\ V'(t)) \oplus$$
$$\oplus\ L^2(T_0,\ T_1;\ W'(t)) \equiv L^2(T_0,\ T_1;\ K')$$

cioè tutte le inclusioni trovate sono in effetti degli isomorfismi; in particolare ne segue la (2.3).

COROLLARIO. – Sia $f \in L^2(T_0,\ T_1;\ V(t))'$. Per la (2.3), poichè $L^2(T_0,\ T_1;\ V'(t))$ è un sottospazio chiuso di $L^2(T_0,\ T_1;\ K)$ esisterà un elemento (non unico in generale) $f(t) \in L^2(T_0,\ T_1;\ K')$ tale che si abbia:

$$\langle f,\ \varphi \rangle_{L^2(T_0,T_1;V(t))',L^2(T_0,T_1;(V(t))} =$$

$$= \int_{T_0}^{T_1} \langle f(t),\ \varphi(t) \rangle_{K',K}\, dt \qquad \varphi \in L^2(T_0,\ T_1;\ V(t))\ .$$

In particolare la (1.6) potrà scriversi:

$$\int_{T_0}^{T_1} [a(t,\ u(t),\ \varphi(t)) - (u(t),\ \varphi'(t))_H]dt = (u_0,\ \varphi(T_0))_H + \tag{2.4}$$

$$+ \int_{T_0}^{T_1} \langle f(t),\ \varphi(t) \rangle_{K',K} dt \qquad \varphi \in \Phi(T_0,\ T_1;\ V(t))\ .$$

2.2. – Sia $u(t)$ soluzione del problema 1.1 sotto le ipotesi (1.1). (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), e siano T_0, T_1 non entrambi infiniti; Pongo:

$$\tilde{V}(t) = \begin{cases} V(2T_1 - t) & \text{per} \quad t \in [T_1,\ 2T_1 - T_0] \qquad \text{se} \quad T_1 < +\infty \\ V(2T_0 - t) & \text{per} \quad t \in [2T_0 - T_1,\ T_0] \qquad \text{se} \quad T_0 > -\infty \\ K & \text{per} \quad t \notin [2T_0 - T_1,\ 2T_1 - T_0] \\ & \qquad \text{se} \quad T_0 > -\infty \quad \text{e se} \quad T_1 < +\infty \\ V(t) & \text{per} \quad t \in [T_0,\ T_1] \end{cases}$$

(si tratta in sostanza di ribaltare il segmento $[T_0,\ T_1]$ intorno ai suoi estremi). Analogamente pongo:

$$\tilde{a}(t, u, v) = \begin{cases} -\,a(2T_1 - t, u, v) & \text{per } t \in [T_1, 2T_1 - T_0] \\ & \text{se } T_1 < +\infty \\ -\,a(2T_0 - t, u, v) & \text{per } t \in [2T_0 - T_1, T_0] \\ & \text{se } T_0 > -\infty \\ (u, v)_K & \text{per } t \notin [2T_0 - T_1, 2T_1 - T_0] \\ & \text{se } T_0 > -\infty \text{ e se } T_1 < +\infty \\ a(t, u, v) & \text{per } t \in [T_0, T_1] \end{cases}$$

Sia poi $\chi(t)$ una funzione definita per $t \in [-\infty, +\infty]$, continua con la derivata prima, nulla per $t \notin [2T_0 - T_1, 2T_1 - T_0]$, ed uguale a 1 in $[T_0, T_1]$. Pongo:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(2T_1 - t) \cdot \chi(t) & \text{per } t \in [T_1, 2T_1 - T_0] \\ & \text{se } T_1 < +\infty \\ u(2T_0 - t) \cdot \chi(t) & \text{per } t \in [2T_0 - T_1, T_0] \\ & \text{se } T_0 > -\infty \\ u(t) \cdot \chi(t) = u(t) & \text{per } t \in [T_0, T_1] \\ 0 & \text{per } t \notin [2T_0 - T_1, 2T_1 - T_0] \\ & \text{se } T_0 > -\infty \text{ e se } T_1 < +\infty \end{cases}$$

Si osservi che la famiglia $\tilde{V}(t)$ verifica ancora le (1.2), (1.3), la famiglia di forme $\tilde{a}(t, u, v)$ verifica ancora le (1.4) (1.5) (non la (1.7) anche se questa era verificata da $a(t, u, v)$); e $\tilde{u} \in L^2(-\infty, +\infty; \tilde{V}(t))$.

Sia $\varphi \in L^2(-\infty, +\infty; \tilde{V}(t))$. Associo a φ le seguenti funzioni [7]:

$$\varphi_1(t) = \varphi(t)\,|_{[T_0, T_1]} \text{ [8]}; \qquad \varphi_2(t) = -\,(\varphi(2T_1 - t) \cdot \chi(2T_1 - t))\,|_{[T_0, T_1]}\,;$$

$$\varphi(t) = -\,(\varphi(2T_0 - t) \cdot \chi(2T_0 - t))|_{[T_0, T_1]}\,; \qquad \varphi_4(t) = \sum_{i=1}^{3} \varphi_i(t)\,.$$

---

[7]) Se T_1 (risp. T_0) è infinito non va introdotta la funzione φ_2 (risp. φ_3).

[8]) Se $g(t)$ è definita in $]-\infty, +\infty[$ indico con $g\,|_{[T_0, T_1]}$ la restrizione di g a $[T_0, T_1]$.

Si osservi che $\varphi_i \in L^2(T_0, T_1; V(t))$ e che se $\varphi \in \Phi(-\infty, +\infty; \tilde{V}(t))$ (cfr. pag. 383 per la definizione di tale spazio) è $\varphi_4(T_0) = \varphi_4(T_1) = 0$; $\varphi_4 \in \Phi(T_0, T_1; V(t))$.

Sia φ generica in $\Phi(-\infty, +\infty; \tilde{V}(t))$. Si avrà:

$$\int_{T_0}^{T_1} a(t, u(t), \varphi_4)dt = \sum_{i=1}^{3} \int_{T_0}^{T_1} a(t, u(t), \varphi_i(t))dt = \int_{T_0}^{T_1} a(t, u(t), \varphi(t))dt +$$

$$+ \int_{T_1}^{2T_1-T_0} - a(2T_1 - t, u(2T_1 - t), \varphi(t) \cdot \chi(t))dt +$$

$$+ \int_{2T_0-T_1}^{T_0} - a(2T_0 - t, u(2T_0 - t), \varphi(t) \cdot \chi(t)dt =$$

$$= \int_{T_0}^{T_1} \tilde{a}(t, \tilde{u}(t), \varphi(t))dt + \int_{T_1}^{2T_1-T_0} \tilde{a}(t, \tilde{u}(t), \varphi(t)dt +$$

$$+ \int_{2T_0-T_1}^{T_0} \tilde{a}(t, \tilde{u}(t), \varphi(t))dt = \int_{2T_0-T_1}^{2T_1-T_0} \tilde{a}(t, \tilde{u}(t), \varphi(t))dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a(t, u(t), \varphi(t))dt .$$

Valuto ora $\displaystyle\int_{T_0}^{T_1} (u(t), \varphi_4'(t))_H dt$. Si ha:

$$\int_{T_0}^{T_1} (u(t), \varphi_4'(t))_H dt = \int_{T_0}^{T_1} (u(t), \varphi'(t))_H dt + \int_{T_0}^{T_1} (u(t), \varphi'(2T_1 - t))_H \cdot$$

$$\cdot\ \chi(2T_1 - t)dt + \int_{T_0}^{T_1} (u(t), \varphi(2T_1 - t))_H \chi'(2T_1 - t)dt +$$

$$+ \int_{T_0}^{T_1} (u(t), \varphi'(2T_0 - t))_H \cdot \chi(2T_0 - t)\, dt +$$

$$+ \int_{T_1}^{T_0} (u(t), \ \varphi(2T_0 - t))_H \chi'(2T_0 - t)dt =$$

$$= \int_{T_0}^{T_1} (u(t), \varphi'(t))_H dt + \int_{T_1}^{2T_1 - T_0} (u(2T_1 - t), \varphi'(t))_H \chi(t)dt +$$

$$+ \int_{2T_0 - T_1}^{T_0} (u(2T_0 - t), \varphi'(t)_H \cdot \chi(t)dt + \int_{T_1}^{2T - T_0} (u(2T_1 - t), \varphi(t))_H \chi(t)dt +$$

$$+ \int_{2T_0 - T_1}^{T_0} (u(2T_0 - t), \ \varphi(t))_H \chi'(t)dt = \int_{2T_0 - T_1}^{2T_1 - T_0} (\tilde{u}(t), \ \varphi'(t))_H dt +$$

$$+ \int_{2T_0 - T_1}^{2T_1 - T_0} \left(\tilde{u}(t)\ \frac{\chi'(t)}{\chi(t)}\ , \ \varphi(t)\right)_H dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{u}(t), \ \varphi'(t))_H dt +$$

$$+ \int_{2T_0 - T_1}^{2T_1 - T_0} \left(\tilde{u}(t)\ \frac{\chi'(t)}{\chi(t)}\ , \ \varphi(t)\right)_H dt\ .$$

