RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

D. MANGERON
L. E. KRIVOŠEIN

Sistemi policalorici a rimanenza ed a argomento ritardato problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali con operatore calorico ed argomento ritardato

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 35, nº 2 (1965), p. 341-364

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_2_341_0>

SISTEMI POLICALORICI A RIMANENZA ED A ARGOMENTO RITARDATO PROBLEMI AL CONTORNO PER LE EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI CON OPERATORE CALORICO ED ARGOMENTO RITARDATO

DEDICATA A
MAURO PICONE
NEL SUO 80° COMPLEANNO

Nota *) *di* D. MANGERON (*a Iasi*) *e* L. E. KRIVOŠEIN (*a Frunze*)

In una serie di lavori di vasta portata concernenti le equazioni integrali l'Illustre Accademico Linceo MAURO PICONE ha studiato spettri in un parametro da cui dipendono certe equazioni integrali lineari [1], valutazioni delle soluzioni dell'equazione vettoriale integrale non lineare di Volterra [2]

$$(*) \qquad u(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} K(x, y, u(y))dy,$$

$$K(x, y, u) = H(x, y, u) - G(x, y, u)(u - g(u)),$$

convergenze dei processi iterativi

$$(**) \qquad u^{(n+1)}(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} H[x, y, u^{(n)}(y)]\, dy -$$

$$- \int_{x_0}^{x} G[x, y, u^{(n)}(y)][u^{(n+1)}(y) - g(y)]dy,$$

---

*) Pervenuta in redazione il 5 marzo 1965.

Indirizzo degli AA.: Seminario matematico del Politecnico di Iasi (Romania) e Facoltà di Scienze dell'Università di Frunze (Russia).

spettanti all'equazione (*) oppure all'equazione vettoriale integrale non lineare di seconda specie di Fredholm [3], [4]

$$(***)\qquad u(x) = f(x) + \int_A H[x, y, u(y)]u(y)dy$$

ecc., ecc., mentre numerosi scienziati, prendendo le mosse dai risultati da Lui conseguiti hanno studiato nuovi problemi al contorno per vari sistemi differenziali alle derivate parziali oppure integro-differenziali alle derivate parziali, lineari o no, polivibranti [5], [6], policalorici [7], [8] e poliarmonici [9], [10].

In una serie di lavori degli autori [11]-[13] sono stati studiati numerosi problemi al contorno concernenti equazioni integro-differenziali alle derivate parziali con operatore differenziale esteriore del tipo calorico [1]). Vi si trovano esposte condizioni di esistenza, di unicità e di dipendenza delle soluzioni dei problemi considerati dalle perturbazioni dei coefficienti noti. In alcuni casi sono state anche indicate valutazioni qualitative delle soluzioni e costruite soluzioni approssimate, mettendo in evidenza l'errore commesso.

In questo lavoro si studiano condizioni di esistenza, di unicità e di stabilità (rispetto alle perturbazioni dei coefficienti noti) delle soluzioni di una classe di problemi al contorno spettanti alle equazioni integro-differenziali lineari o no con operatore calorico ed argomenti ritardati. Tenendo conto dell'attualità di tali problemi [14], [15], l'articolo si conclude con alcune valutazioni dei moduli delle loro soluzioni.

1. L'esistenza e l'unicità dei problemi (1), (2).

Consideriamo l'equazione integro-differenziale

---

1) Se

$$P[u] \equiv \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right)^{(n)} = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

allora u si chiama funzione policalorica d'ordine n, (seguendo M. Nicolescu [9]).

$$P[u] = f(x, t) + a(x, t)u(x, t) + b(x, t)u(x - h_1(x), t) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{1} \int_0^T \int_0^a \Big[K_i(x, t, y, \tau) \frac{\partial^i u(y, \tau)}{\partial \tau^i} + \tag{1}$$

$$+ D_i(x, t, y, \tau) \frac{\partial^i u(y - h_2(y), \tau)}{\partial \tau^i} \Big] dy d\tau,$$

ove

$$P[u] \equiv \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad a(x, t), \quad b(x, t), \quad K_i(x, t, y, \tau),$$

$$D_\iota(x, t, y, \tau), \qquad h_j(x) \geqslant 0 \qquad (j = 1, 2), \qquad f(x, t)$$

sono funzioni note continue per

$$(x, t), \qquad (y, \tau) \in D = [0 \leqslant x, y \leqslant a) \times [0 \leqslant t, \tau \leqslant T]$$

e $u(x, t)$ è la funzione incognita.

Ci proponiamo di risolvere il problema al contorno (1) e

$$\begin{gathered} u(x, 0) = \varphi_1(x), \\ [\varphi_1(x) \text{ pure continua e } \varphi(0) = 0], \\ u(0, t) \equiv u(a, t) \equiv 0, \ u(x, t) \equiv 0, \ x \leqslant 0, \ 0 \leqslant t \leqslant T. \end{gathered} \tag{2}$$

Introduciamo una nuova funzione

$$\varphi(x, t) \equiv a(x, t)u(x, t) + b(x, t)u(x - h_1(x), t) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{1} \int_0^T \int_0^a \Big[K_i(x, t, y, \tau) \frac{\partial^i u(y, \tau)}{\partial \tau^i} + \tag{3}$$

$$+ D_\iota(x, t, y, \tau) \frac{\partial \tau^\iota}{\partial^i u(y - k_2(y), \tau)} \Big] dy d\tau.$$

Utilizziamo la funzione $G(x, \xi, t - \alpha)$ ([16], p. 212) come pure il metodo del passaggio dall'equazione omogenea ad una non omogenea [17], dall'equazione (1) si ricava

$$(4) \qquad u(x, t) = m(x, t) + \int_0^t \int_0^a G(x, \xi, t - \alpha)\varphi(\xi, \alpha)d\xi d\alpha,$$

ove si è posto

$$m(x, t) \equiv \int_0^a \left\{ \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\exp - \left(\frac{\pi i}{a}\right)^2 t \right] \sin \frac{\pi i x}{a} \sin \frac{\pi i \xi}{a} \varphi_1(\xi) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t G(x, \xi, t - \alpha) f(\xi, \alpha) d\alpha \right\} d\xi, \; G(x, \xi, t - \alpha) \equiv$$

$$\equiv \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\exp - \left(\frac{\pi i}{a}\right)^2 (t - \alpha) \right] \sin \frac{\pi i x}{a} \sin \frac{\pi i \xi}{a}.$$

