RENDICONTI del SEMINARIO MATEMATICO della UNIVERSITÀ DI PADOVA

JEAN PANVINI

Su certi omomorfismi di tipo esponenziale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 35, nº 2 (1965), p. 371-379

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_2_371_0>

SU CERTI OMOMORFISMI DI TIPO ESPONENZIALE

Nota *) *di* JEAN PANVINI (*a Pisa*) **)

1. – Nella presente nota ci poniamo il problema di immergere un anello commutativo (con identità) A_0 in un sopranello A, nel quale riesca definitiva una « funzione di tipo esponenziale », intesa come un omomorfismo iniettivo σ del gruppo additivo di A nel semigruppo moltiplicativo di A, tale che $\sigma(0) = 1$.

Nel n. 2 indichiamo un procedimento mediante il quale si costruiscono sempre un sopranello A di A_0 ed un omomorfismo σ verificanti le condizioni anzi dette.

Si mostra quindi, nel n. 3, che l'anello A precedentemente costruito verifica anche la seguente proprietà:

I. – Sia D un sopranello di A_0 dotato di un omomorfismo di tipo esponenziale τ (non necessariamente iniettivo), tale che ogni elemento di D sia ottenibile da A_0 con le operazioni razionali intere e l'operazione τ. Allora D è una immagine omomorfa di A.

Si osserva infine, nel n. 4, che se A_0 è un corpo e C è un sopracorpo di A_0 dotato di una funzione esponenziale τ per cui valgano

---

*) Pervenuto in redazione il 13 aprile 1965.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università, Pisa.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del C.N.R.

L'Autore ringrazia il Prof. P. SALMON per avergli dato utili consigli nella redazione del presente lavoro.

le ipotesi della proprieta I, la caratteristica di A_0 è necessariamente 0, se non è $\tau(u) = 1$ per ogni $n \in C$.

2. – Sia A_0 un anello commutativo con identità. Ci proponiamo di costruire il sopranello A di A_0 con le proprietà enunciate nel n. 1, mediante una opportuna successione di anelli A_n, ciascuno immerso nel seguente.

Cominciamo coll'esporre la costruzione dell'anello A_1 e delle sue proprietà essenziali.

Sia $\{X_a\}_{a\in} A_0$ un sistema di indeterminate indicate in A_0; in particolare sia X_0 l'indeterminata indiciata nell'identità 0 del gruppo additivo di A_0. Sia $B_1 = A_0[\dots X_a \dots]$ l'anello ottenuto da A_0 per aggiunzione di tale sistema di indeterminate (cfr. I, Ch. I, § 18, p. 40). Sia inoltre $\mathfrak{J}_1$ l'ideale di B_1 generato da $X_0 - 1$ e da tutti gli elementi del tipo $X_a - X_b X_b$, dove è $a = b + c$.

Posto $A_1 = B_1 / \mathfrak{J}_1$, indichiamo con φ_1 l'omomorfismo naturale di B_1 su A_1 e poniamo $x_a = \varphi_1(X_a)$, ove $a \in A_0$. L'anello A_1 gode delle seguenti proprietà.

I_1. – *A_0 si immerse in A_1.*

DIMOSTRAZIONE: Si consideri l'isomorfismo τ_1 che inietta A_0 in B_1 e, quindi, l'omomorfismo naturale φ_1 di B_1 su A_1; il prodotto $\eta_1 = \tau_1 \circ \varphi_1$ è un omomorfismo di A_0 in A_1 e l'asserto è provato se si mostra che risulta $\operatorname{Ker} \varphi_1 \cap A_0 = 0$ (identifichiamo qui A_0 coll'immagine di A_0 in B_1 mediante τ_1).

Si consideri a tal fine l'omomorfismo ψ_1 di B_1 su A_0 definito da $\psi_1(a) = a (a \in A_0)$ e $\psi_1(X_a) = 1$; si ha $\operatorname{Ker} \varphi_1 \subset \operatorname{Ker} \psi_1$, $\operatorname{Ker} \psi_1 \cap A_0 = 0$, donde $\operatorname{Ker} \varphi_1 \cap A_0 = 0$.

Nel seguito identificheremo A_0 con la sua immagine in A_1 mediante η_1 (cfr. al riguardo [1], Ch. I, § 13).