Si osservi ora che, per ogni $\varphi \in L^2(-\infty, \ +\infty; \ V(t))$ si ha:

$$\left| \int_{2T_0 - T_1}^{2T_1 - T_0} u(t) \cdot \frac{\chi'(t)}{\chi(t)}\ , \ \varphi(t))_H dt \right| \leqslant \mathrm{C}\ |\ \varphi\ |_{L^2(-\infty, +\infty H)}$$

$$\leqslant \mathrm{C}\ |\ \varphi\ |_{L^2(-\infty, +\infty\, ; \tilde{V}(t))}$$

Ne segue, per il teorema 2.1 applicato alla famiglia $\tilde{V}(t)$, la esistenza di un elemento $g(t) \in L^2(-\infty, +\infty; K')$ tale che:

$$\int_{2T_0-T_1}^{2T_1-T_0} \left(u(t) \cdot \frac{\chi'(t)}{\chi(t)}, \varphi(t)\right)_H dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle g(t), \varphi(t) \rangle_{K',K} dt$$

$$\forall \varphi \in L^2(-\infty, +\infty; \tilde{V}(t)) .$$

Si è così ottenuto in definitiva:

$$\int_{T_0}^{T_1} (u(t), \varphi_4'(t))_H dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (u(t), \varphi'(t))_H dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \langle g(t), \varphi(t) \rangle_{K',K} dt$$

$$\forall \varphi \in \Phi(-\infty, +\infty; \tilde{V}(t)) .$$

Sia ora $f(t) \in L^2(T_0, T_1; V'(t))$. Si osservi che l'espressione:

$$\int_{T_0}^{T_1} \langle f(t), \varphi(t) \rangle_{K',K} dt - \int_{2T_0-T_1}^{T_0} \langle f(2T_0 - t) \cdot \chi(t), \varphi(t) \rangle_{K',K} dt -$$

$$- \int_{T_1}^{2T_1-T_0} \langle f(2T_1 - t)\chi(t), \varphi(t) \rangle_{K',K} dt ,$$

definisce, al variare di φ in $L^2(-\infty, +\infty; \tilde{V}(t))$, una forma lineare continua su tale spazio; quindi, per il teorema 2.1, un elemento di $L^2(-\infty, +\infty; \tilde{V}'(t))$. Indicherò con $\tilde{f}$ l'elemento di $L^2(-\infty, +\infty; \tilde{V}'(t))$ definito (a partire da f e dalla g precedentemente costruita) da:

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int_{T_0}^{T_0} \langle f(t), \varphi(t) \rangle_{K',K} dt - \int_{2T_0-T_1}^{T_0} \langle f(2T_0-t)\chi(t), \varphi(t) \rangle_{K',K} dt -$$

$$- \int_{T_1}^{2T_1 - T_0} \langle f(2T_1 - t)\chi(t),\ \varphi(t) \rangle_{E',E}\, dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \langle g(t),\ \varphi(t) \rangle_{K',K}\, dt$$

$$\forall\ \varphi \in L^2(-\infty,\ +\infty;\ \tilde{V}(t))\ .$$

Si ha immeditamente, con calcoli analoghi a quelli fin qui, svolti che, per ogni $\varphi \in L^2(-\infty,\ +\infty;\ \tilde{V}(t))$ è:

$$\int_{T_0}^{T_1} \langle f,\ \varphi_4 \rangle_{K',K}\, dt = \langle \tilde{f} - g,\ \varphi \rangle_{L^2(-\infty,+\infty;\tilde{V}(t))',L^2(-\infty,+\infty;\tilde{V}(t))}$$

Sono ora in grado di dimostrare il torema:

TEOREMA 2.2. - *Sia* $u \in L^2(T_0,\ T_1;\ V(t))$ *con* T_0, T_1 *non entrambi infiniti soluzione della* (1.6); *e valgano le* (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5). *Allora* u *è restrizione a* $[T_0,\ T_1]$ *della soluzione di un problema del tipo* 1.1 *relativo all'intervallo* $]-\infty,\ +\infty[$ *per i cui dati valgono ancora le* (1.1) (1.2), (1.3), (1.4), (1.5).

DIM. - Per i conti fin qui svolti e con le notazioni introdotte si ha che, per ogni $\varphi \in \Phi(-\infty,\ +\infty;\ \tilde{V}(t))$ è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{a}(t,\ \tilde{u}(t),\ \varphi(t)) - (\tilde{u}(t),\ \varphi'(t))_H] dt = \int_{T_0}^{T_1} [a(t,\ u(t),\ \varphi_4(t)) -$$

$$- (u(t),\ \varphi_4'(t))_H]\, dt + \langle g,\ \varphi \rangle = \int_{T_0}^{T_1} \langle f(t),\ \varphi_4(t) \rangle_{K',K}\, dt +$$

$$\langle g,\ \varphi \rangle = \langle \tilde{f},\ \varphi \rangle$$

(il penultimo passaggio segue dal fatto che u è soluzione della (1.6) e che φ_4 è in $\Phi(T_0,\ T_1;\ \tilde{V}(t))$ e verifica $\varphi_4(T_0) = 0$). Si è già osservato che K, H, $\{\tilde{V}(t)\}$ verificano ancora le (1.1), (1.2), (1.3) e che $\tilde{a}(t,\ u,\ v)$ verifica ancora le (1.4), (1.5); per definizione di $\tilde{u}$ è ovviamente $u \equiv \tilde{u}|_{]T_0,T_1[}$.

OSSERVAZIONE 2.1. - Si osservi che i dati $\tilde{a}(t,\ u,\ v)$, $\{\tilde{V}(t)\}$,

$\tilde{f}$ del problema di cui $\tilde{u}$ è soluzione sono rispettivamente dei prolungamenti a $]-\infty, +\infty[$ dei dati $a(t, u, v)$, $\{V(t)\}$, f del problema di cui u è soluzione; ciò è evidente per $\tilde{a}(t, u, v)$ e per $\{\tilde{V}(t)\}$; per quanto riguarda $\tilde{f}$ basta osservare che se $\varphi \in L^2(-\infty, +\infty; \tilde{V}(t))$ ha supporto in $[T_0, T_1]$ si ha:

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tilde{f}(t), \varphi(t) \rangle_{K',K} dt = \int_{T_0}^{T_1} \langle \tilde{f}(t), \varphi(t) \rangle_{K',K} dt =$$

$$= \langle f, \varphi_{|]T_0,T_1[} \rangle$$

3. Un teorema di regolarità.

3.1. – Ricordo la seguente proprietà (cfr. Lions [3]):

Siano $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ due spazi di Hilbert con $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_1$ denso in $\mathcal{H}_2$.

Si indichi con $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]_\vartheta$ ($\vartheta \in [0, 1]$) lo spazio di interpolazione di indice ϑ tra $\mathcal{H}_1$ ed $\mathcal{H}_2$, ad es. secondo il metodo di [3]. Si indichi con $H^1(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ lo spazio $\{v(t) \in L^2(-\infty, +\infty; \mathcal{H}_1); v'(t) \in L^2(-\infty, +\infty; \mathcal{H}_2)\}$, con $\mathcal{C}(-\infty, +\infty; \mathcal{H})$ lo spazio delle funzioni continue a valori in $\mathcal{H}$. Si ha:

$$H^1(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \subset \mathcal{C}(-\infty, +\infty; [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]_{\frac{1}{2}}) \cap H^{\frac{1}{2}}(-\infty, +\infty, [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]_{\frac{1}{2}}) \tag{3.1}$$

(per la definizione di $H^{\frac{1}{2}}(-\infty, +\infty; \mathcal{H})$ cfr. ad es. [4]).

Siano K, H, $\{V(t)\}_{t \in [T_0, T_1]}$ verificanti le (1.1), (1.2), (1.3).

Supporrò che esista uno spazio V sottospazio vettoriale chiuso di K, denso in H e contenuto in $V(t)$ per ogni $t \in [T_0, T_1]$.

Identificherò nel seguito H ed H'; identificherò inoltre H ad una varietà densa di V' (identificazione lecita grazie alla densità di V in H) *ed infine identificherò V' ad un sottospazio chiuso di K'* (ciò ha senso essendo V sotto spazio chiuso di K). Si osservi che non si può fare l'ulteriore identificazione di H in una varietà densa di K' (identificazione a priori lecita perchè per la (1.1) è K denso in H) in quanto si otterebbero identificazioni incompatibili; basta osservare che con le identificazioni fatte la chiusura di H in K' coincide con V' e quindi H non è denso in K'.

Grazie alla identificazioni fatte si avrà (cfr. [6]) $[V, V']_{\frac{1}{2}} = H$. Mentre non si può concludere, almeno con lo stesso metodo di dimostrazione, $[K, K']_{\frac{1}{2}} = H$. In generale si avrà:

$$H = [V, V']_{\frac{1}{2}} \subseteq [V(t), V']_{\frac{1}{2}} \subseteq [K, V']_{\frac{1}{2}} \subseteq [K, K']_{\frac{1}{2}} .$$

Supporrò nel seguito che si abbia:

$$[K, V']_{\frac{1}{2}} = H .$$

Le ipotesi finora formulate si possono quindi così riassumere:

(3.2) *Esiste V chiuso in K denso in H e tale che $V \subseteq V(t)$ $\forall$ $\forall$ $t \in [T_0, T_1]$.*

$$V \subset H = H' \subset V' ; \qquad V' \subset K' . \tag{3.3}$$

$$[K, V']_{\frac{1}{2}} = H . \tag{3.4}$$

Osservazione 3.1. – Si osservi che, se sono verificate le ipotesi (3.2), (3.3), (3.4) per la famiglia $\{V(t)\}$, con la stessa scelta di V tali ipotesi sono ancora verificate per la famiglia $\{\tilde{V}(t)\}$.

3.2. – Siano valide le (1.4), (1.5). Allora $a(t, u, v)$ definisce, al variare di v in K, un ben determinato elemento $\mathcal{A}(t)u \in K'$ definito da:

$$\langle \mathcal{A}(t)u, v \rangle_{K',K} = a(t, u, v) . \tag{3.5}$$

Si verifica facilmente che si ha:

$$\mathcal{A}(t) \in \mathcal{L}(K, K')\ ^{9}); \ \mathcal{A}(t) \in \mathcal{L}(L^2(T_0, T_1; K), L^2(T_0, T_1; K')). \tag{3.6}$$

[9]) Con $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ indico lo spazio delle applicazioni lineari continue di H_1 in H_2.

