RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CARMELO TOTARO

I moti alla Poinsot descritti come precessioni generalizzate nel senso di Grioli

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 35, nº 2 (1965), p. 335-340

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_2_335_0>

I MOTI ALLA POINSOT DESCRITTI COME PRECESSIONI GENERALIZZATE NEL SENSO DI GRIOLI

Nota *) *di* CARMELO TOTARO (*a Messina*) **)

Sia S lo spazio di riferimento e C un corpo rigido con un punto fisso 0, mobile rispetto ad S, $\boldsymbol{c}$ un versore solidale con S, $\boldsymbol{k}$ un versore solidale con C e $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare di C nel suo moto rispetto ad S.

Si indichi con ε un'omografia, rappresentata dalla matrice $|\varepsilon_{rs}|$, di ordine 3 ad elementi indipendenti dal tempo rispetto ad assi solidali, e con σ l'omografia d'inerzia.

Diremo che un moto di C è una precessione generalizzata nel senso di Grioli di vettore $\boldsymbol{Q} = \varepsilon\boldsymbol{\omega}$ quando e solo quando [1])

$$(1) \qquad \boldsymbol{Q} = \varepsilon\boldsymbol{\omega} = \mu\boldsymbol{k} + \nu\boldsymbol{c},$$

ove μ e ν sono due quantità scalari.

In questo lavoro, si dimostra che è possibile, in infiniti modi, descrivere i movimenti alla Poinsot come precessioni generalizzate. A tale scopo richiamiamo alcune delle relazioni che stanno a fon-

---

*) Pervenuto in redazione il 9 febbraio 1965.
Indirizzo dell'A.: Via Pietro Castelli, 8, Messina.

**) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 41 del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

[1]) G. Grioli, *Qualche teorema di cinematica dei moti rigidi*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. XXXIV, fasc. 6 (1963).

damento della teoria dei moti alla Poinsot:

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{\boldsymbol{K}}_0 + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{K}_0 = 0 \\ \boldsymbol{K}_0 \times \boldsymbol{\omega} = 2E_0 \\ \boldsymbol{K}_0 = \sigma\boldsymbol{\omega},\end{array}\right. \tag{2}$$

ove con $\boldsymbol{K}_0$ si indica il momento delle quantità di moto rispetto al punto fisso 0 e con E_0 la costante dell'energia.

Poichè risulta $\boldsymbol{K}_0$ costante, rispetto ad $\mathcal{S}$, si può porre:

$$\boldsymbol{K}_0 = K_0\boldsymbol{c}. \tag{3}$$

Per passare alla rappresentazione cartesiana introduciamo un sistema di assi $0\xi\eta\zeta$, solidali con $\mathcal{C}$ e coincidenti con gli assi principali d'inerzia di origine O di $\mathcal{C}$ stesso. Con riferimento a questi assi scriviamo:

$$\left\{\begin{array}{ll}\varepsilon = \left|\begin{array}{ccc}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{array}\right| & \sigma = \left|\begin{array}{ccc}A & O & O \\ O & B & O \\ O & O & C\end{array}\right| \\ \\ \boldsymbol{k} = (a, b, c) & \boldsymbol{c} = (\xi, \eta, \zeta).\end{array}\right. \tag{4}$$

Da (2) e da (3) seguono le equazioni cartesiane:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{A}\xi^2 + \dfrac{1}{B}\eta^2 + \dfrac{1}{C}\zeta^2 = \dfrac{1}{\mathfrak{D}} \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,\end{array}\right. \tag{5}$$

ove, per uniformità di notazioni, abbiamo posto:

$$\mathfrak{D} = \frac{K_0^2}{2E_0}. \tag{6}$$

Notiamo che con l'ipotesi:

$$A < B < C, \tag{7}$$

dalle (5), quali che siano le condizioni iniziali, segue:

$$A \leqslant \mathfrak{D} \leqslant C. \tag{8}$$

Dalle (5), per eliminazione dei termini costanti ai secondi membri, segue pure:

$$BC(\mathfrak{D} - A)\xi^2 + CA(\mathfrak{D} - B)\eta^2 + AB(\mathfrak{D} - C)\zeta^2 = 0, \tag{9}$$

e questa esprime che il luogo di $\boldsymbol{c}$ rispetto a $\mathcal{C}$ è un cono quadratico.

Dopo queste considerazioni preliminari, che utilizzeremo in seguito, passiamo a dimostrare che tutti i moti alla Poinsot si possono descrivere, in infiniti modi, come precessioni generalizzate.