Sostituendo nella (3) la funzione u e le sue derivate [2]) secondo la (4), si perviene alla seguente equazione integrale del tipo misto

$$(5) \qquad \begin{aligned} \varphi(x, t) - \int_0^t \int_0^a M_1(x, t, y, \tau)\varphi(y, \tau)dy d\tau = \\ = \psi(x, t) + \int_0^T \int_0^a M_2(x, t, y, \tau)\varphi(y, \tau)dy d\tau, \end{aligned}$$

ove $\psi(\cdot)$, $M_1(\cdot)$, $M_2(\cdot)$ sono funzioni note continue per (x, t), $(y, \tau) \in D$. Tenendo conto dei risultati esposti negli articoli [11]-[13], si conclude che l'operatore

---

[2]) L'esistenza delle derivate rispetto a t della funzione $G(\cdot)$ si verifica senz'atro.

$$A[\varphi] \equiv \varphi(x, t) - \int_0^t \int_0^a M_1(x, t, y, \tau)\varphi(y, \tau)dyd\tau \tag{6}$$

ammette l'operatore reciproco. Per conseguenza, dalla (5) si ottiene

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= A^{-1}\left[\psi(x, t) + \int_0^T \int_0^a M_2(x, t, y, \tau)\varphi(y, \tau)dyd\tau \equiv \right. \\ &\equiv \Psi(x, t) + \int_0^T \int_0^a M_3(x, t, y, \tau)\varphi(y, \tau)dyd\tau . \end{aligned} \tag{7}$$

Pertanto, se $\Phi(x, t)$ è la soluzione dell'equazione (7), ne risulta che

$$u(x, t) = m(x, t) + \int_0^t \int_0^a G(x, \xi, t - \alpha)\Phi(\xi, \alpha)d\xi d\alpha \tag{8}$$

è la soluzione del problema (1), (2) inizialmente posto. L'analisi dell'equazione (7) permette ad enunciare il seguente

TEOREMA 1: *Se* 1 *non è un autovalore del nucleo* $M_3(x, t, y, \tau)$ *il problema* (1), (2) *possiede una soluzione unica nella classe delle funzioni* C_{21} [3]) *oppure la soluzione ricercata non è univocamente determinata.*

Infatti, nel primo caso la soluzione del problema considerato si determina univocamente tramite la formula (8). Nel secondo caso affinchè l'equazione (7) e adunque il problema (1), (2) abbia

---

[3]) Cioè nella classe delle funzioni di (x, t) dotate di derivate seconde rispetto ad x e di derivate prime rispetto a t, le derivate riuscendo continue in tutto l'insieme D. In ciò che segue si prenderanno in considerazione soltanto tali soluzioni. Nella (4) si considerano le soluzioni appartenenti alla classe $\Gamma_{p_1 \cdots p_n}(p_1 \geqslant 1, p_2 \geqslant 1, \ldots, p_n \geqslant 1)$ e cioè $\varphi_i(x_i)$ è quasi continua.

soluzione è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le eguaglianze

$$\iint_D \Psi(x, t)\eta_i(x, t)dtdx = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., r), \tag{9}$$

ove $\eta_i(x, t)$ $(i = 1, 2, ..., r)$ sono autofunzioni spettanti al nucleo $M_3(y, \tau, x, t)$. Nell'ipotesi che le uguaglianze (9), siano soddisfatte la soluzione del problema al contorno (1), (2) esiste ed ha la forma

$$\begin{aligned} u(x, t) = m(x, t) + \int_0^t\int_0^a G(x, \xi, t - \alpha)[\varphi_0(\xi, \alpha) + \\ + \sum_{i=1}^r c_i\varphi_i(\xi, \alpha)]d\xi d\alpha, \end{aligned} \tag{10}$$

ove $\varphi_0(x, t)$ è una soluzione particolare nota dell'equazione (7), $\varphi_i(x, t)$ $(i = 1, 2, ..., r)$ sono le autofunzioni del nucleo $M_3(x, t, y, \tau)$, mentre $c_1, c_2, ..., c_r$ sono costanti arbitrarie.

Mettiamo in evidenza alcune condizioni che assicurano l'esistenza di un'unica soluzione del problema (1), (2).

1. – Nel caso in cui sussiste la disuguaglianza

$$l = 1 - \max_D \iint_D | M_3(x, t, y, \tau) | dyd\tau > 0, \tag{11}$$

il problema (1), (2) possiede una soluzione unica nella classe delle funzioni C_{21}.

2. – L'affermazione precedente è valida anche nel caso che i nuclei $K_i(x, t, y, \tau)$, $D_i(x, t, y, \tau)$ $(i = 0,1)$ siano dati da formule del tipo

$$K_i(x, t, y, \tau) \equiv \begin{cases} K_{i0}(x, t, y, \tau), & 0 \leqslant x, y \leqslant a, \ 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & 0 \leqslant x, y \leqslant a, \ 0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant T, \end{cases} \tag{12}$$

$$(13)\ D_i(x, t, y, \tau) \equiv \begin{cases} D_{i0}(x, t, y, \tau), & 0 \leqslant x, y \leqslant a,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & 0 \leqslant x, y \leqslant a,\ 0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant T. \end{cases}$$

3. – Se le funzioni $K_i(x, t, y, \tau)$ $(i = 0, 1)$ soddisfano le condizioni (12), mentre $D_i(x, t, y, \tau) \equiv 0$ $(i = 0, 1)$, oppure se le funzioni $D_i(x, t, y, \tau)$ $(i = 0, 1)$ soddisfano le condizioni (13), mentre si ha per tutti (x, t), $(y, \tau) \in D$ $K_i(x, t, y, \tau) \equiv 0$ $(i = 0,1)$ [4]), allora l'unicità della soluzione del problema (1), (2) è certamente assicurata non appena le funzioni $K_{i0}(\cdot)$ e $D_{i0}(\cdot)$ sono continue per tutti (x, t), $(y, \tau) \in D$.