Sia ora valida la (3.2). Definisco $A(t) = P_{V'}\mathcal{A}(t)$:

$$a(t, u, v) = \langle \mathcal{A}(t)u, v \rangle_{K',K} = \langle A(t)u, v \rangle_{K',K} = \tag{3.7}$$
$$= \langle A(t)u, v \rangle_{V',V} \ \forall \ u \in K, \ \forall \ v \in V .$$

Dalle (3.6) e (3.2) si ha ovviamente:

$$A(t) \in \mathcal{L}(K, V'); \ A(t) \in \mathcal{L}(L^2(T_0, T_1; K); L^2(T_0, T_1; V')) . \tag{3.7'}$$

TEOREMA 3.1. – *Sia* $u \in L^2(T_0, T_1; V(t))$ *soluzione del problema* 1.1. *Se valgono le* (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (3.2), (3.3) *si ha*:

$$u' \in L^2(T_0, T_1; V') . \tag{3.8}$$

$$A(t)u(t) + u'(t) = P_{V'}f(t) \text{ [10]}, \tag{3.9}$$

in V', *quasi ovunque in* $[T_0, T_1]$.

DIM. – Sia dapprima $T_0 = -\infty$, $T_1 = +\infty$. Sia $v \in V$ generico $\chi(t) \in \mathcal{D}(-\infty, +\infty)$ generica; posto $\varphi(t) = \chi(t)$. v è ovviamente $\varphi \in \Phi(-\infty, +\infty; V(t))$.

Scrivo la (2.4) relativa a tale φ. Si avrà, con ovvi passaggi:

$$\langle -\langle u', v \rangle_{V',V} , \chi(t) \rangle_{\mathcal{D}'(-\infty,+\infty);\mathcal{D}(-\infty,+\infty)} =$$
$$= -\langle u', \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(-\infty,+\infty;V'),\mathcal{D}(-\infty,+\infty;V)} =$$
$$= \langle u, \varphi' \rangle_{\mathcal{D}'(-\infty,+\infty;V'),\mathcal{D}(-\infty,+\infty;V)} =$$
$$= \langle \langle u, v \rangle_{V',V} , \chi' \rangle_{\mathcal{D}'(-\infty,+\infty),\mathcal{D}(-\infty,+\infty)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle u(t), v \rangle_{V',V} \overline{\chi}'(t)dt =^{11)} \int_{-\infty}^{+\infty} (u(t), v)_H \overline{\chi}'dt =$$

---

[10]) cfr. (2.4) ed il corollario al Teorema 2.1 per il senso di $P_{V'}f(t)$.

[11]) Per definizione di immersione di H in V' è $(h, v)_H = \langle h, v \rangle_{V',V}$ $\forall \ h \in H, \ v \in V$.

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (u(t),\ \varphi'(t))_H dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [a(t,\ u(t),\ \varphi(t)) - \langle f(t),\ \varphi(t) \rangle_{K',K}]\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \mathcal{A}(t)u(t) - f(t),\ v \rangle_{K',K}\ \overline{\chi}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle P_{V'}(\mathcal{A}(t)u(t) -$$

$$- f(t)),\ v \rangle_{V',V}\ \overline{\chi}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle A(t)u(t) - P_{V'}f(t),\ v \rangle_{V',V}\overline{\chi}(t)dt =$$

$$= \langle \langle A(t)u(t) - P_{V'}\, f(t),\ v \rangle_{V',V}\ ,\ \chi(t) \rangle_{\mathcal{D}'(-\infty,+\infty);\mathcal{D}(-\infty,+\infty)}\ .$$

Tale relazione, valendo per ogni $\chi \in \mathcal{D}(-\infty,\ +\infty)$ dà:

$$- \langle u',\ v \rangle_{V',V} = \langle Au - P_{V'}f,\ v \rangle_{V',V}$$

$$\text{nel senso di}\quad \mathcal{D}'(-\infty,\ +\infty)$$

e tale relazione, valendo per ogni $v \in V$ dà:

$$- u' = Au - P_{V'}f \quad \text{nel senso di} \quad \mathcal{D}'(-\infty,\ +\infty;\ V')\ .$$

Essendo $Au - P_{V'}f = P_{V'}(\mathcal{A}u - f) \in L^2(-\infty,\ +\infty;\ V')$ si ha la (3.8); e l'ultima relazione scritta vale in $L^2(-\infty,\ +\infty;\ V')$ cioè $-u'(t) = A(t)u(t) - P_{V'}f$ in V', quasi ovunque in $]-\infty,\ +\infty[$; il che dà la (3.9); ne segue il teorema nel caso $T_0 = -\infty$, $T_1 = +\infty$.

Per T_0, T_1 generici basta applicare il teorema 2.2 ed applicare le (3.8), (3.9) alla $\tilde{u}(t)$; per restrizione a $[T_0,\ T_1]$ ne seguono le (3.8), (3.9) nel caso generale; cfr. osservazione 2.1. c.v.d.

TEOREMA 3.2. – *Nelle stesse ipotesi del teorema* 3.1, *e se vale la* (3.4) *si ha*:

$$u \in \mathcal{C}([T_0,\ T_1];\ H) \cap H^{\frac{1}{2}}(T_0,\ T_1;\ H)\ . \tag{3.10}$$

$$u(T_0) = u_0 \qquad (\text{se} \quad T_0 > -\infty)\ . \tag{3.11}$$

---

[12]) Si osservi che la funzione $\langle u(t), v \rangle = (u(t), v)$ è, per ogni $v \in V$, in $H^1(T_0, T_1)$; è quindi lecita la integrazione per parti.

DIM. - Sia $T_0 = -\infty$, $T_1 = +\infty$. Essendo $u \in L^2(-\infty, +\infty; K)$ per ipotesi la (3.8) implica $u \in H^1(K, V')$; allora la (3.1) e la (3.4) danno la (3.10).

Nel caso generale la (3.10) relativa ad u si ottiene per restrizione a $[T_0, T_1]$ della (3.10) relativa ad $\tilde{u}$ (cfr. osservazione 2.1 e 3.1).

Sia poi $T_0 > -\infty$; sia v generico in V $\chi(t)$ generico in $\mathcal{D}(]T_0, T_1[)$; posto $\varphi(t) = \chi(t). v$ è ovviamente $\varphi \in \Phi(T_0, T_1; V(t))$.

$$(u_0, \varphi(T_0))_H + \int_{T_0}^{T_1} \langle P_{V'}f(t), v \rangle_{K',K} \overline{\chi}(t)dt = (u_0, \varphi(T_0))_H +$$

$$+ \int_{T_0}^{T_1} \langle f(t), \varphi(t) \rangle_{K',K} dt = \int_{T_0}^{T_1} [a(t, u(t), \varphi(t)) - (u(t), \varphi'(t))_H]dt =$$

$$= \int_{T_0}^{T_1} \langle \mathcal{A}(t)u(t), v \rangle_{K',K} (t)dt - \int_{T_0}^{T_1} (u(t), v)_H \overline{\chi}'(t)dt =$$

$$= \int_{T_0}^{T_1} \langle A(t)u(t), v \rangle_{V',V} \overline{\chi}(t)dt - \int_{T_0}^{T_1} \langle u(t), v \rangle_{V',V} \overline{\chi}'(t)dt =$$

$$= \int_{T_0}^{T_1} \langle A(t)u(t), v \rangle_{V',V} \overline{\chi}(t)dt + \int_{T_0}^{T_1} \langle u'(t), v \rangle_{V',V} \overline{\chi}(t)dt +$$

$$+ (u(T_0), v)_H \cdot \overline{\chi}(T_0) = \int_{T_0}^{T_1} \langle A(t)u(t) + u'(t), v \rangle_{K',K} \overline{\chi}(t)dt +$$

$$+ (u(T_0), v)_H \cdot \overline{\chi}(T_0) = (u(T_0), v)_H \cdot \overline{\chi}(T_0) +$$

$$+ \int_{T_0}^{T_1} \langle P_{V'}f(t), v \rangle_{K',K} \overline{\chi}(t)dt .$$

Confrontando primo ed ultimo membro si ha $(u_0 - u(T_0),\ v)_H = 0$ che, per la densità di V in H, dà la (3.11).

TEOREMA 3.3. – *Nelle stesse ipotesi del teorema* 3.2, *sia u soluzione della* (2.4) *con* $T_1 < +\infty$; *sia* $\varphi \in L^2(T_0,\ T_1;\ V(t))$, $\varphi' \in L^2(T_0,\ T_1;\ H)$. *Si ha*:

$$(3.12)\qquad \int_{T_0}^{T_1} [a(t,\ u(t),\ \varphi(t)) - (u(t),\ \varphi'(t))_H]dt = (u_0,\ \varphi(T_0))_H +$$

$$+ \int_{T_0}^{T_1} \langle f(t),\ \varphi(t) \rangle_{K',K} - (u(T_1),\ \varphi(T_1))_H\ .$$

DIM. – Sia $\chi_n(t)$ continua con la derivata prima in $[T_0,\ T_1]$ e sia $\chi_n(t) = 1$ per $t \geqslant T_1 - \dfrac{1}{n}$; $\chi_n(T_1) = 0$; $\chi_n(t)$ non crescente.