Innanzitutto, si deve constatare che ogni moto alla Poinsot è una precessione generalizzata per sua stessa definizione. Infatti, basta identificare ε con σ perchè risulti:

$$\boldsymbol{Q} = \sigma\boldsymbol{\omega} = K_0\boldsymbol{c}. \tag{10}$$

In questa maniera si ha, precisamente, che ogni moto alla Poinsot è concepibile come una precessione generalizzata degenere perchè dal confronto di (10) con (1) risulta $\mu = 0$.

Dopo ciò, la questione che si può porre è se esistono omografie ε, diverse da σ, che permettano di descrivere i moti alla Poinsot come precessioni generalizzate non degeneri.

La condizione caratteristica, equivalente alla (1), è:

$$\varepsilon\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{k} = 0. \tag{11}$$

Per mezzo di (2_3), da (3) si ha $\boldsymbol{\omega} = K_0\sigma^{-1}\boldsymbol{c}$, e quindi la condizione (11) si può scrivere così:

$$\varepsilon\sigma^{-1}\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{k} = 0. \tag{12}$$

Quest'ultima, con l'uso delle (4), la scriviamo in forma cartesiana:

$$\begin{aligned} &BC(\varepsilon_{31}b - \varepsilon_{21}c)\xi^2 + CA(\varepsilon_{12}c - \varepsilon_{32}a)\eta^2 + AB(\varepsilon_{23}a - \varepsilon_{13}b)\zeta^2 + \\ &\quad + A[C(\varepsilon_{22}a - \varepsilon_{12}b) + B(\varepsilon_{13}c - \varepsilon_{33}a)]\eta\zeta + \\ &\quad + B[A(\varepsilon_{33}b - \varepsilon_{23}c) + C(\varepsilon_{21}a - \varepsilon_{11}b)]\zeta\xi + \\ &\quad + C[B(\varepsilon_{11}c - \varepsilon_{31}a) + A(\varepsilon_{32}b - \varepsilon_{22}c)]\xi\eta = 0. \end{aligned} \tag{12'}$$

Ora imponiamo alla (12′) di essere conseguenza di (9) senza, per altro, escludere che si possa soddisfare alla (12′) indipendentemente da (9) e cioè identicamente rispetto a $\boldsymbol{c}$.

Da questa imposizione seguono le eguaglianze:

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_{31}b - \varepsilon_{21}c = \varrho(\mathfrak{D} - A) \\ \varepsilon_{12}c - \varepsilon_{32}a = \varrho(\mathfrak{D} - B) \\ \varepsilon_{23}a - \varepsilon_{13}b = \varrho(\mathfrak{D} - C), \end{array}\right. \tag{13}$$

$$\left\{\begin{array}{l} C(\varepsilon_{22}a - \varepsilon_{12}b) + B(\varepsilon_{13}c - \varepsilon_{33}a) = 0 \\ A(\varepsilon_{33}b - \varepsilon_{23}c) + C(\varepsilon_{21}a - \varepsilon_{11}b) = 0 \\ B(\varepsilon_{11}c - \varepsilon_{31}a) + A(\varepsilon_{32}b - \varepsilon_{22}c) = 0, \end{array}\right. \tag{14}$$

ove ϱ è un parametro eventualmente nullo.

Se è $A = B \neq C$ le (13) sono soddisfatte per $\varrho = 0$, $\varepsilon_{ih} = 0$ $(i \neq h)$ $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$, $a = b = 0$, $c = 1$.

Si ritrova così il noto risultato che ogni moto alla Poinsot di un giroscopio è un moto di precessione (regolare).

Da (13) si ha:

$$\left\{\begin{array}{l} b\varepsilon_{13} = a\varepsilon_{23} - \varrho(\mathfrak{D} - C) \\ c\varepsilon_{21} = b\varepsilon_{31} - \varrho(\mathfrak{D} - A) \\ a\varepsilon_{32} = c\varepsilon_{12} - \varrho(\mathfrak{D} - B). \end{array}\right. \tag{15}$$

Sostituendo in (14), si trova:

$$\left\{\begin{array}{llllllll} 0 & +Cba\varepsilon_{22} & -Bba\varepsilon_{33} & +Bac\varepsilon_{23} & +0 & -Cb^2\varepsilon_{12} & = \mathscr{C} \\ -Ccb\varepsilon_{11} & +0 & +Acb\varepsilon_{33} & -Ac^2\varepsilon_{23} & +Cba\varepsilon_{31} & +0 & = \mathscr{A} \\ +Bac\varepsilon_{11} & -Aac\varepsilon_{22} & +0 & +0 & -Ba^2\varepsilon_{31} & +Acb\varepsilon_{12} & = \mathscr{B}, \end{array}\right. \tag{16}$$

ove, per brevità, si è posto:

$$\mathscr{A} = \varrho Ca(\mathfrak{D} - A), \quad \mathscr{B} = \varrho Ab(\mathfrak{D} - B), \quad \mathscr{C} = \varrho Bc(\mathfrak{D} - C).$$