II_1. – *Esiste un omomorfismo Ω_1 di A_1 su A_0, la cui restrizione ad A_0 è l'identità.*

DIMOSTRAZIONE: L'inclusione $\operatorname{Ker} \varphi_1 \subset \operatorname{Ker} \psi_1$, osservata poc'anzi, assicura infatti che l'omomorfismo ψ_1 si fattorizza nel prodotto $\Omega_1 \circ \varphi_1$, dove Ω_1; $A_1 \to A_0$ è l'omomorfismo così definito: $\Omega_1(a) = a$ se $a \in A_0$; $\Omega_1(x_a) = 1$.

Di qui l'asserto.

III$_1$. – *Esiste un omomorfismo σ_1 del gruppo additivo di A_0 nel semigruppo moltiplicativo di A_1.*

DIMOSTRAZIONE: Per $a \in A_0$, si ponga $\sigma_1(a) = x_a (= \varphi_1(X_a))$; si ha $x_{a+b} = x_a x_b$, $x_0 = 1$.

IV$_1$. – *Se è $\sigma_1(u) = 1$, si ha $u = 0$; σ_1 è cioè un omomorfismo iniettivo.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\sigma_1(u) = x_u = 1$. Tenuto conto che è $A_1 = B_1/\mathfrak{J}_1$ e tenuti presenti i generatori di $\mathfrak{J}_1$, si trae la seguente relazione in B_1:

(1) $$f(X_0 - 1) + g_1(X_{a_1} - X_{b_1}X_{c_1}) + \dots + \\ + g_r(X_{a_r} - X_{b_r}X_{c_r}) = X_u - 1,$$

essendo f, $g_1, \dots, g_r$ polinomi di B_1 e a_i, b_i, c_i opportuni elementi di A_0 soddisfacenti le relazioni $a_i = b_i + c_i$.

Sia $\{U_a\}_{a \in A_0}$ un altro sistema di indeterminate indiciate in A_0 e si pensi B_1 immerso nell'anello $C_1 = B_1[\dots U_a \dots]$ ottenuto per aggiunzione a B_1 delle indeterminate U_a.

Resta individuata la derivazione D di B_1 in C_1, tale che $DX_a = U_a$, $D_a = 0$ se $a \in A_0$ (vedere l'osservazione seguente). Si applichi ai due membri di (1) dapprima la D e quindi l'omomorfismo di C in A_0 che invia ogni X_a in 1 e ogni U_a in a; si ottiene subito $u = 0$.

OSSERVAZIONE: Nella dimostrazione di IV$_1$ si è tenuto conto del seguente lemma sulle derivazioni (per le derivazioni cfr. [1], Ch. II, § 17).

LEMMA: *Siano R un sottoanello di S e D una derivazione di R in S. Siano $X_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ delle indeterminate, T un sopranello di $S[X_1, \dots, X_n]$ ed $s_1, \dots, s_n$ elementi di S. Allora esiste una (e una sola) derivazione D^* di $R]X_1, \dots, X_n]$ in T che estende D e tale che $D^*X_i = s_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.*

DIM.: Si vede subito che possiamo limitarci a dimostrare l'asserto per $n = 1$, procedendo poi per induzione su n.

Definiamo la seguente applicazione D^* di $R[X]$ in T:

$$(2) \quad D^*(\sum_{i=0}^{m} a_i X^i) = \sum_i ((Da_i)X^i + s i a_i X^{i-1}) \qquad \text{dove} \qquad s \in S.$$

È chiaro che D^* estende D e che $D^*(X) = s$; è inoltre evidente che D^* è additiva. Per provare che D^* è una derivazione, basta verificare che se $f,\ g \in R[X]$ si ha

$$D^*(fg) = fD^*g + gD^*f.$$

Posto

$$f = \sum_i a_i X^i, \qquad g = \sum_j b_j X^j,$$

si ha:

$$D^*(fg) = D^*(\sum_{i,j} a_i b_j X^{i+j}) = \sum_{i,j} D(a_i b_j) X^{i+j} + s(i + j) a_i b_j X^{i+j-1} =$$

$$= \sum_{i,j}](a_i D b_j X^{i+j} + S_j b_j x^{i+j-1}) + (b_j D a_j X^{i+j} + S i b_i X^{i+j-1})] =$$

$$= (\sum_i a_i X^i) D^*(\sum_j b_i X^j) + (\sum_j b_j X^j) D^*(\sum a_i X^i) =$$

$$= fD^*g + gD^*f.$$

Si verifica inoltre, per induzione sull'intero m che compare in (2), che D^* è la sola derivazione con la proprietà richiesta.