Posto $u_n = u \cdot \chi_n$ si ha:

$$|\ u - u_n\ |^2_{L^2(T_0,T_1;K)} = \int_{T_0}^{T_1} |\ u(t)\ |^2_K (1 - \chi_n^2(t))dt$$

cioè $\lim\limits_{n\to\infty}\ |\ u - u_n\ |_{L^2(T_0,T_1;K)} = 0$. Per la (1.5) si avrà allora:

$$\int_{T_0}^{T_1} a(t,\ u(t),\ \varphi(t))dt = \lim_{n\to\infty} \int_{T_0}^{T_1} a(t,\ u_n,\ \varphi)dt\ \ \forall \varphi \in L^2(T_0,\ T_1;\ K)\ ;$$

inoltre ovviamente se $\varphi' \in L^2(T_0,\ T_1;\ H)$ si avrà:

$$\int_{T_0}^{T_1} (u(t),\ \varphi'(t))_H dt = \lim_{n\to\infty} \int_{T_0}^{T_1} (u_n(t),\ \varphi(t))_H dt\ .$$

Sia $\varphi \in L^2(T_0,\ T_1;\ V(t))$ con $\varphi' \in L^2(T_0,\ T_1;\ H)$; posto $\varphi_n(t) =$

$= \varphi(t) \cdot \chi_n(t)$ è ovviamente $\varphi_n(t) \in \Phi(T_0, T_1; V(t))$; si avrà allora, per la (2.4):

$$\int_{T_0}^{T_1} \langle f(t), \varphi_n(t) \rangle_{K',K} dt + (u_0, \varphi_n(T_0))_H = \int_{T_0}^{T_1} [a(t, u, \varphi_n) -$$

$$(u, \varphi)]dt = \int_{T_0}^{T_1} [a(t, u_n, \varphi) - (u_n, \varphi')_H]dt - \int_{T_0}^{T_1} (u, \varphi)_H \chi_n' dt .$$

Si osservi ora che la funzione $(u(t), \varphi(t))_H$ è continua e la funzione $\chi_n'(t)$ è non positiva; per il teorema della media sarà allora:

$$\int_{T_0}^{T_1} (u, \varphi)_H \chi_n' dt = \int_{T_1 - 1/n}^{T_1} (u, \varphi)_H \chi_n' dt = (u(\vartheta_n), \varphi(\vartheta_n))_H \int_{T_1 - 1/n}^{T_1} \chi' dt =$$

$$= - (u(\vartheta_n), \varphi(\vartheta_n))_H$$

con $\vartheta_n \in [T_1 - 1/n, T_1]$. Per $n \to \infty$ si ha $\vartheta_n \to T_1$; da cui:

$$(u_0, \varphi(T_0))_H - (u(T_1), \varphi(T_1))_H = \lim_{n\to\infty} [(u(T_0), \varphi(T_0))_H - (u(\vartheta_n),$$

$$\varphi(\vartheta_n))_H] = \lim_{n\to\infty} \int_{T_0}^{T_1} [a(t, u_n, \varphi) - (u_n, \varphi')_H - \langle f \cdot \chi_n, \varphi \rangle_{K',K}]dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{T_0}^{T_1} a(t, u_n, \varphi)dt - \lim_{n\to\infty} \int_{T_0}^{T_1} (u_n, \varphi')_H dt - \lim_{n\to\infty}$$

$$\int_{T_0}^{T_1} \langle f\chi_n, \varphi \rangle_{K',K} dt = \int_{T_0}^{T_1} a(t, u, \varphi)dt - \int_{T_0}^{T_1} (u, \varphi')_H dt -$$

$$\int_{T_0}^{T_1} \langle f, \varphi \rangle_{K',K} dt \cdot$$

grazie alla (1.5) ed al fatto che $g \to \chi_n g$ è per $g \in L^2(T_0, T_1; K)$ (risp. $L^2(T_0, T_1; H)$ risp. $L^2(T_0, T_1; K')$) una successione di trasformazioni di $L^2(T_0, T_1; K)$ in $L^2(T_0, T_1, K)$ (risp. di $L^2(T_0, T_1; H)$ in $L^2(T_0, T_1; H)$, risp. di $L^2(T_0, T_1; K')$ in $L^2(T_0, T_1; K')$) che per $n \to \infty$ converge alla trasformazione identica di $L^2(T_0, T_1; K)$ (risp. di $L^2(T_0, T_1; H)$, risp. di $L^2(T_0, T_1; K')$) in sé. c.v.d.

OSSERVAZIONE 3.2. – Sia $\mathcal{V}$ la classe di spazi di Hilbert V tali che è verificata la (3.2) e, previe le identificazioni (3.3) è verificata la (3.4). Ovviamente se $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ e $V_1 \subset V_2$ il teorema 3.1 enunciato per V_2 è più generale del corrispondente teorema 3.1 enunciato per V_1; si ha quindi interesse ad effettuare una scelta di V in $\mathcal{V}$ «più ampia possibile». Si osservi però che i teoremi 3.2 e 3.3 non dipendono dalla scelta di V in $\mathcal{V}$ e valgono sotto la sola ipotesi che la classe $\mathcal{V}$ non sia vuota.

4. Il caso $V(t)$ indipendente da t.

4.1. – Supporrò in questo numero $V(t)$ indipendente da t. Si può allora prendere $K = V(t) = V$ e, sotto l'ipotesi (1.1), le (1.2), (1.3), (3.2) sono automaticamente verificate; previe le identificazioni (3.3) è automaticamente verificata anche la (3.4) (cfr. [6]) e quindi le sole ipotesi (1.1), (1.4), (1.5) sono sufficienti a garantire la applicabilità dei risultati del N. 3.

TEOREMA 4.1. – *Se $V(t) = V$ è indipendente da t la soluzione del problema* 1.1 *sotto le ipotesi* (1.1), (1.4), (1.5), (1.7) *è unica e dipende con continuità dai dati u_0, f nel senso che si ha*:

$$(4.1) \qquad |u|_{L^2(T_0,T_1;V)} \leqslant \mathcal{C}(|f|_{L^2(T_0,T_1;V')} + |u_0|) ;$$

$\mathcal{C}$ *indipendente da* T_0, T_1.

DIM. – Sia u soluzione del problema 1.1. Essendo $K = V$ le formule (3.5) e (3.7) coincidono ed è $\mathcal{A}(t) = A(t)$. Moltiplicando scalarmente (tra V' e V) ambo i membri della (3.9) per $u(t)$ e integrando tra T_0 e T_1 si ha (si osservi che è $P_{V'}f = f$):

$$\int_{T}^{T_1} [a(t, u, u) + \langle u', u \rangle_{V',V}]\, dt = \int_{T_0}^{T_1} \langle f, u \rangle_{V',V}\, dt .$$

Prendendo la parte reale di ambo i membri si ha, per la (1.7):

$$\alpha \mid u \mid^2_{L^2(T_0,T_1;V)} \leqslant \operatorname{Re} \int_{T_0}^{T_1} a(t, u, u)dt = \operatorname{Re} \int_{T_0}^{T_1} \langle f, u \rangle_{V',V}\, dt -$$

$$- \operatorname{Re} \int_{T_0}^{T_1} \langle u', u \rangle_{V',V} dt = \operatorname{Re} \int_{T_0}^{T_1} \langle f, u \rangle_{V',V}\, dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_1} [\, \langle u', u \rangle_{V',V} + \overline{\langle u', u \rangle_{V',V}}]dt = \operatorname{Re} \int_{T_0}^{T_1} \langle f, u \rangle_{V',V}\, dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_1} \frac{d}{dt} \langle u, u \rangle_{V',V}\, dt = \operatorname{Re} \int_{T_0}^{T_1} \langle f, u \rangle_{V',V}\, dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_1} \frac{d}{dt} (u, u)_H\, dt$$

(per l'ultimo passaggio cfr. nota [11])). Ne segue, applicando la (3.11) e la disuguaglianza di Schwartz:

$$\alpha \mid u \mid^2_{L^2(T_0,T_1;V)} \leqslant \operatorname{Re} \int_{T_0}^{T_1} \langle f, u \rangle_{V',V}\, dt + \frac{1}{2} \mid u(0) \mid^2_H \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{T_0}^{T_1} \langle f, u \rangle_{V',V}\, dt \right| + \frac{1}{2} \mid u_0 \mid^2_H \leqslant$$

$$\leqslant \mid f \mid_{L^2(T_0,T_1;V')} \cdot \mid u \mid_{L^2(T_0,T_1;V)} + \frac{1}{2} \mid u_0 \mid^2_H .$$

Risolvendo tale disequazioni in $\mid u \mid_{L^2(T_0,T_1;V)}$ si ottiene:

$$\mid u \mid_{L^2(T_0,T_1;V)} \leqslant \frac{\mid f \mid_{L^2(T_0,T_1;V')} + \sqrt{\mid f \mid^2_{L^2(T_0,T_1;V')} + 2\alpha \mid u_0 \mid^2_H}}{2\alpha}$$

che dà la (4.1) con $\mathcal{C} = \max\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{2}\right)$ indipendente da T_0, T_1, c.v.d.

OSSERVAZIONE 4.1. – Il teorema 4.1 è esplicitamente enunciato in [4] nel caso in cui T_0, T_1 siano finiti. Lo schema di ragionamento usato è analogo a quello usato in [5] per un teorema analogo.

OSSERVAZIONE 4.2. – Si osservi che, nelle ipotesi del teorema 4.1, si ha anche:

$$|u'|_{L^2(T_0,T_1;V')} \leqslant \mathcal{C}(|f|_{L^2(T_0,T_1;V')} + |u_0|_H) . \tag{4.2}$$

$$|u|_{H^{\frac{1}{2}}(T_0,T_1;H)} \leqslant \mathcal{C}(|f|_{L^2(T_0,T_1;V')} + |u_0|_H) \tag{4.3}$$

(con la stessa lettera $\mathcal{C}$ indico costanti anche diverse tra loro).

Infatti si ha, dalla (3.9):

$$|u'|_{L^2(T_0,T_1;V')} \leqslant |f|_{L^2(T_0,T_1;V')} + |Au|_{L^2(T_0,T_1;V')} \quad ;$$

dalla (3.7′) e dalla (4.1) si ha la (4.2); dalle (4.2) e (4.1) si ha per interpolazione (cfr. [3] e anche la (3.1)) la (4.3).