La matrice dei coefficienti e dei termini noti delle equazioni del sistema (16) è:

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} 0 & Cba & -Bab & Bac & 0 & -Cbb & \mathscr{C} \\ -Cbc & 0 & Acb & -Acc & Cba & 0 & \mathscr{A} \\ Bac & -Aca & 0 & 0 & -Baa & Acb & \mathscr{B} \end{vmatrix}.$$

A meno di fattori comuni la matrice dei coefficienti di (16) è formata con le tre verticali della seguente matrice quadrata:

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} 0 & Cb & -Ba \\ -Cb & 0 & Ac \\ Ba & -Ac & 0 \end{vmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice è ovviamente zero e pertanto possiamo affermare che la caratteristica della matrice dei coefficienti di (16) è, in ogni caso, 2.

Supponiamo, in primo luogo, $\varrho = 0$.

Con questa ipotesi per soddisfare le (16) basta determinare convenientemente due soli coefficienti della matrice ε, ad esempio ε_{11} ed ε_{22}. Tenendo pure conto delle (15), abbiamo che delle nove componenti di ε solo quattro restano arbitrarie e pertanto si può scrivere:

$$(19)\qquad \varepsilon = \begin{vmatrix} \left(\frac{A}{C}\varepsilon_{33} - \frac{A}{C}\frac{c}{b}\varepsilon_{23} + \frac{a}{c}\varepsilon_{31}\right) & \varepsilon_{12} & \frac{a}{b}\varepsilon_{23} \\ \frac{b}{c}\varepsilon_{31} & \left(\frac{B}{C}\varepsilon_{33} - \frac{B}{C}\frac{c}{b}\varepsilon_{23} + \frac{b}{a}\varepsilon_{12}\right) & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \frac{c}{a}\varepsilon_{12} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix},$$

ove $\boldsymbol{k} = (a, b, c)$ si è supposto arbitrario ma non appartenente a nessuno dei tre piani coordinati individuati dagli assi principali d'inerzia. Tale caso eccezionale si tratta subito direttamente sulla (13).

Concludiamo, con riferimento al caso $\varrho = 0$, che la matrice (19), in infinite maniere, permette di descrivere un moto alla Poinsot come una precessione generalizzata di vettore $\boldsymbol{Q} = \varepsilon\boldsymbol{\omega}$.

In particolare, supponendo $\varepsilon_{33} = C$ e $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{12} = 0$, si ritrova il caso degenere $\varepsilon = \sigma$ di cui si è già detto.

Consideriamo infine il caso $\varrho \neq 0$.

Perchè il sistema (16) sia compatibile anche la matrice (17) deve avere caratteristica 2 e ciò avviene allora e solo allora che sia:

$$BC(\mathfrak{D} - A)a^2 + CA(\mathfrak{D} - B)b^2 + AB(\mathfrak{D} - C)c^2 = 0\,. \tag{20}$$

Interpretiamo questa condizione affermando che un moto alla Poinsot si può anche descrivere in infinite maniere come una precessione generalizzata di vettore $\boldsymbol{Q} = \varepsilon\boldsymbol{\omega}$ complanare con $\boldsymbol{c} \,||\, \boldsymbol{K}_0$ e con un $\boldsymbol{k}$ avente la direzione di una qualunque generatrice del cono descritto da $\boldsymbol{c}$ in $\mathcal{C}$.

I casi speciali $\mathfrak{D} = A$, $\mathfrak{D} = B$, $\mathfrak{D} = C$ (cfr. la (8)) danno luogo a particolari moti alla Poinsot e, non presentano nessuna difficoltà.

Infine, ferme restando le condizioni in cui ci siamo posti, vogliamo notare che la classe delle possibilità che si hanno per descrivere un moto alla Poinsot come una precessione generalizzata è ∞^6 sia nel caso $\varrho = 0$ come pure nel caso $\varrho \neq 0$.

Infatti, nel caso $\varrho = 0$, abbiamo come parametri arbitrari quattro componenti della matrice ε e la direzione di $\boldsymbol{k}$.

Nel caso $\varrho \neq 0$ abbiamo ancora arbitrari quattro componenti della matrice ε, ma la direzione di $\boldsymbol{k}$ è sottoposta al vincolo (20); però quest'ultima limitazione è compensata dall'arbitrarietà di ϱ.