Esponiamo ora nei dettagli la costruzione dell'anello A_2 (della successione $\{A_n\}$): nel seguito sarà manifesto come si costruisce A_i con $i > 2$.

Sia $\{Y_\alpha\}$ un sistema di indeterminate indiciate in A_1 e sia $B_2 = A_1[\ldots Y_\alpha \ldots]$ l'anello ottenuto aggiungendo ad A_1 le indeterminate Y_α.

Sia $\mathfrak{J}_2$ l'ideale generato dagli elementi del tipo $Y_\alpha - Y_\beta Y_\gamma$ dove è $\alpha = \beta + \gamma$ e dagli elementi $x_a - Y_a$ con $a \in A_0$.

Posto $A_2 = B_2/\mathfrak{J}_2$, sia φ_2: $B_2 \to A_2$ l'omomorfismo naturale; poniamo $y_\alpha = \varphi_2(Y_\alpha)$.

L'anello A_2 gode delle seguenti proprietà.

I_2. – *A_1 si immerge in A_2.*

DIMOSTRAZIONE: Si consideri a tal fine l'omomorfismo ψ_2 di B_2 su A_1 definito da $\psi_2(\alpha) = \alpha$ per $\alpha \in A_1$; $\psi_2(Y\alpha) = x_{\Omega_1(\alpha)}$ (Ω_1 è l'omomorfismo definito in II_1); poichè $\operatorname{Ker}\varphi_2 \subset \operatorname{Ker}\psi_2$ e $\operatorname{Ker}\psi_2 \cap A_1 = 0$ si ha $\operatorname{Ker}\varphi_2 \cap A_1 = 0$.

Identificheremo nel seguito A_1 con la sua immersione in A_2 ora provata.

II_2. – *Esiste un omomorfismo Ω_2 di A_2 su A_1 la cui restrizione ad A_1 è l'identità.*

DIMOSTRAZIONE: Si ha infatti la fattorizzazione $\psi_2 = \Omega_2 \circ \varphi_2$ ove Ω_2 è così definito: $\Omega_2(\alpha) = \alpha$, $\Omega_2(y_\alpha) = x_{\Omega_1(\alpha)}$, per $\alpha \in A_1$. Ne segue l'asserto.

III_2. – *Esiste un omomorfismo σ_2 del gruppo additivo di A_1 nel semigruppo moltiplicativo di A_2; inoltre σ_2 prolunga σ_1.*

DIMOSTRAZIONE: Per $\alpha \in A_1$ si ponga $\sigma_2(\alpha) = y_\alpha$; si ha

$$\sigma_2(\alpha + \beta) = y_{\alpha+\beta} = y_\alpha \cdot y_\beta = \sigma_2(\alpha) \cdot \sigma_2(\beta).$$

Sia ora $a \in A_0$. Si ha: $\sigma_2(a) = y_a = x_a = \sigma_1(a)$ cioè σ_2 estende σ_1.

IV_2. – *Se è $\sigma_2(u) = 1$ si ha $u = 0$; cioè σ_2 è un omomorfismo iniettivo.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\sigma_2(u) = 1$. Tenendo presente l'isomorfismo $A_2 \to B_2/\mathfrak{I}_2$ e i generatori dell'ideale $\mathfrak{I}_2$, si trae la seguente relazione in B_2:

$$Y_u - 1 = \sum f_i(Y_{\alpha_i} - y_{\beta_i} Y_{\gamma_i}) + \sum g(Y_{a_j} - x_{a_j}).$$

dove

$$\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i \in A_1,\ a_j \in A_0,\ \alpha_i = \beta_i + \gamma_i,\ f_i,\ g_j \in B_2.$$

Osserviamo ora che posto $C = A_0[\dots X_a \dots, \dots Y_\alpha \dots]$ con $a \in A_0$ e $\alpha \in A_1$, e $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1 C$, si ha manifestamente $B_2 = C/I$.