4.2. – Si osservi che se si pone $a(t, u, v) = (u, v)_V$ per ogni t sono ovviamente verificate le (1.4), (1.5), (1.7). Il teorema 4.1 dà allora come caso particolare:

TEOREMA 4.2. – *Sia T_1 finito. Per ogni $u_1 \in H$ esiste ed è unica $u_1^* \in L^2(T_1, +\infty; V)$ soluzione del problema:*

$$\int_{T_1}^{+\infty} [(u_1^*, \varphi)_V - (u_1^*, \varphi')_H]\, dt = (u_1, \varphi(T_1))_H \tag{4.4}$$

$$\forall\ \varphi \in \Phi(T_1, +\infty; V) .$$

Si inverta ora il segno di t. Al problema 1.1 corrisponderà un problema analogo del tipo (sempre per $V(t)$ indipendente da t):

$$\int_{T_0}^{T_1} [a(t, u(t), \varphi(t)) + (u(t), \varphi'(t))_H]dt = \int_{T_0}^{T_1} \langle f(t), \varphi(t) \rangle_{V',V}\, dt +$$

$$+ (u_1, \varphi(T_1))_H \qquad\qquad \forall\ \varphi \in \bar{\Phi}(T_0, T_1; V) ,$$

dove $\overline{\Phi}(T_0, T_1; V)$ si definisce analogamente a come si è definita $\Phi(T_0, T_1; V)$ semplicemente sostituendo alla condizione $\varphi(T_1)=0$ l'altra $\varphi(T_0) = 0$.

I risultati fin qui ottenuti continueranno a valere, con le ovvie modifiche; in particolare il teorema (4.2) dà:

Corollario 4.1. – *Sia T_0 finito; per ogni $u_0 \in H$ esiste ed è unica $u_0^* \in L^2(-\infty, T_0; V)$ soluzione del problema*:

$$\int_{-\infty}^{T_0} [(u_0, \varphi)_V + (u_0, \varphi')_H] dt = (u_0, \varphi(T_0))_H$$

$$\forall \ \varphi \in \overline{\Phi}(-\infty, T_0; V) .$$

Risolvo ora un problema non « ben posto », o « retrogrado » nel senso che cerco la soluzione di un problema per cui dovrei assegnare il dato iniziale ed assegno invece il dato finale (il problema è risolubile per l'arbitrarietà del dato f).

Teorema 4.3. – *Sia T_0 finito. Per ogni $u_0 \in H$ esistono $u_0^* \in \in L^2(-\infty, T_0; V)$ ed $f_0 \in L^2(-\infty, T_0; V')$ tali che si abbia*:

$$\text{(4.5)} \qquad \int_{-\infty}^{T_0} [(u_0^*, \varphi)_V - (u_0^*, \varphi')_H] dt = -(u_0, \varphi(T_0))_H + \\ + \int_{-\infty}^{T_0} \langle f_0, \varphi \rangle_{V', V} \, dt \ \forall \varphi \in \overline{\Phi}(-\infty, T_0; V)$$

$$\text{(4.6)} \qquad | f_0 |_{L^2(-\infty, T_0; V')} \leqslant C \, | u_0 |_H .$$

Dim. – Si prenda u_0^* definita nel corollario 4.1; per il teorema analogo (a meno del cambiamento del segno di t) del teorema 3.1 si ha $u_0^*(T_0) = u_0$; $u_0^{*\prime} \in L^2(-\infty, T_0; V')$; ponendo $f_0 = 2u_0^{*\prime}$ si ha $\forall \ \varphi \in \overline{\Phi}(-\infty, T_0; V)$

$$\int_{-\infty}^{T_0} [(u_0^*, \varphi)_V - (u_0^*, \varphi')_H] dt = \int_{-\infty}^{T_0} [(u_0^*, \varphi)_V + (u_0^*, \varphi')_H] \, dt -$$

$$-2\int_{-\infty}^{T_0}(u_0^*,\ \varphi')_H dt = (u_0,\ \varphi(T_0))_H - 2\int_{-\infty}^{T_0}\frac{d}{dt}(u_0^*,\ \varphi)_H dt +$$

$$+2\int_{-\infty}^{T_0}\langle u_0^{*\prime},\ \varphi\rangle_{V',V}\, dt = (u_0,\ \varphi(T_0))_H - 2(u_0^*(T_0),\ \varphi(T_0))_H +$$

$$+\int_{-\infty}^{T_0}\langle f_0,\ \varphi\rangle_{V',V}\, dt = -\ (u_0,\ \varphi(T_0))_H + \int_{-\infty}^{T_0}\langle f,\ \varphi\rangle_{V',V}\, dt\ ,$$

il che dimostra la (4.5).

La (4.6) è poi conseguenza della (4.2) (con orientamento opposto di t) applicata al corollario 4.1 essendo per definizione $f_0 = 2u_0^{*\prime}$ c.v.d..

5. Un teorema di unicità.

5.1. – Richiamo brevemente qualche nozione su alcuni spazi di distribuzioni (cfr. ad es. [4]). Si indichi per brevità con $H^0(H)$ lo spazio $L^2(-\infty,\ +\infty;\ H)$. Con $H^1(H)$ indicherò lo spazio: $\{v \in H^0(H);\ v' \in H^0(H)\}$ con prodotto scalare dato da:

$$(u,\ v)_{H^1(H)} = (u,\ v)_{H^0(H)} + (u',\ v')_{H^0(H)}\ .$$

Si dimostra che $H^1(H)$ è uno spazio di Hilbert denso in $H^0(H)$ e si pone (identificando $H^0(H)$ al suo antiduale) $H^{-1}(H) = (H^1(H))'$, ottenendo così le relazioni $H^1(H) \subset H^0(H) \subset H^{-1}(H)$ ogni spazio essendo denso nel successivo. Si pone poi per $\vartheta \in\,]0,\ 1[$:

$$H^\vartheta(H) = [H^1(H),\ H^0(H)]_{1-\vartheta}\ ; \qquad H^{-\vartheta}(H) = (H^\vartheta(H))' =$$
$$= [H^0(H),\ H^{-1}(H)]_{1-\vartheta}$$

(per l'ultima relazione cfr. ad es. [6]); in particolare per $\vartheta = \dfrac{1}{2}$ si ottiene lo spazio già introdotto al N.3 e ivi indicato $H^{\frac{1}{2}}(-\infty,\ +\infty;\ H)$.

Si dimostra che l'operazione di derivazione è lineare continua da $H^1(H)$ in $H^0(H)$ e da $H^0(H)$ in $H^{-1}(H)$; per interpolazione si ha allora che l'operazione di derivazione è lineare continua da $H^\vartheta(H)$ in $H^{\vartheta-1}(H)$ per $\vartheta \in [0, 1]$. In particolare per $\vartheta = \frac{1}{2}$ si ha che se $\psi_1, \psi_2 \in H^{\frac{1}{2}}(H)$ ha senso $\langle \psi_1, \psi_2' \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(H), H^{-\frac{1}{2}}(H)}$; e tale espressione, se $\psi_2 \in H^1(H)$ si scrive anche, grazie alle identificazioni fatte, $(\psi_1, \psi_2')_{H^0(H)}$ (cfr. [11])).

Siano $\psi_1, \psi_2 \in H^1(H)$. Si avrà:

$$\langle \psi_1, \psi_2' \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(H), H^{-\frac{1}{2}}(H)} + \langle \psi_1', \psi_2 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(H), H^{\frac{1}{2}}(H)} = (\psi_1, \psi_2')_{H^0(H)} +$$

$$+ (\psi_1', \psi_2)_{H^0(H)} = \int_{-\infty}^{+\infty} [(\psi_1(t), \psi_2'(t))_H + (\psi_1'(t), \psi_2(t))_H]\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} (\psi_1(t), \psi_2(t))_H dt = 0 .$$

Poichè $H^1(H)$ è denso in $H^{\frac{1}{2}}(H)$ tale relazione si prolunga ad $H^{\frac{1}{2}}(H)$; e si ha:

$$\langle \psi_1, \psi_2' \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(H), H^{-\frac{1}{2}}(H)} + \langle \psi_1', \psi_2 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(H), H^{\frac{1}{2}}(H)} = 0 \qquad \forall\, \psi_1, \psi_2 \in H^{\frac{1}{2}}(H) . \tag{5.1}$$

Prendendo poi nella (5.1) $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ si ha:

$$\operatorname{Re} \langle \psi', \psi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(H), H^{\frac{1}{2}}(H)} = 0 \qquad \forall\, \psi \in H^{\frac{1}{2}}(H) . \tag{5.2}$$

Siano ora $\psi_1 \in H^{\frac{1}{2}}(H)$, $\psi_2 \in H^1(H)$. Si avrà, per quanto ora visto:

$$\left| \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi_1(t), \psi_2'(t))_H dt \right| = \left| \operatorname{Re} \langle \psi_1, \psi_2' \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(H), H^{-\frac{1}{2}}(H)} \right| =$$

$$\left| \operatorname{Re} \langle \psi_1, \psi_2' - \psi_1' \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(H), H^{-\frac{1}{2}}(H)} \right| = \left| \operatorname{Re} \langle \psi_1', \psi_2 - \right.$$

$$\left. \psi_1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(H), H^{\frac{1}{2}}(H)} \right| \leqslant \left| \langle \psi_1', \psi_2 - \psi_1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(H), H(H)} \right|$$

da cui:

$$(5.3)\qquad \left| \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi_1(t),\ \psi_2'(t))_H dt \right| \leqslant |\psi_1'|_{H^{-\frac{1}{2}}(H)} \cdot |\psi_2 - \psi_1|_{H^{\frac{1}{2}}(H)}$$

$$\forall\ \psi_1 \in H^{\frac{1}{2}}(H)\ , \qquad \forall\ \psi_2 \in H^1(H)\ .$$

Per le proprietà richiamate si confronti ad es. [4] dove lo spazio $H^\alpha(H)$ è indicato con $\mathfrak{D}^\alpha(H)$.