Supponiamo, ad esempio, che le condizioni (12), (13) siano soddisfatte. L'equazione (1) diventa in questo caso

$$\begin{aligned} P[u] &= f(x, t) + a(x, t)u(x, t) + b(x, t)u(x - h_1(x), t) + \\ &+ \sum_{i=0}^{1} \int_0^t \int_0^a \Big[K_{i0}(x, t, y, \tau) \frac{\partial^i u(y, \tau)}{\partial \tau^i} + \\ &+ D_{i0}(x, t, y, \tau) \frac{\partial^i u(y - h_2(y), \tau)}{\partial \tau^i} dy d\tau . \end{aligned} \tag{14}$$

La sostituzione della (4) nella (3) conduce all'equazione

$$\varphi(x, t) - \int_0^t \int_0^a M_4(x, t, y, \tau)\varphi(y, \tau) dy d\tau = \psi(x, t), \tag{15}$$

ove si è posto

$$M_4(x, t, y, \tau) \equiv M_1(x, t, y, \tau) + M_{20}(x, t, y, \tau),$$

$$M_{20}(x, t, y, \tau) \equiv \begin{cases} M_2(x, t, y, \tau), & 0 \leqslant x, y \leqslant a,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & 0 \leqslant x. y \leqslant a,\ 0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant T. \end{cases}$$

L'equazione (15) possiede nel dominio D una sola soluzione

---

[4]) Diremo rispettivamente che queste sono le condizioni (12 a), (13 a).

continua epperciò il problema al contorno (1), (2) possiede anch'esso una sola soluzione nella classe delle funzioni C_{21}.

Osserviamo pure che si perviene all'equazione (15) anche nel caso che siano soddisfatte le condizioni (3).

2. La stabilità delle soluzioni del problema (1), (2).

DEFINIZIONE: Diremo che una soluzione del problema (1), (2) è stabile rispetto alle piccole perturbazioni delle funzioni note che figurano nella (1) oppure nelle (2), se, per ogni numero positivo $\varepsilon > 0$, si può indicare un numero $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale, che dalle

$$\begin{gathered}
| \varphi_1(x) - \varphi_{11}(x) | < \delta, \quad | a(x, t) - a_1(x, t) | < \delta, \\
| b(x, t) - b_1(x, t) | < \delta, \\
| K_i(x, t, y, \tau) - K_{i1}(x, t, y, \tau) | < \delta, \\
| D_i(x, t, y, \tau) - D_{i1}(x, t, y, \tau) | < \delta \qquad (i = 0, 1), \\
| h_1(x) - h_{12}(x) | < \delta, \quad | h_2(x) - h_{21}(x) | < \delta, \\
0 \leqslant x, y \leqslant a, \quad 0 \leqslant t, \tau \leqslant T,
\end{gathered}$$

si deduca

$$| u(x, t) - u_1(x, t) | < \varepsilon, \qquad (x, t) \in D,$$

ove $u_1(x, t)$ è la soluzione del problema al contorno

$$\begin{aligned}
P[u_1] &= f_1(x, t) + a_1(x, t)u_1(x, t) + b_1(x, t)u_1(x - h_{12}(x), t) + \\
&+ \sum_{i=0}^{1} \int_0^T \int_0^a \left[K_{i1}(x, t, y, \tau) \frac{\partial^i u_1(y, \tau)}{\partial \tau^i} + \right. \\
&\left. + D_{i1}(x, t, y, \tau) \frac{\partial^i u_1(y - h_{21}(y), \tau)}{\partial \tau^i} \right] dy d\tau,
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}
u_1(x, 0) = \varphi_{11}(x), \quad u_1(0, t) \equiv u_1(a, t) \equiv 0, \\
u_1(x, t) \equiv 0, \quad x \leqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.
\end{gathered} \tag{17}$$

In questo ordine di idee si può enunciare il seguente

TEOREMA 2: *Se* 1 *non è un autovalore del nucleo* $M_3(x, t, y, \tau)$, *la soluzione del problema* (1), (2) *è stabile rispetto alle piccole perturbazioni delle funzioni note.*

All'uopo di dimostrare questo teorema fissiamo anzitutto un numero positivo $\varepsilon > 0$ arbitrario, e per determinare il numero δ ricorriamo al procedimento già utilizzato per la costruzione della funzione (4). Abbiamo in questo caso

$$u_1(x, t) = m_1(x, t) + \int_0^t\int_0^a G(x, \xi, t-\alpha)\varphi_1(\xi, \alpha)d\xi d\alpha, \tag{18}$$

ove $m_1(x, t)$ è una funzione nota e

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, t) &= a_1(x, t)u_1(x, t) + b_1(x, t)u_1(x - h_{11}(x), t) + \\ &+ \sum_{i=0}^{1}\int_0^T\int_0^a \Big[K_{i1}(x, t, y, \tau)\frac{\partial^i u_1(y, \tau)}{\partial\tau^i} + \\ &+ D_{i1}(x, t, y, \tau)\frac{\partial^i u_1(y - h_{21}(y), \tau)}{\partial\tau^i}\Big] dyd\tau .\end{aligned} \tag{19}$$

Sostituendo (18) nella (19) si ottiene l'equazione integrale

$$\begin{aligned}A_1\varphi_1 \equiv \varphi_1(x, t) - \int_0^t\int_0^a M_{11}(x, t, y, \tau)\varphi_1(y, \tau)dyd\tau = \\ = \psi_1(x, t) + \int_0^T\int_0^a M_{21}(x, t, y, \tau)\varphi_1(y, \tau)dyd\tau .\end{aligned} \tag{20}$$

Dalla (20) si ricava

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, t) = A_1^{-1}\Big[\psi_1(x, t) + \int_0^T\int_0^a M_{21}(x, t, y, \tau)\varphi_1(y, \tau)\, dyd\tau\Big] \equiv \\ = \Psi_1(x, t) + \int_0^T\int_0^a M_{31}(x, t, y, \tau)\varphi_1(y, \tau)dyd\tau .\end{aligned} \tag{21}$$

E, per conseguenza,

$$
(22) \quad
\begin{aligned}
\varphi(x, t) - \varphi_1(x, t) &= \Psi(x, t) - \Psi_1(x, t) + \int_0^T\!\!\int_0^a [M_3(x, t, y, \tau) - \\
&\quad - M_{31}(x, t, y, \tau)]\varphi_1(y, \tau)dyd\tau + \\
&\quad + \int_0^T\!\!\int_0^a M_3(x, t, y, \tau)[\varphi(y, \tau) - \varphi_1(y, \tau)]dyd\tau \equiv \sigma(x, t) + \\
&\quad + \int_0^T\!\!\int_0^a M_3(x, t, y, \tau)[\varphi(y, \tau) - \varphi_1(y, \tau)]\, dyd\tau;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(x, t) - \varphi_1(x, t) &= \sigma(x, t) + \\
&+ \int_0^T\!\!\int_0^a R(x, t, y, \tau)\sigma(y, \tau)dyd\tau \equiv \varrho(x, t),
\end{aligned}
$$

ove con $R(x, t, y, \tau)$ si è denotato il nucleo risolvente del nucleo $M_3(x, t, y, \tau)$. Si ha pertanto