Da quanto precede si trae allora la seguente relazione in C:

$$(1)\qquad Y_u - 1 = \sum f_i'(Y_{\alpha_i} - Y_{\beta_i} Y_{\gamma_i}) + \sum g_j'(Y_{a_j} - X_{a_j}) + \\ + \sum f_k''(X_{b_k} - X_{c_k} X_{d_k}) + g''(X_0 - 1)$$

dove

$$f_i',\ g_j',\ f_k'',\ g'' \in C; \qquad \alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i \in A_1;$$

$$\alpha_i = \beta_i + \gamma_i; \quad b_k = c_k + d_k; \quad a_j,\ b_k,\ c_k,\ d_k \in A_0.$$

Se $\{U_a\}$ e $\{V_\alpha\}$ sono altri due sistemi di indeterminate, indiciate rispettivamente in A_0 e in A_1, si consideri l'anello $C_1 = C[\dots U_a \dots, \dots V_\alpha \dots]$ nel quale C si immerge.

Resta allora individuata una derivazione D di C in C_1 tale che $DX_a = U_a$, $DY_\alpha = V_\alpha$, $Da = 0$ per $a \in A_0$.

Si applichi dapprima la D ai due membri della relazione (1), quindi si applichi l'omomorfismo che invia ogni indeterminata X_a e Y_α in 1, ed ogni U_i, V_j nel proprio indice. Si ottiene immediatamente $u = 0$.

Lo stesso procedimento con cui abbiamo costruito A_2 a partire da A_1, permette di costruire, per induzione su i, la successione di anelli A_i, ognuno dei quali gode delle seguenti proprietà:

I$_i$. – *A_{i-1} si immerge in A_i.*

II$_i$. – *Esiste un omomorfismo Ω_i di A_i su A_{i-1} la cui restrizione ad A_{i-1} è l'identità.*

III$_i$. – *Esiste un omomorfismo σ_i del gruppo additivo di A_{i-1} nel semigruppo moltiplicativo di A_i; inoltre σ_i estende σ_{i-1}.*

IV$_i$. – *$\sigma_i(u) = 1$ implica $u = 0$, cioè σ_i è iniettivo.*

Indichiamo adesso con η_i l'immersione (naturale) di A_i in A_{i+1} e poniamo

$$\varrho_{ij} = \eta_j \circ \eta_{j-1} \circ \dots \circ \eta_i \quad \text{se} \quad j > i$$

ϱ_{ii} = Identità (automorfismo identico).

Possiamo allora considerare il limite diretto della famiglia di anelli A_i ed omomorfismi iniettivi ϱ_{ij}: $A_i \to A_j$.

Sia $A = \varinjlim A_i$.

Se allora identifichiamo ogni anello A_i colla sua immagine nel limite diretto A, si ha anche $A = UA_i$.

Da quanto precede risulta l'asserto che ci eravamo proposti di dimorare al principio del n. 1; si ha cioè il seguente

TEOREMA 1: *Sia A_0 un anello commutativo con identità. Esistono un sopranello A di A_0 ed un omomorfismo iniettivo σ del gruppo additivo di A nel suo semigruppo moltiplicativo, tali che ogni elemento di A è raggiungibile a partire da A_0 con le operazioni razionali intere e l'operazione σ.*

3. – Vogliamo ora dimostrare la proprietà I enunciata nel n. 1.

Sia D un sopranello di A_0 che verifichi le ipotesi enunciate in I e designano con D_1 l'anello $A_0[\tau(V)]$ ottenuto aggiungendo ad A_0 tutti i $\tau(V)$ con V in A_0; e, in generale con $D_i (i > 1)$ l'anello $D_{i-1}[\tau(V)]$ dove V descrive D_{i-1}. Si ha manifestamente $D = \cup D_i$.

Indichiamo ancora con σ la funzione esponenziale di A e conserviamo le notazioni introdotte in 2.