5.2. – Sia per ora $T_0 = -\infty$, $T_1 = +\infty$. Supporrò che si abbia:

(5.4) $\Phi(-\infty,\ +\infty;\ V(t))$ *è densa in*

$$L^2(-\infty,\ +\infty;\ V(t)) \cap H^{\frac{1}{2}}(H)\ ^{13})\ .$$

TEOREMA 5.1. – *Se* $T_0 = -\infty$, $T_1 = +\infty$ *la soluzione de problema* 1.1 *sotto le ipotesi* (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (1.7), (3.2), (3.3), (3.4), (5.4) *è unica e dipende con continuità dal dato* f *nel senso che si ha*:

$$(5.5)\qquad |u|_{L^2(-\infty,+\infty;V(t))} \leqslant \mathrm{C}\, |f|_{L^2(-\infty,+\infty;V'(t))}\ .$$

DIM. – Sia u soluzione del problema 1.1 con $T_0 = -\infty$, $T_1 = +\infty$, $u_0 = 0$. Essendo $u \in L^2(-\infty,\ +\infty;\ V(t))$ per ipotesi ed essendo $u \in H^{\frac{1}{2}}(H)$ per il teorema 3.2 si ha $u \in L^2(-\infty,\ +\infty;\ V(t)) \cap H^{\frac{1}{2}}(H)$. Per la (5.4) esisterà allora una successione $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\dots}$ di elementi di $\Phi(-\infty,\ +\infty;\ V(t))$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} |u - \varphi_n|_{L^2(-\infty,+\infty;V(t))\cap H^{\frac{1}{2}}(H)} = 0; \qquad \text{quindi:}$$

$$(5.6)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} |\varphi_n|u - {}_{L^2(-\infty,+\infty;V(t))} = 0\ , \\ \lim\limits_{n\to\infty} |u - \varphi_n|_{H^{\frac{1}{2}}(H)} = 0\ ; \\ \lim\limits_{n\to\infty} |\varphi_n|_{L^2(-\infty,+\infty;V(t))} = |u|_{L^2(-\infty,+\infty;V(t))}\ . \end{cases}$$

---

[13]) Spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare definito da

$$(u,\ v) = (u,\ v)_{L^2(-\infty,+\infty;V(t))} + (u,\ v)_{H^{\frac{1}{2}}(H)}$$

Per la (1.7), tenendo conto che u risolve il problema 1.1 con $u_0 = 0$ e che $\varphi_n \in \Phi(-\infty, +\infty; V(t))$ si avrà:

$$a \mid u \mid_{L^2(-\infty,+\infty;V(t))} = \int_{-\infty}^{+\infty} a \mid u(t) \mid_K^2 dt \leqslant \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} a(t, u, u) dt =$$

$$= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} a(t, u, u - \varphi_n) dt + \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} a(t, u, \varphi_n) dt =$$

$$= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} a(t, u, u - \varphi_n) dt + \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} (u, \varphi_n')_H dt +$$

$$+ \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f(t), \varphi_n(t) \rangle_{V'(t),V(t)} dt .$$

Per le (1.5), (5.3), (5.6) si avrà allora:

$$a \mid u \mid_{L^2(-\infty,+\infty;V(t))} \leqslant \left| \int_{-\infty}^{+\infty} a(t, u, u - \varphi_n) dt \right| +$$

$$+ \left| \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} (u, \varphi_n')_H dt \right| + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_n \rangle_{V'(t),V(t)} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \mid a(t, u, u - \varphi_n) \mid dt + \mid u' \mid_{H^{-\frac{1}{2}}(H)} \mid \varphi_n - u \mid_{H^{\frac{1}{2}}(H)} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \mid f \mid_{V'(t)} \cdot \mid \varphi_n \mid_{V(t)} dt \leqslant M \mid u \mid_{L^2(-\infty,+\infty;V(t))} \mid u -$$

$$\varphi_n \mid_{L^2(-\infty,+\infty;V(t))} + \mid u' \mid_{H^{-\frac{1}{2}}(H)} \mid \varphi_n - u \mid_{H^{\frac{1}{2}}(H)} +$$

$$+ \mid f \mid_{L^2(-\infty,+\infty;V'(t))} \mid \varphi_n \mid_{L^2(-\infty,+\infty;V(t))} \leqslant$$

$$\leqslant \mid f \mid_{L^2(-\infty,+\infty;V'(t))} \mid u \mid_{L^2(-\infty,+\infty;V(t))} + \varepsilon(n) ,$$

dove $\varepsilon(n)$ è infinitesimo con n. Tale relazione, valendo per ogni n, dà la (5.5); ne segue il teorema. c.v.d.

5.3. – Siano ora T_0, T_1 non entrambi infiniti. Supporrò verificata la seguente ipotesi (cfr. Osservazione 3.2).

$$(5.7)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{\textit{È possibile effettuare una scelta di } } V \text{ \textit{in} } \mathcal{V} \text{ \textit{tale che, posto}} \\ V^*(t) = \begin{cases} V(t) & \text{per} \quad t \in [T_0, T_1] \\ V & \text{per} \quad t \notin [T_0, T_1] \end{cases} \quad \text{si abbia:} \\ \Phi(-\infty, +\infty; V(t)) \text{ \textit{è densa in} } L^2(-\infty, +\infty; V^*(t)) \cap \\ \cap H^{\frac{1}{2}}(H) \end{array}\right.$$

(cfr. nota [13]) e supporrò d'ora in poi di aver effettuato una tale scelta di V e le corrispondenti identificazioni (3.3).

TEOREMA 5.2. – *Sotto le ipotesi* (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (1.7), (3.2), (3.3), (3.4), (5.7) *la soluzione del problema* 1.1 *è unica e dipende con continuità dai dati* f, u_0 *nel senso che si ha*:

$$(5.8)\qquad |u|_{L^2(T_0,T_1;V(t))} \leqslant \mathcal{C}(|f|_{L^2(T_0,T_1;V'(t))} + |u_0|)$$

$\mathcal{C}$ *indipendente da* T_0, T_1.

DIM. – Sia u una soluzione del problema 1.1. Pongo:

$$u^*(t) = \begin{cases} u(t) & \text{per} \quad t \in [T_0, T_1] \\ u_1^*(t) & \text{per} \quad t > T_1 \qquad (\text{se} \quad T_1 < +\infty) \\ \text{dove } u_1^*(t) \text{ è la funzione costruita nel teorema 4.2} \\ \text{in corrispondenza a } u_1 = u(T_1) \ [14] \\ u_0^*(t) & \text{per} \quad t < T_0 \qquad (\text{se} \quad T_0 > -\infty) \\ \text{dove } u_0^*(t) \text{ è la funzione costruita nel teorema 4.3} \\ \text{in corrispondenza a } u_0 = u(T_0) \ (= u_0 \text{ dato del pro-} \\ \text{blema).} \end{cases}$$

Posto poi:

$$a^*(t, u, v) = \begin{cases} a(t, u, v) & \text{per} \quad t \in [T_0, T_1] \\ (u, v)^* & \text{per} \quad t \notin [T_0, T_1] , \end{cases}$$

[14]) Per il teorema 3.2 (cfr. anche osservazione 3.2) è $u(T_1) \in H$.

si ha per ogni $\varphi \in \Phi(-\infty, +\infty; V^*(t))$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [a^*(t, u^*, \varphi) - (u^*, \varphi')_H] dt = \int_{-\infty}^{T_0} [(u^*, \varphi)_V - (u, \varphi')_H] dt +$$

$$+ \int_{T_0}^{T_1} [a(t, u, \varphi) - (u, \varphi')_H] dt + \int_{T_1}^{+\infty} [(u, \varphi)_V - (u_1^*, \varphi')_H] dt .$$

Per i teoremi 3.3, 4.2 e 4.3 si avrà allora, posto:

$$f^*(t) = \begin{cases} f(t) & \text{per} \quad t \in [T_0, T_1] \\ 0 & \text{per} \quad t > T_1 \qquad (\text{se} \quad T_1 < +\infty) \\ f_0(t) & \text{per} \quad t > T_0 \qquad (\text{se} \quad T_0 > -\infty) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [a^*(t, u^*(t), \varphi(t)) - (u^*(t), \varphi'(t))_H] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f^*(t), \varphi(t) \rangle_{V'(t), V(t)} dt$$

$$\forall \varphi \in \Phi(-\infty, +\infty; V^*(t)) .$$

Grazie alle (5.7) ed al fatto che a^* verifica ancora le (1.4), (1.5), (1.7) si può allora applicare il teorema 5.1; per le (5.5) e (4.6) si ha:

$$| u |^2_{L^2(T_0, T_1; V(t))} \leqslant | u^* |^2_{L^2(-\infty, +\infty; V^*(t))} \leqslant \mathfrak{C}^2 | f^* |^2_{L^2(-\infty, +\infty; V^*(t))} =$$

$$= \mathfrak{C}^2 (| f_0 |^2_{L^2(-\infty, +\infty; V')} + | f |^2_{L^2)T_0, T_1; V'(t))}) \leqslant$$

$$\leqslant \mathfrak{C}^2 (| f |_{L^2(T_0, T_1; V'(t))} + | u_0 |_H)^2$$

da cui segue la (5.8) e quindi il Teorema è dimostrato. c.v.d.