$$
\begin{aligned}
| u(x, t) - u_1(x, t) | &\leqslant | m(x, t) - m_1(x, t) | + \\
&+ \int_0^t\!\!\int_0^a | G(x, \xi, t - \alpha)\varrho(\xi, \alpha) | d\xi d\alpha \leqslant
\end{aligned}
$$

$$
\leqslant \delta\{1 + \int_0^t\!\!\int_0^a | G(x, \xi, t - \alpha) | [1 + \int_0^T\!\!\int_0^a | R(\xi, \alpha, y, \tau) | dyd\tau]\, d\xi d\alpha\},
$$

ove

$$
\delta = \sup \{ \max_D | m(x, t) - m_1(x, t) |, \quad \max_D | \sigma(x, t) | \},
$$

e dunque per il problema propostoci basta prendere $\delta < \varepsilon : \beta$, ove

$$\beta = 1 + \max_D \int_0^t \int_0^a | G(x, \xi, t - \alpha) | [1 +$$

$$+ \int_0^T \int_0^a | R(\xi, \alpha, y, \tau) | dy d\tau] \, d\xi d\alpha .$$

OSSERVAZIONI 1: Se le funzioni $K_i(\cdot)$, $D_i(\cdot)$ $(i = 0, 1)$ soddisfano ad una delle condizioni: $a)$ (11), $b)$ (12), (13), $c)$ (12 a), (13 a), il problema (1), (2) possiede sempre una soluzione stabile rispetto alle piccole perturbazioni delle funzioni note che figurano nelle (1) e (2). 2) L'equazione integrale di forma (7) può essere costruita introducendo la funzione

$$M_{10}(x, t, y, \tau) \equiv \begin{cases} M_1(x, t, y, \tau), & 0 \leqslant x, y \leqslant a, \\ & 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & 0 \leqslant x, y \leqslant a, \\ & 0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant T. \end{cases} \tag{23}$$

Abbiamo in questo caso

$$\varphi(x, t) - \int_0^T \int_0^a M_5(x, t, y, \tau) \varphi(y, \tau) dy d\tau = \psi(x, t), \tag{24}$$

ove si è posto $M_5(x, t, y, \tau) \equiv M_{10}(x, t, y, \tau) + M_2(x, t, y, \tau)$. Epperciò, se 1 non è un autovalore del nucleo $M_5(x, t, y, \tau)$, oppure, in particolare, se non è soddisfatta la disuguaglianza

$$l_1 = 1 - \max_D \int_0^T \int_0^a | M_5(x, t, y, \tau) | dy d\tau > 0, \tag{25}$$

il problema (1), (2) possiede una soluzione unica, stabile rispetto alle piccole perturbazioni.

3. Valutazioni dei moduli delle soluzioni.

Introduciamo le notazioni

$$g_1(x, y) \equiv |\, a(x, t)\, | + |\, b(x, t)\, | + \int_0^T\!\!\int_0^a [\, |\, K_0(x, t, y, \tau)\, | +$$

$$+ |\, D_0(x, t, y, \tau)\, |\,]dy d\tau;$$

$$g_2(x, t) \equiv \int_0^T\!\!\int_0^a [\, |\, K_1(x, t, y, \tau)\, | + |\, D_1\, (x, t, y, \tau)\, |\,]dy d\tau,$$

$$\alpha_3 = \max_D \left| \frac{\partial^2 m(x, t)}{\partial x^2} \right|, \quad \alpha_i = \max_D \left| \frac{\partial^i m(x, t)}{\partial t^i} \right|,$$

$$m_i = \max_D \left| \frac{\partial^i u(x, t)}{\partial t^i} \right| (i = 0, 1), \quad g_i = \max_D g_i(x, t),$$

$$\gamma_i = \max_D \iint_D |\, G(x, \xi, t - \alpha)\, |\, g_i(\xi, \alpha) d\xi d\alpha,$$

$$\delta_i = \max_D \int_0^t\!\!\int_0^a \left| \frac{\partial^2 G(x, \xi, t - \alpha)}{\partial x^2} \right| g_i(\xi, \alpha) d\xi d\alpha .$$

Si ha, per conseguenza,

$$m_0(1 - \gamma_1) \leqslant \alpha_0 + m_1 \gamma_2; \tag{26}$$

$$m_1(1 - \delta_2 - g_2) \leqslant \alpha_1 + \alpha_3 + m_0(\delta_1 + g_1).$$

Se

$$z_1 = 1 - \delta_2 - g_2 > 0, \tag{27}$$

risulta pure

$$m_1 < (\alpha_1 + \alpha_3) : z_1 + (\delta_1 + g_1) m_0 : z_1, \tag{28}$$

$$m_0 \cdot [1 - \gamma_1 - \gamma_2(\delta_1 + g_1) : z_1] \leqslant \alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha_3) : z_1 .$$

Pertanto, supponendo soddisfatta la relazione

$$(29) \qquad z_2 = (1 - \gamma_1)z_1 - \gamma_2(\delta_1 + g_1) > 0,$$

si ottiene

$$(30) \qquad m_0 \leqslant (\alpha_0 z_1 + \alpha_1 + \alpha_3) : z_1,$$
$$m_1 \leqslant [\alpha_1 + \alpha_3 + (\delta_1 + g_1)(\alpha_0 z_1 + \alpha_1 + \alpha_3) : z_2] : z_1,$$

ed inoltre

$$(31) \qquad \max_D \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \leqslant \alpha_3 + m_0\delta_1 + m_1\delta_2 \leqslant \alpha_3 + [\delta_1 z_1(\alpha_0 z_1 + \alpha_1 + \alpha_3) + \delta_2(\delta_1 + g_1)(\alpha_0 z_1 + \alpha_1 + \alpha_3)] : (z_1 z_2).$$

Si perviene in un modo alquanto più semplice alla valutazione del problema (1), (2) se si fa l'uso dell'equazione integrale (5).