Vogliamo provare il seguente

TEOREMA 2: *Esiste un omomorfismo $\delta: A \to D$, tale che se $\delta(a) = d$, si ha $\delta(\sigma(a)) = \tau(d)$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia h_1 l'omomorfismo di B_1 su D_1 definito da: $h_1(a) = a$ se $a \in A_0$, $h_1(X_a) = \tau(a)$; si ha subito $\ker h_1 \supset \supset \ker \varphi_1$. Ne consegue un omomorfismo δ_1 di A_1 su D_1, tale che, se invia a_1 in d_1, invia $\sigma(a_1)$ in $\tau(d_1)$.

Sia ora h_2 l'omomorfismo di B_2 su D_2 definito da:

$$h_2(u) = \delta_1(u) \quad \text{per} \quad u \in A_1, \ h_2(Y_u) = \tau(\delta_1(u)).$$

Si ha: $\ker h_2 \supset \ker \varphi_2$. Ne consegue un omomorfismo δ_2 di A_2 su D_2, che estende δ_1 (tenere presente che $\ker \varphi_2 \cap A_1 = 0$), e se invia a_2 in d_2, invia $\sigma(a_2)$ in $\tau(d_2)$.

Costruito l'omomorfismo $\delta_i : A_1 \to D_i$, si costruisce l'omomorfismo $\delta_{i+1} : A_{i+1} \to D_{i+1}$ con le proprietà anzidette.

Ne segue senz'altro l'asserto per passaggio al limite diretto, ponendo $\delta = \underset{\to}{\lim}\, \delta_i$.

4. – Terminiamo con qualche osservazione nel caso che A_0 sia un corpo.

Tra i sopranelli di A_0 che verificano le ipotesi della proprietà I di cui al n. 1, vi può essere qualche volta un corpo, in dipendenza di speciali proprietà del corpo A_0 (esempio: $A_0 =$ corpo reale); è però necessario, perchè ciò avvenga, che A_0 abbia caratteristica zero, altrimenti la funzione esponenziale è banale.

Quest'ultima asserzione risulterà dal seguente

TEOREMA 3: *Se A_0 è un corpo di caratteristica p e C è un sopracorpo di A_0 per cui valgano le ipotesi della proprietà I del n.* 1, *la funzione esponenziale τ di C è banale, cioè è $\tau(u) = 1$ per ogni $u \in C$.*

Indichiamo sempre con A il sopranello di A_0 costruito al n. 2. Ogni $u \in A$ può rappresentarsi nella forma $a_0 + a_1\sigma(u_1) + \dots + a_k\sigma(u_k)$ dove, se r è il minimo indice tale che $a \in A_r$, gli a_i e gli u_i appartengono ad A_{r-1}; ne consegue, applicando più volte tale considerazione, che a può rappresentarsi nella forma

$$a = a_0 + a_1\sigma(u_1) + \dots + a_k\sigma(u_k)$$

dove ogni a_1 è in A_0. Tenendo conto che $\sigma(u) = \sigma(pu) = \sigma(0) = 1$, ne discende: $a^p = a_0^p + a_1^p + \dots + a^p \in A_0$.

Quindi: a è invertibile in A oppure $a_k^c = 0$ (A_0 essendo un corpo); ne segue che A ha un solo ideale massimale $\mathfrak{J}$: quello costituito dagli elementi a tali che sia $a^p = 0$.

Si consideri l'omomorfismo δ di A su C definito nel n. 3 (si ricordi che se $\delta(a) = c$, si ha $\delta(\sigma(a)) = \tau(c)$); poichè C è un corpo, il nucleo di δ è un ideale massimale di A e coincide quindi con $\mathfrak{J}$.

Siano c_1 e c_2 due elementi qualunque di C e a_1 e a_2 due elementi di A tali che $\delta(a_1) = c_1$, $\delta(a_2) = c_2$; si ha

$$\delta(\sigma(a_2) - \sigma(a_1)) = \tau(c_2) - \tau(c_1).$$

Ma è

$$(\sigma(a_2) - \sigma(a_1))^p = \sigma(pa_2) - \sigma(pa_1) = 1 - 1 = 0,$$

onde $\sigma(a_2) - \sigma(a_1)$ appartiene a $\mathfrak{J}$; ne segue

$$\tau(c_2) - \tau(c_1) = 0,$$

che è quanto si voleva provare.

BIBLIOGRAFIA

[1] ZARISKI-SAMUEL: *Commutative Algebra.* Vol. I. (Van Nostrand, 1958).