6. Un teorema di esistenza.

6.1. – Siano T_0, T_1 entrambi finiti. Un'ipotesi meno restrittiva della (1.7) atta ad assicurare l'esistenza di una soluzione per il problema 1.1 è la seguente:

$$(6.1)\quad \begin{cases} \textit{Esistono due costanti } \alpha,\ \lambda \textit{ non negative tali che per ogni} \\ v \in V(t) \textit{ ed ogni } t \in [T_0,\ T_1] \textit{ si abbia:} \\ \operatorname{Re} a(t,\ u,\ v) + \lambda \mid v \mid_H^2 \leqslant \alpha \mid v \mid_K^2 . \end{cases}$$

Basta infatti osservare (cfr. [4], [5]) che se la forma $a(t, u, v)$ verifica la (6.1) la forma $b(t, u, v) = a(t, u, v) + \lambda(u, v)_H$ verifica la (1.7); posto allora $u(t) = e^{\lambda t}w(t)$, $f(t) = e^{\lambda t}g(t)$ $u_0 = w_0 \cdot e^{\lambda T_0}$ la ricerca di una soluzione della (1.6) equivale alla ricerca di una soluzione della equazione:

$$(6.2)\quad \int_{T_0}^{T_1} [b(t,\ w(t),\ \psi(t)) - (w(t),\ \psi'(t))_H]dt = (w_0,\ \psi(T_0))_H +$$

$$+ \int_{T_1}^{T_0} < g(t),\ \psi(t) >_{V'(t),V(t)} dt \;\forall\, \psi \in \Phi(T_0,\ T_1;\ V(t)) .$$

Poichè $e^{-\lambda t}$ è un moltiplicatore in $L^2(T_0,\ T_1;\ V'(t))$ è $g(t) \in L^2(T_0,$ $T_1;\ V(t))$; allora il problema (6.2) è risolubile (perchè $b(t, u, v)$ verifica la (1.7)) e $u(t) = e^{\lambda t}w(t)$ è in $L^2(T_0,\ T_1;\ V(t))$ essendo $e^{\lambda t}$ moltiplicatore in $L^2(T_0,\ T_1;\ V(t))$; tale $u(t)$ risolve (come si verifica facilmente) la (1.6).

Se $T_1 = +\infty$ il ragionamento precedente non è applicabile: la soluzione $w(t)$ del problema (6.2) è ancora in $L^2(T_0,\ +\infty;\ V(t))$ ma la funzione $e^{\lambda t}$ non è un moltiplicatore in $L^2(T_0,\ +\infty;\ V(t))$ quindi $u(t) = e^{\lambda t}w(t)$ non apparterrà in generale a $L^2(T_0,\ +\infty;$ $V(t))$.

Se viceversa si suppone $T_0 = -\infty$ la funzione $g(t) = e^{-\lambda t}f(t)$ non sarà in generale in $L^2(-\infty,\ T_1;\ V'(t))$ quindi il problema 6.2 non sarà risolubile per f generica in $L^2(-\infty,\ T_1;\ V'(t))$ ma solo per le f tali che $e^{-\lambda t}f(t) \in L^2(-\infty,\ T_1;\ V'(t))$.

6.2. – È interessante notare che se la (1.7) implica la validità delle (5.8), (5.5) (ad es. se $V(t)$ è indipendente da t, ovvero se vale la (5.4) o la (5.7)) anche la (6.1) è sufficiente ad assicurare sia la validità di formule analoghe alla (5.5) e (5.8) sia l'esistenza di una soluzione per il problema 1.1; dimostrerò infatti il seguente teorema:

TEOREMA 6.1. – *Sotto le ipotesi* (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (3.2), (3.3), (3.4), (5.4), (6.1) *il problema* 1.1 *ammette una ed una sola soluzione che dipende con continuità dai dati* u_0, f *nel senso che*:

$$(6.3) \qquad | u |_{L^2(T_0,T_1;V(t))} \leqslant \mathcal{C}(| f |_{L^2(T_0,T_1;V'(t))} + | u_0 |_H)$$

$\mathcal{C}$ *indipendente da* T_0, T_1.

Sia infatti dapprima $T_0 > -\infty$, $T_1 = +\infty$. Con le notazioni introdotte si risolva il problema:

$$(6.4) \qquad \int_{T_0}^{+\infty} [b(t, u_1, \psi) - (u_1, \psi')_H] dt = (u_0, \psi(T_0))_H$$

$$\forall\ \psi \in \Phi(T_0, +\infty; V(t)) .$$

Per ogni $T_1 < +\infty$ si avrà ovviamente:

$$(6.5) \qquad \int_{T_0}^{T_1} [b(t, u_1, \varphi) - (u_1, \varphi')_H] dt = (u_0, \varphi(T_0))_H$$

$$\forall\ \psi \in \Phi(T_0, T_1; V(t))$$

e quindi, per definizione di $b(t, u, v)$:

$$(6.6) \qquad \int_{T_0}^{T_1} [a(t, u_1, \varphi) - (u_1, \varphi')_H] dt = (u_0, \varphi(T_0))_H -$$

$$- \lambda \int_{T_0}^{T_1} (u_1, \varphi(t))_H dt$$

$$\forall\ \varphi \in \Phi(T_0, T_1; V(t)) .$$

Si osservi ora che, se $f \in L^2(T_0, +\infty; V'(t))$ si ha, per ogni $\psi \in L^2(T_0, +\infty; V(t))$:

$$\left| \int_{T_0}^{+\infty} \langle [e^{-\lambda t} f(t), \psi(t) \rangle_{V'(t),V(t)} - (\lambda e^{-\lambda t} u_1(t), \psi(t))_H] dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant C \, | \psi |_{L^2(T_0, +\infty; V(t))}$$

quindi esiste (cfr. teorema 2.1) $g_1(t) \in L^2(T_0, +\infty; V'(t))$ tale che:

$$\int_{T_0}^{+\infty} \langle g_1(t), \psi(t) \rangle_{V'(t),V(t)} \, dt = \int_{T_0}^{+\infty} [\langle e^{-\lambda t} f(t), \psi(t) \rangle_{V'(t),V(t)} -$$

$$- (\lambda e^{-\lambda t} u_1(t), \psi(t))_H] \, dt .$$

Sia $w_2(t) \in L^2(T_0, +\infty; V(t))$ la soluzione del problema:

(6.7)
$$\int_{T_0}^{+\infty} [b(t, w_2, \psi) - (w_2, \psi')_H] \, dt =$$

$$= \int_{T_0}^{+\infty} \langle g_1(t), \psi(t) \rangle_{V'(t),V(t)} \, dt \qquad \forall \varphi \in \Phi(T_0, +\infty; V(t)) .$$

e posto $\varphi(t) = e^{-\lambda t} \psi(t)$, $u_2(t) = e^{\lambda t} w_2(t)$ si avrà:

(6.9)
$$\int_{T_0}^{T_1} [a(t, u_2, \varphi) - (u_2, \varphi')_H] dt =$$

$$= \int_{T_0}^{T_1} [\langle f(t), \varphi(t) \rangle_{V'(t),V(t)} - \lambda (u_1(t), \varphi(t))_H] \, dt$$

$$\forall \varphi \in \Phi(T_0, T_1; V(t)) .$$

Posto infine $u(t) = u_2(t) + u_1(t)$ si avrà, dalle (6.6) e (6.9):

$$\text{(6.10)} \qquad \int_{T_0}^{T_1} [a(t, u, \varphi) - (u, \varphi')_H] dt = (u_0, \varphi(0))_H +$$

$$+ \int_{T_0}^{T_1} \langle f(t), \varphi(t) \rangle_{V'(t), V(t)} dt \qquad \varphi \in \Phi(T_0, T_1; V(t)) .$$

Dalle (6.5), (5.8) si ha:

$$\text{(6.11)} \qquad | u_1 |_{L^2(T_0, T_1; V(t))} \leqslant \mathcal{C} | u_0 |_H$$

$\mathcal{C}$ indipendente da T_0, T_1.

Dalle (6.8), (5.8) si ha:

$$\text{(6.12)} \qquad | w_2 |_{L^2(T_0, T_1; V(t))} \leqslant \mathcal{C} | g |_{L^2(T_0, T_1; V'(t))}$$

$\mathcal{C}$ indipendente da T_0.

Si ha cioè per ogni T_1

$$\int_{T_0}^{T_1} | w_2(t) |_K^2 dt \leqslant \mathcal{C}^2 \int_{T_0}^{T_1} | g_1(t) |_{V'(t)}^2 dt;$$

da cui [15] $| w_2(t) |_K^2 \leqslant \mathcal{C}^2 | g_1(t) |_{V'(t)}$ quasi ovunque in $[T_0, +\infty]$.

Moltiplicando per $e^{2\lambda t}$ e integrando

$$\int_{T_0}^{T_1} | u_2(t) |_K^2 dt \leqslant \mathcal{C}^2 \int_{T_0}^{T_1} | e^{\lambda t} g_1(t) |_{V'(t)}^2 dt \leqslant \mathcal{C}^2 \int_{T_0}^{T_1} | f(t) |_{V'(t)}^2 dt +$$

$$+ \mathcal{C}^2 \int_{T_0}^{T_1} | \lambda u_1(t) |_H^2 dt ;$$

---

[15]) Il ragionamento infatti (come si verifica facilmente) può ripetersi su un qualunque intervallo di integrazione $[t_1, t_2]$ con $T_0 \leqslant t_1 < < t_2 < + \infty$.

e per la (6.12):

$$(6.13) \qquad |\, u_2(t)\, |_{L^2(T_0,T_1;V(t))} \leqslant \mathcal{C}(\, |\, f\, |_{L^2(T_0,T_1;V'(t))} + |\, u_0\, |_H)$$

$\mathcal{C}$ indipendente da T_0, T_1 (indico con la stessa lettera $\mathcal{C}$ costanti diverse tra loro).

Dalle (6.11), (6.13) si ha infine:

$$(6.14) \qquad |\, u\, |_{L^2(T_0,T_1;V(t))} \leqslant \mathcal{C}(\, |\, f\, |_{L^2(T_0,T_1;V'(t))} + |\, u_0\, |_H)$$

$\mathcal{C}$ indipendente da T_0, T_1 da cui ovviamente:

$$(6.15) \qquad u \in L^2(T_0,\, +\infty;\ V(t))\,; \qquad |\, u\, |_{L^2(T_0,+\infty;V(t))} \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{C}(\, |\, f\, |_{L^2(T_0,+\infty;V'(t))} + |\, u_0\, |_H)$$

$\mathcal{C}$ indipendente da T_0.