Supponiamo che sia soddisfatta la disuguaglianza (25). Allora è

$$\max_D |\varphi(x, t)| \leqslant \max_D |\psi(x, t)| : l_1$$

e pertanto risulta

$$(32) \qquad |u(x, t)| \leqslant |m(x, t)| + \int_0^t\int_0^a G(x, \xi, t - \alpha) \Big\{ |\psi(\xi, \alpha)| + \int_0^T\int_0^a |M_5(\xi, \alpha, y, \tau)| [\max_D |\psi(x, t)| : l_1] dy d\tau \Big\} d\xi d\alpha .$$

Diamo adesso valutazioni per $|u(x, t)|$ nell'ipotesi che le funzioni $K_i(\cdot)$, $D_i(\cdot)$ $(i = 0, 1)$ godano delle proprietà (12), (13).

a) Eseguiamo nella (15) k sostituzioni successive in modo che sia

$$(33) \qquad p_k = 1 - \max_D \int_0^t\int_0^a |N_k(x, t, y, \tau)| dy d\tau > 0,$$

ove $N_k(x, t, y, \tau)$ denota il nucleo k volte iterato del nucleo $M_4(x, t, y, \tau)$. L'equazione integrale che si ottiene in tal modo la trascriviamo sotto la forma

$$\varphi(x, t) - \int_0^t\int_0^a N_k(x, t, y, \tau)\varphi(y, \tau)dyd\tau = \psi_k(x, t). \tag{34}$$

Allora

$$\max_D |\varphi(x, t)| \leqslant \max_D |\psi_k(x, t)| : p_k, \tag{35}$$

$$|u(x, t)| \leqslant |m(x, t)| + \int_0^t\int_0^a |G(x, \xi, t-\alpha)| \{ |\psi_k(\xi, \alpha)| +$$

$$+ [\max_D |\psi_k(x, t)| : p_k] \int_0^a\int_0^a |N_k(\xi, \alpha, y, \tau)| dyd\tau\} d\xi d\alpha,$$

$$(x, t) \in D.$$

b) Se si fa l'uso della valutazione del nucleo risolvente $R(x, t, y, \tau)$ del nucleo $M_4(x, t, y, \tau)$, si ha

$$|R(x, t, y, \tau)| \leqslant N \exp(\mathrm{Nat}), \ (x, t), \ (y, \tau) \in D,$$

ove

$$N \geqslant |M_4(x, t, y, \tau)|, \ (x, t), \ (y, \tau) \in D.$$

Per conseguenza si ha

$$|\varphi(x, t)| \leqslant |\psi(x, t)| + N \int_0^t\int_0^a \exp(Na\tau) |\psi(y, \tau)| dyd\tau \equiv \tag{37}$$

$$\equiv \Phi(x, t),$$

$$|u(x, t)| \leqslant |m(x, t)| + \int_0^t\int_0^a |G(x, \xi, t-\alpha)| \Phi(\xi, \alpha)d\xi d\alpha. \tag{38}$$

c) Sia

$$\sigma(t) = \int_a^0 | \varphi(x, t) | dx, \tag{39}$$

$$\lambda(t) > \left| \int_0^a \psi(x, t) dx \right|, \quad \lambda(0) > 0, \quad \frac{d\lambda(t)}{dt} \geqslant 0, \tag{40}$$

$$\begin{gathered} p(x, \tau) \geqslant | M_4(x, t, y, \tau) |, \\ n(x, t, \tau) \geqslant | M_4(x, t, y, \tau) |, \quad 0 \leqslant x, \ y \geqslant a, \\ 0 \leqslant t, \ \tau \leqslant T, \end{gathered} \tag{41}$$

ove $\lambda(t)$, $p(x, \tau)$, $n\,(x, t, \tau)$ sono funzioni continue note.

Dalla (15) si ottiene

$$\begin{gathered} \sigma(t) \leqslant \lambda(t) + \int_0^t p(x, \tau)\sigma(t) d\tau \leqslant \lambda(t) \exp \int_0^t p(x, \tau) d\tau \equiv \\ = \varrho(x, t), \quad | \varphi(x, t) | \leqslant | \psi(x, t) | + \int_0^t n(x, t, \tau) \varrho(x, \tau) d\tau \equiv \\ \equiv \sigma(x, t), \end{gathered} \tag{42}$$

$$\begin{gathered} | u(x, t) | \leqslant | m(x, t) | + \int_0^t \int_0^a | G(x, \xi, t - \alpha) | \, \delta(\xi, \alpha) d\xi d\alpha, \\ (x, t) \in D. \end{gathered} \tag{43}$$

4. Problema non lineare corrispondente.

Consideriamo adesso, tenendo conto anche di alcune estensioni dovute in parte a nostri discepoli [18]-[21], il problema al contorno

$$\begin{gathered} u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u(0, t) \equiv u(a, t) \equiv 0, \\ \varphi_0(0) = 0, \quad u(x, t) \equiv 0, \quad t \leqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \end{gathered} \tag{44}$$

concernente l'equazione integro-differenziale non lineare con l'argomento ritardato

$$P[u] = f[x, t, u(x, t), u(x, t - r_1(t)] + \tag{45}$$
$$+ \int_0^t\int_0^a K(x, t, y, \tau)F\,[y, \tau, u(y, \tau), u(y, \tau - r_2(\tau))]dyd\tau,$$

ove $\varphi_0(x)$, $r_i(t) \geqslant 0$ $(i = 1, 2)$, $f(x, t, \alpha, \beta)$, $K(x, t, y, \tau)$, $F(y, \tau, \alpha, \gamma)$ sono funzioni continue note, definite per tutti i loro argomenti nel dominio (x, y), $u \in \Pi$.

Trasformiamo il problema (44), (45) nell'equazione integrale equivalente

$$u(x, t) = n(x, t) + \int_0^t\int_0^a G(x, \xi, t - \alpha)\,\{f[\xi, \alpha, u(\xi, \alpha), u(\xi, \alpha -$$
$$- r_1(\alpha))] + \int_0^a\int_0^a K(\xi,\alpha, y, \tau)F[y, \tau, u(y, \tau),\ u(y, \tau - \tag{46}$$
$$- r_2(\tau))]dyd\tau\}\,d\xi d\alpha \equiv n(x, t) + \int_0^t\int_0^a W[x, t, y, \tau,\ u(y, \tau),$$
$$u(y, \tau - r_1(\tau)\ |, u(y, \tau - r_2(\tau))]dyd\tau,$$

ove si è posto

$$u(x, t) \equiv \int_0^a \left\{ \frac{2}{a}\sum_{i=1}^{\infty} \left[\exp - \left(\frac{\pi i}{a}\right)^2 t\right] \sin\frac{\pi i x}{a} \sin\frac{\pi i \xi}{a}\,\varphi_0(\xi) \right\} d\xi .$$

Sussiste il seguente

TEOREMA 3: *La risoluzione del problema* (44), (45) *è equivalente alla risoluzione dell'equazione integrale* (46). *Allora* 1) *se nel dominio Π, la funzione $W(\cdot)$ soddisfa ad una condizione di Lipschitz rispetto al quinto, sesto e settimo argomento, avendo ri-*

spettivamente i coefficienti $\varrho_1(x, t, y, \tau)$, $\varrho_2(x, t, y, \tau)$, $\varrho_3(x, t, y, \tau)$, *cioè soddisfa alla*

$$(47)\qquad \begin{gathered} | W(x, t, y, \tau, w_1, w_2, w_3) - W(x, t, y, \tau, v_1, v_2, v_3) | \leqslant \\ \sum_{i=1}^{3} \varrho_i(x, t, y, \tau) \, | w_i - v_i | ; \end{gathered}$$

2) *e se vale la disuguaglianza*

$$(48)\qquad l_2 = 1 - 3 \max_D \int_0^t \int_0^a \sum_{i=1}^{3} \varrho_i(x, t, y, \tau) dy d\tau > 0,$$

$$D = [0 \leqslant t \leqslant T] \times [0 \leqslant x \leqslant a],$$

il problema (44), (45) *possiede una sola soluzione appartenente alla classe delle funzioni* C_{21}.

La validità della prima parte del teorema enunciato risulta senz'altro dal modo di costruzione dell'equazione (46). Considerando l'equazione (44) come un'equazione con operatori, osserviamo che l'operatore del secondo membro della (46) trasforma ogni funzione dello spazio funzionale C_{21} in una funzione del medesimo spazio. Ma una volta soddisfatte le condizioni (47) e (48), è realizzato anche il noto principio di Banach sulle rappresentazioni concentrate, pertanto risulta vera anche la seconda parte del teorema.

5. Stabilità e valutazione dei moduli del problema non lineare.

Sia $u_1(x, t)$ la soluzione del problema

$$\begin{gathered} u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u(0, t) \equiv u(a, t) \equiv 0, \quad \varphi_0(0) = 0, \\ u(x, t) \equiv 0, \quad t \leqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \end{gathered}$$

concernente l'equazione integro-differenziale

$$(49)\qquad \begin{gathered} P(u_1) = f_1[x, t, u_1(x, t), u_1(x, t - r_1(t))] + \\ + \int_0^t \int_0^a K_1(x, t, y, \tau) F_1[y, \tau, u_1(y, \tau), u_1(y, \tau - r_2(\tau))] dy d\tau . \end{gathered}$$

Supponendo che le condizioni 1) e 2) del teorema 3 siano anch'esse soddisfatte, risulta che la soluzione del problema (44), (45) è stabile rispetto alle piccole perturbazioni delle funzioni $f(\cdot)$, $K(\cdot)$, $F(\cdot)$, $r_i(\cdot)$ $(i = 1, 2)$.

Infatti,

$$u_1(x, t) = n(x, t) + \int_0^t\int_0^a G(x, \xi, t-\alpha)\{f_1(\xi, \alpha, u_1(\xi, \alpha), u_1(\xi, \alpha -$$

$$- r_1(\alpha))] + \int_0^a\int_0^a K_1(\xi, \alpha, y, \tau)F_1[y, \tau, u_1(y, \tau), u_1(y, \tau -$$

$$- r_2(\tau))]dyd\tau\}d\xi d\alpha \equiv \int_0^t\int_0^a W_1[x, t, y, \tau, u_1(y, \tau), \ u_1(y,$$

$$\tau - r_1(\tau)), \ u_1(y, \tau - r_2(\tau))]dyd\tau + n(x, t).$$

Se ne deduce [5])

$$|u(x, t) - u_1(x, t)| \leqslant 3\sum_{i=1}^{3}\int_0^t\int_0^a \varrho_i(x, t, y, \tau)\,|u(y, \tau) - u_1(y, \tau)|\,dyd\tau +$$

$$(50) \qquad + \left|\int_0^t\int_0^a \{W[x, t, y, \tau, u_1(y, \tau), \ u_1(y, \tau - r_1(\tau)), \ u_1(y, \tau -\right.$$

$$- r_2(\tau))] - W_1[x, t, y, \tau, u_1(y, \tau), \ u_1(y, \tau - r_1(\tau)), \ u_1(y, \tau -$$

$$\left. - r_2(\tau))]\}\ \right| dyd\tau.$$

[5]) Se la relazione (45) non ha luogo, è necessario eseguire nella disuguaglianza (50) k sostituzioni in modo che risulti

$$l_3 = 1 - \max_D \int_0^t\int_0^a S_k(x, t, y, \tau)dyd\tau > 0,$$

ove $S_k(x, t, y, \tau)$ denota il nucleo k volte iterato del nucleo $S(x, t, y, \tau) \equiv \equiv \sum_{i=1}^{3} 3\varrho_i(x, t, y, \tau)$.

Donde risulta

$$\max_D | u(x,t) - u_1(x,t) | \leqslant \max_D \left| \int_0^t \int_0^a H[x, t, y, \tau, u_1(y,\tau), u_1(y, \tau - r_1(\tau)), u_1(y, \tau - r_2(\tau))] dy d\tau : l_2, \right.$$

ove si è posto

$$H(\cdot) \equiv W.$$

Per conseguenza, se

$$\max_\pi | H(\cdot) | < \varepsilon l_2 : \Delta, \qquad \Delta = aT,$$

si ottiene

$$(51) \qquad | u(x,t) - u_1(x,t) | < \varepsilon, \qquad (x,t) \in D.$$

Si ha inoltre

$$(52) \qquad \begin{aligned} | u(x,t) | \leqslant | u_1(x,t) | + \varepsilon \int_0^t \int_0^a S(x,t,y,\tau) dy d\tau + \\ + \left| \int_0^t \int_0^a H[x, t, y, \tau, u_1(y,\tau), u_1(y, \tau - r_1(\tau)), u_1(y, \tau - \right. \\ \left. - r_2(\tau))] dy d\tau \right| \quad (x,t),\ u_1 \in \Pi. \end{aligned}$$