Poichè la varietà di $\Phi(T_0,\, +\infty;\ V(t))$ composta dalle φ a supporto compatto è densa in $\Phi(T_0,\, +\infty;\ V(t))$ [16]) la (6.10), per la (1.5) e la ovvia continuità dei vari addendi della (6.10) rispetto alla funzione $\varphi \in \Phi(T_0,\, +\infty;\ V(t))$, assicura la validità della (6.10) stessa con $T_1 = +\infty$. Si è così trovata una soluzione del problema 1.1 nel caso $T_0 > -\infty$ sotto l'ipotesi (6.1) invece della (1.7). La (6.15) dà poi immediatamente l'unicità di tale soluzione; si è così ottenuto il teorema 6.1 nel caso $T_0 > -\infty$.

6.3. - Sia ora $T_0 = -\infty$, $f \in L^2(-\infty,\ T_1;\ V'(t))$; pongo:

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t) & \text{per} \quad t \geqslant -n \\ 0 & \text{per} \quad t < -n \end{cases} \qquad (n \text{ intero } > 0)\,.$$

Per quanto ora visto esiste una ed una sola soluzione u_n di

$$\int_{-n}^{T_1} [a(t,\ u_n,\ \varphi) - (u_n,\ \varphi')_H]dt = \int_{-n}^{T_1} \langle\, f_n,\ \varphi\, \rangle_{V'(t),V(t)}\, dt$$

$$\forall\ \varphi \in \Phi(-n,\ T_1;\ V(t))\,.$$

---

[16]) Munita del prodotto scalare $(\varphi, \psi)_\Phi = (\varphi, \psi)_{L^2(V(t))} + (\varphi', \psi)_{L^2(H)}$.

Posto:

$$u_n^*(t) = \begin{cases} u_n(t) & \text{per} \quad t \geqslant -n \\ 0 & \text{per} \quad t < -n \end{cases}$$

si ha ovviamente:

$$(6.16) \qquad \int_{-\infty}^{T_1} [a(t, u_n^*, \varphi) - (u_n^*, \varphi')_H] dt = \int_{-\infty}^{T_1} \langle f_n, \varphi \rangle_{V'(t), V(t)} \, dt$$

$$\forall \; \varphi \in \Phi(-\infty, \; T_1; V(t)) \; .$$

Per la linearità dell'equazione si ha, per ogni $p > 0$:

$$\int_{-\infty}^{T_1} [a(t, u_{n+p}^* - u_n^*, \varphi) - (u_{n+p}^* - u_n^*, \varphi')_H] \, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{T_1} \langle f_{n+p} - f_n, \varphi \rangle_{V'(t), V(t)} \, dt \qquad \forall \; \varphi \in \Phi(-\infty, \; T_1; \; V(t))$$

da cui si ha che $(u_{n+p} - u_n) \big|_{[-n-p, T_1]}$ risolve, su tale intervallo, un problema del tipo 1.1; per la (6.14) (o la (6.15)) si avrà allora:

$$| u_{n+p}^* - u_n^* |_{L^2(-\infty, T_1; V(t))} = | (u_{n+p}^* - u_n^*) \big|_{[-n-p, T_1]} |_{L^2(-n-p, T_1; V(t))} \leqslant$$

$$\leqslant | f_{n+p} - f_n |_{L^2(-\infty, T_1; V'(t))}$$

cioè $\{u_n^*\}_{n=1, 2, \dots}$ è una successione di Cauchy in $L^2(-\infty, \; T_1; V(t))$; detto u il suo limite si ha ovviamente:

$$| u |_{L^2(-\infty, T_1; V'(t))} \leqslant C \, | f |_{L^2(-\infty, T_1; V'(t))} \; .$$

Passando al limite per $n \to \infty$ nella (6.16) (cfr. le considerazioni già fatte nel caso $T_0 > -\infty$) si ha che u è una soluzione del problema 1.1; la (6.3) che è ormai dimostrata dà allora l'unicità di u; ed il teorema 6.1 è così completamente dimostrato.

7. Considerazioni finali.

7.1. – I teoremi di regolarità dati nel N. 3 sono validi, come si è visto, sotto le ipotesi aggiuntive, rispetto alle ipotesi del teorema di esistenza, (3.2), (3.3), (3.4).

Per quanto riguarda l'ipotesi (3.2) si osservi che essa non è implicata dalle (1.2), (1.3); se infatti si assume:

$$K = H^1(-\infty, +\infty)\ ; \qquad H = L^2(-\infty, +\infty)\ ;$$
$$V(t) = \{v(x) \in H^1(-\infty, +\infty)\ ; \quad v(t) = 0\}$$

si ha $\bigcap\limits_{t\in[-\infty,+\infty]} V(t) = \{0_K\}$ quindi la (3.2) non è soddisfatta; mentre le (1.2) e (1.3) sono ovviamente verificate (si osservi che la funzione $t \to P_{V(t)}\, k$ è addirittura continua).

Tuttavia nell'applicazione della teoria astratta a molti esempi concreti le (3.2), (3.3), (3.4) sono automaticamente verificate. Ad esempio per la trattazione del problema (2) esposto nell'introduzione si pone, con le notazioni ivi introdotte:

$$H = L^2(\Omega)\ ; \quad K = K^1(\Omega)\ ; \quad V(t) = \{v \in H^1(\Omega)\ ; \quad \gamma v\,|_{\Gamma(t)} = 0\}\ .$$

La forma $a(t, u, v)$ associata al problema (2) è data da:

$$a(t, u, v) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}\, dx$$

(che non verifica la (1.7) ma verifica le (1.4), (1.5), e la (6.1) con $\lambda = 1$).

Si può allora prendere $V = H_0^1(\Omega)$ e la (3.2) è automaticamente verificata; la (3.3) corrisponde allora alla identificazione di $L^2(\Omega)$ ad una varietà densa di $H^{-1}(\Omega)$ ($= V'$) che è più usuale ed esempio della identificazione (a priori lecita) di $L^2(\Omega)$ ad una varietà densa di $H^{-1}_{\bar{\Omega}}(\mathfrak{R}^n)$ ($= H^1(\Omega)'$, cfr. [8]); previe le identificazioni (3.3) si ha allora che l'operatore $A(t)$ associato alla forma $a(t, u, v)$ è precisamente l'operatore $-\Delta_x$ (Δ_x = laplaciano nelle variabili $x \in \Omega$).

Si può inoltre dimostrare che (cfr. [1]) sempre grazie alle identificazioni (3.3) si ha:

$$[H^1(\Omega)\ ,\ H^{-1}(\Omega)]_{\frac{1}{2}} = L^2(\Omega)$$

il che assicura la validità della (3.4).

7.2. – L'ipotesi (5.4) è abbastanza naturale in una simile impostazione del problema. Nell'applicazione al problema concreto di tipo (2) la (5.4), grazie ad opportuni teoremi di tracce, si può semplificare un po'; e si possono dare delle condizioni sufficienti molto generali sotto le quali la (5.4) è verificata (cfr. [1] per i risultati precisi).

Per quanto riguarda l'ipotesi (5.7) essa può essere attenuata dalla seguente: sia $\{V^*(t)\}_{t\in[-\infty,+\infty]}$ una famiglia che goda delle proprietà:

(7.1) *$V^*(t)$ è per ogni $t \in [-\infty, +\infty]$ sottospazio chiuso di K denso in H.*

(7.2) $$V^*(t) = V(t) \quad \text{per} \quad t \in [T_0, T_1]$$

(7,3) *La classe* $\mathcal{V}^*$ (corrispondente alla classe $\mathcal{V}$ definita nella osservazione 3.2, relativa alla famiglia $\{V^*(t)\}$) *non è vuota.*

(7.4) *$\Phi(-\infty, +\infty; V^*(t))$ è densa in $L^2(-\infty, +\infty; V^*(t)) \cap \cap H^{\frac{1}{2}}(H)$.*

Se esiste una tale famiglia sostituendo le ipotesi (7.1), (7.2), (7.3), (7.4) alla (5.7) nel teorema 5.2 si può ancora ottenere un teorema di unicità; la dipendenza continua dai dati ed il teorema 6.1 si possono però ottenere (con lo stesso metodo dimostrativo) solo nel caso in cui $u_0 = 0$.

7.3. – Nelle applicazioni ai casi concreti la (5.7) è largamente soddisfatta in casi molto generali. Ad esempio nell'applicazione al problema (2) dimostrerò che la (5.7) è sicuramente verificata sotto la seguente condizione di regolarità sulla variabilità di $\Gamma(t)$ (mi riferisco per comodità di linguaggio al caso $n = 2$):

(7.5) *La frontiera di Σ_1 su Σ è composta da due curve continue che si intersecano un numero finito di volte e che sono incontrate al più in un punto dai piani perpendicolari all'asse t.*

Poichè sotto l'ipotesi (7.1) è anche automaticamente verificata la (1.3) tutta la teoria esposta è applicabile; *si otterrà così per il problema* (2) *un teorema di unicità e dipendenza continua dai dati nella stessa classe in cui esiste la soluzione.*

BIBLIOGRAFIA

[1] Baiocchi C.: *Sul problema misto per l'equazione parabolica del tipo del calore* (di prossima pubblicazione).

[2] Hille E., Phillips R. S.: *Functional Analysis and Semi-groups*, Amer. Math. Soc. Coll. Pubbl. n. 31 (1957).

[3] Lions J. L.: *Espaces intermédiaires entre espaces de Hilbert et applications*. Bull. Math. R.P.R. Bucarest 2 (1958), p. 419-432.

[4] Lions J. L.: *Equations différentielles opérationnelles*, Springer, b. 111 (1961).

[5] Lions J. L.: *Equations différentielles opérationnelles dans les espaces de Hilbert*, Corso C.I.M.E. 1963, Ediz. Cremonese, Roma.

[6] Lions J.L., Peetre J.: *Sur une classe d'espaces d'interpolations* I.H.E.S. n. 19 (1963).

[7] Schwartz L.: *Théorie des distributions à valeurs vectorielles, I, II.* Annales de l'Insitut Fourier VIII, p. 1-139 e VIII p. 1-209.

[8] Magenes E., Stampacchia G.: *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa XII (1958), 247-358.