Supponiamo che per tutti (x, t), $u \in \Pi$ sussistano le disuguaglianze

$$(53) \qquad \begin{aligned} | f[x, t, u(x,t), u(x, t - r_1(t))] | \leqslant a_1(x,t) | u(x,t) | + \\ + a_2(x,t) | u(x, t - r_1(t)) |, \end{aligned}$$

$$(54) \qquad \begin{aligned} | F[x, t, u(x,t), u(x, t - r_2(t))] | \leqslant \\ \leqslant a_3(x,t) | u(x,t) | + a_4(x,t) | u(x, t - r_2(t) |, \end{aligned}$$

dove le $a_i(x, t)$ $(i = 1, 2, \dots, 4)$ sono funzioni note non negative dei loro argomenti. Dalla (46) si ricava

$$\int_0^a |u(x,t)|\,dx \leqslant \left|\int_0^a n(x,t)dx\right| + \left|\int_0^a dx \int_0^t\int_0^a G(x,\xi,t-\alpha)\right. \times$$

$$\times \{f[\xi,\alpha,u(\xi,\alpha),u(\xi,\alpha-r_1(\alpha))] + \int_0^a\int_0^a K(\xi,\alpha,y,\tau)F[y,\tau,$$

$$u(y,\tau-r_2(\tau))]dyd\tau\}\,d\xi d\alpha \leqslant \lambda_1(t) + \int_0^t\int_0^a G_0(t,\xi,\alpha)\,\}a_1(\xi,\alpha)$$

$$|u(\xi,\alpha)| + a_2(\xi,\alpha)\,|u(\xi,\alpha-r_1(\alpha))| + \int_0^a\int_0^a K(\xi,\alpha,y,\tau)[a_3(y,\tau)$$

$$|u(y,\tau)| + a_4(y,\tau)\,|u(y,\tau-r_2(\tau))|\,]dyd\tau\}\,d\xi d\alpha \equiv$$

$$\equiv \lambda_1(t) + \int_0^t\int_0^a [E_1(t,\xi,\alpha)\,|u(\xi,\alpha)| + E_2(t,\xi,\alpha)|u(\xi,\alpha-r_1(\alpha))| +$$

$$E_3(t,\xi,\alpha)\,|u(\xi,\alpha-r_2(\alpha))|\,]d\xi d\alpha \leqslant \lambda_1(t) + \int_0^t\int_0^a H_1(t,\alpha)|u(\xi,\alpha)| +$$

$$+ H_2(t,\alpha)\,|u(\xi,\alpha-r_1(\alpha))| + H_3(t,\alpha)\,|u(\xi,\alpha-r_2(\alpha))|\,]d\xi d\alpha,$$

$$\lambda_1(t) = \left|\int_0^a n(x,t)dx\right|, \; H_i(t,\alpha) \geqslant E_i(t,\xi,\alpha) \;\; (i = 1, 2, 3);$$

$$0 \leqslant \xi \leqslant a, \quad 0 \leqslant t,\alpha \leqslant a,$$

ove $G_0(t, \xi, \alpha)$ denota la funzione ottenuta integrando la funzione $G(x, \xi, t-\alpha)$ per rapporto ad x tra i limiti 0 ed a.

Ponendo $H(t,\alpha) \equiv H_1(t,\alpha) + H_2(t,\alpha) + H_3(t,\alpha)$ e tenendo conto della relazione

$$\int_0^t |u(x,t-h)|\,dt \leqslant \int_0^t |u(x,t)|\,dt, \quad t \geqslant 0, \quad h > 0,$$

si ottengono le disuguaglianze integrali seguenti

$$\int_0^a | u(x, t) | dx \leqslant \lambda_1(t) \exp \int_0^t H(t, \alpha) d\alpha \equiv \gamma(t), \tag{55}$$

$$\int_0^t \int_0^a | u(x, t) | dx dt \leqslant \int_0^t \gamma(t) dt . \tag{56}$$

Per conseguenza

$$\begin{aligned} | u(x, t) | \leqslant | n(x, t) | + \int_0^t \{ Q(x, t, \alpha)[b_1(\alpha) + b_2(\alpha)]\gamma(\alpha) + \\ + \int_0^a | G(x, \xi, t - \alpha) | \int_0^a K_0(\xi, \alpha, \tau)[b_3(\tau) + b_4(\tau)]\gamma(\tau) d\tau d\xi \} d\alpha, \end{aligned} \tag{57}$$

ove

$$Q(x, t, \alpha) \geqslant | G(x, \xi, t - \alpha) |, \; K_0 | \xi, \alpha, \tau | \geqslant | K(\xi, t, \alpha, \tau) | ,$$
$$b_i(t) \geqslant a_i(x, t) \;\; (i = 1, 2, ..., 4), \;\; 0 \leqslant x, \xi \leqslant a, \;\; 0 \leqslant t, \alpha \leqslant T.$$

Proponiamoci adesso di valutare $| u(x, t) |$ senza utilizzare le maggiorazioni delle funzioni $K(\cdot)$, $G(\cdot)$, $a_i(\cdot)$. Dalle (46) si ricava

$$\begin{aligned} | u(x, t) | \leqslant | n(x, t) | + \int_0^t \int_0^a | G(x, \xi, t - \alpha) | \{ [a_1(\xi, \alpha) + \\ + a_2(\xi, \alpha)] | u(\xi, \alpha) | + \int_0^a \int_0^a | K(\xi, \alpha, y, \tau) | [a_3(y, \tau) + \\ + a_4(y, \tau)] | u(y, \tau) | dy d\tau \} d\xi d\alpha \equiv | n(x, t) | + \\ \int_0^t \int_0^a B(x, \xi, t, \alpha) | u(\xi, \alpha) | d\xi d\alpha, \;\; (x, t), \;\; u \in \Pi. \end{aligned} \tag{58}$$

Per conseguenza, senza ledere la generalità, nel caso in cui sia soddisfatta la disuguaglianza

$$(59) \qquad l_3 = 1 - \max_D \int_0^t\int_0^a B(x, \xi, t, \alpha) d\xi d\alpha > 0\ ^{6)},$$

si ottiene

$$\max_D | u(x, t) | \leqslant \max_D | n(x, t) | : l_3 = \nu,$$

$$(60) \qquad | u(x, t) | \leqslant | n(x, t) | + \nu \int_0^t\int_0^a B(x, \xi, t, \alpha) d\xi d\alpha, \ (x, t)\in D.$$

OSSERVAZIONE: Utilizzando gli stessi procedimenti, si può considerare anche il problema (2), spettante all'equazione (45).

In un'altra Nota estenderemo i risultati qui raggiunti ai sistemi integro-differenziali con operatori policalorici; e in un'altra ancora, che proseguirà la teoria unitaria dei problemi al contorno elaborata in [22], saranno studiate alcune proprietà comuni alle soluzioni delle equazioni agli operatori poliarmonici, policalorici e polivibranti e, sfruttando una tecnica variazionale dovuta a L. Bellman e alcuni criteri, dovuti a Picone, per l'esistenza del minimo in problemi di calcolo delle variazioni [23]-[27], saranno indicati alcuni procedimenti unitari per la programmazione dinamica di vari tipi di problemi al contorno ben posti.

BIBLIOGRAFIA

[1] PICONE M.: *Ancora sullo spettro in un parametro da cui dipendono certe equazioni integrali lineari.* Atti Acc. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 8, 1960, 28, 6, 743-745.

[2] PICONE M.: *Nuove determinazioni concernenti l'equazione integrale non lineare di Volterra.* Ann. mat. pura ed appl., 1960, 50, 97-113.

[6]) Vedasi l'osservazione a pie' di pagina relativa alla relazione (48).

[3] PICONE M.: *Sull'equazione integrale non lineare di seconda specie di Fredholm*. Math. Z., 1960, 74, 2, 119-128.

[4] PICONE M.: *Sullo spettro in un parametro da cui dipendono certe equazioni integrali lineari*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. fis., mat. e nat. s. 8, 1957 (1958), 23, 6, 347-354.

[5] MANGERON D.: *Sur une classe de problèmes à la frontière non elliptiques d'ordre supérieur*. C. R. Acad. Sci., Paris, 255, 1962, 2894-2896.

[6] MANGERON D., KRIVOŠEIN L. E.: *Sopra i problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali lineari a derivate parziali con derivata d'ordine superiore di Picone*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XXXIII, 1963, 226-266. Vedasi pure *Sulla risoluzione di una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate parziali*. Ibidem, XXXIV, 1964, 344-368.

[7] MANGERON D. e KRIVOŠEIN L. E.: *Teoremi di esistenza, di unicità e di valutazione delle soluzioni di alcuni problemi al contorno concernenti equazioni integro-differenziali con operatori esterni di tipo parabolico*. Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 8, XXXVI, 4, 1964, 451-546.

[8] MANGERON D., L. E. KRIVOŠEIN: *Problèmes aux limites de type mixte concernant une classe d'équations intégro-différentielles paraboliques*. Acad. Roy. Belgique. Bull. Cl. Sci., 5-e s., L, 4, 1964, 424-433.

[9] NICOLESCU MIRON, *Sur une théorème de moyenne de M. Mauro Picone*. Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 8, 1963, 34, 1, 40-44.

[10] MUSIALEK J.: *O oscylacyjności rozwiazan pewnej klasy rownan poliharmonicznych* (*Sulle oscillazioni delle soluzioni di una classe di equazioni poliarmoniche*). Roczn. Polsk. towarz. mat., 1963, s. 1, 8, 1, 15-19.

[11] MANGERON D., KRIVOŠEIN L. E.: *Probleme mixte pentru o clasă de ecuatii integro-diferentiale de tip parabolic* (*Problemi misti per una classe di equazioni del tipo parabolico integro-differenziali*). Bul. Inst. politehn. Bucuresti, 1964, 26, 1, 17-31.

[12] MANGERON D.: *Connections between solutions of some polydimensional boundary value problems*. Bul. Inst. politehn. Iasi, s. n., 4 (8), 1-2, 1958, 61-64.

[13] KRIVOŠEIN L. E.: *Rešenie smešannoi zadaci dlia integro-differentzial'nogo uravnenia paraboliceskogo tipa* (*Risoluzione di un problema misto per un'equazione integro-differenziale del tipo parabolico*). Nel volume « Dokl. 3 Sibirskoi Konf. mat. i meh. », Tomsk, Gos. Univ., 1964, 273-275.

[14] OVSIANNIKOV L. V., ZELENIAK T. I.: *Sovetsko-amerikanskii simpozium matematikov v Novosibirske* (*Simposio sovieto-americano dei

matematici a Novosibirsk). Vestnik Akad. Nauk SSSR, 11, 93-96, 1963.

[15] Corduneanu C.: *Problèmes et méthodes de la théorie de la stabilité*, p. 9; Halanay A.: *Systèmes à retardement. Résultats et problemes*, pp. 17-18. Dritte Konferenz über Nichtlineare Schwingungen. 25-30. Mai 1964, Berlin. DAW, Vortragsauszüge.

[16] Tihonov A. N., Samarskii A. A.: *Uravnenia matematiceskoi fiziki* (*Equazioni della fisica matematica*). Fizmatgiz, Mosca, 1953.

[17] Krivošein L. E.: *Rešenie smešannoi zadaci dlia odnogo klassa integro-differentzial'nyh uravnenii v castnyh proizvodnyh* (*Risoluzione di un problema misto per una classe di equazioni integro-differenziali alle derivate parziali*). Nel volume « Materialy 12-i Naucinoi Konf. fiz. mat. fak. Kirg. Gos. Univ. », 1964, 21-24.

[18] Rossi F.: *Sul metodo di Mangeron nello studio di alcune equazioni integro-differenziali*. Bul. Inst. politehn. Iasi, s. n., 1963, 9 (13), 3-4, 39-42.

[19] Mazzella F.: *Alcuni teoremi concernenti i problemi di Mangeron-Krivošein spettanti alle equazioni integro-differenziali*. Bul. Inst. politehn. Iasi, s. n., 1963, 9 (13), 3-4, 35-38.

[20] Mateescu Liliana: *Sur une classe de problèmes à la frontière non linéaires et non elliptiques de Mangeron-Krivošein*. Acad. Roy. Belgique. Bull. Cl. Sci., 5-e s., L, 4, 1964, 434-439.

[21] Ruscior Stefania: *Il metodo delle equazioni integrali nello studio di alcuni problemi al contorno non lineari*. Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 8, 1963, 35, 6.

[22] Mangreon D.: *Théorie unitaire des problèmes à la frontière de différents types*. Nel vol. »IV-e Congrès des Mathématiciens Roumains », Travaux. Acad. R. P. R., Bucarest, 1960.

[23] R. Bellman: *Adaptive Control Processes. A Guided Tour*. A RAND Corporation Research Study. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1961.

[24] Mangeron D.: *The Bellman Equations of Dynamic Programming concerning a new Class of boundary Value Problems with « total derivatives »*. J. Math. Anal. a. Appl., 9, 1, 1964, 141-146.

[25] Picone M.: *Criteri sufficienti per il minimo assoluto di un integrale pluridimensionale del primo ordine nel vettore minimante*. Atti Accad. Naz. dei Lincei, Mem., Cl. Sci. fis., mat. e nat. Sez I., 6, 11, 281-337, 1962.

[26] Picone M.: *Criteri sufficienti in generali problemi di calcolo delle variazioni riguardanti integrali pluridimensionali d'ordine qualsivoglia nel vettore minimante a più componenti*. Bul. Inst. politehn. Iasi, s. n., 10 (14), 3-4, 1964, 21-26.

[27] Mangeron D., Roxin E.: *The existence of optimal controls and some applications*. Bul. Inst. politehn. Iasi, s. n., 10 (14), 3-4, 1964, 61-66.