RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DIONIGI GALLETTO

Contributo allo studio dei sistemi continui a trasformazioni reversibili con caratteristiche di tensione asimmetriche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 35, nº 2 (1965), p. 299-334

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_2_299_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CONTRIBUTO ALLO STUDIO DEI SISTEMI CONTINUI A TRASFORMAZIONI REVERSIBILI CON CARATTERISTICHE DI TENSIONE ASIMMETRICHE

Memoria *) *di* DIONIGI GALLETTO (*a Padova*) **)

In una memoria del 1960, riferendosi a deformazioni finite, G. Grioli [1]) ha posto i fondamenti per una teoria dei sistemi continui tridimensionali esenti da vincoli interni e capaci di sforzi specifici asimmetrici e di momenti interni superficiali.

Nella suddetta memoria Grioli ha stabilito fra l'altro che, supposto il sistema a trasformazioni reversibili, l'energia libera termodinamica è da ritenersi funzione, oltre che del gradiente di deformazione $x_i^{i'}$, di certe variabili $\mu^{i'}{}_i$ [2]) e ha osservato come, non risultando indipendenti dette variabili, la conoscenza dell'energia libera non sia sufficiente da sola, a differenza del caso simmetrico, a rendere determinato lo stress. Inoltre, dal fatto che la parte simmetrica di questo sia esprimibile in funzione delle derivate dell'energia libera F, ha dedotto che la funzione F nelle variabili $x_i^{i'}$, $\mu^{i'}{}_i$ non può essere fissata ad arbitrio ma deve soddisfare ad un certo sistema di equazioni che ne condiziona la struttura.

Nel 1962, Toupin [3]) ha studiato, con criteri totalmente differenti, il medesimo problema e ha riscontrato che l'energia

---

*) Pervenuta in redazione il 9 febbraio 1965.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 7 del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

1) Cfr. [8].

2) Si veda il n. 7 della presente memoria.

3) Cfr. [10].

libera può ritenersi funzione arbitraria delle componenti del tensore di deformazione e di certe altre variabili $\frac{3}{2}\mu'^i{}_j$ [4]). I risultati di Grioli, come pure quelli di Toupin, sono stati nel frattempo ottenuti anche da Mindlin e Tiersten [5]) i quali hanno dimostrato la loro completa equivalenza.

A. Bressan [6]), riprendendo recentemente la teoria di Grioli, ha provato che l'integrale generale del sistema di equazioni che condiziona la struttura dell'energia libera è una funzione arbitraria delle componenti del tensore di deformazione e di certe variabili μ_{ij}, variabili che, analogamente alle $\mu^{i\prime}{}_j$ e $\mu'^i{}_j$, non risultano indipendenti.

* * *

I risultati ora concisamente richiamati sono stati ottenuti dai vari citati Autori con tecniche di calcolo e con dimostrazioni in genere piuttosto laboriose.

Ho pertanto ritenuto opportuno dedurre i risultati stabiliti dai suddetti Autori con un diverso procedimento di calcolo che mi ha permesso di semplificare notevolmente ciascuna deduzione, permettendomi addirittura in taluni casi la completa eliminazione di sviluppi algoritmici che nei citati lavori si presentano alquanto laboriosi. Inoltre, ho stabilito una nuova forma per le equazioni costitutive che legano lo stress alla deformazione.

Mediante una semplice trasformazione dell'espressione lagrangiana del lavoro specifico delle forze interne di contatto $\delta l^{(i)}$ ho dedotto pressochè immediatamente che, supposto come sempre il sistema a trasformazioni reversibili, l'energia libera può ritenersi funzione delle caratteristiche di deformazione e di certe altre variabili $\mu'^i{}_j$ [7]), dotate di un ben preciso significato meccanico: le componenti del rotore del tensore di deformazione.

---

[4]) Si veda il n. 2 della presente memoria.

[5]) Cfr. [9].

[6]) Cfr. [2].

[7]) Si veda il n. 2 della presente memoria.

Dette variabili, analogamente alle $\mu'^{i}{}_{j}$ e μ_{ij}, non risultano indipendenti e il legame a cui sono soggette, che è unico, si traduce nella circostanza che il loro invariante lineare è nullo.

Dal fatto che sussiste un legame per le variabili $\mu'^{i}{}_{j}$ segue una decomposizione univoca del tensore lagrangiano dei momenti superficiali in due parti, di cui una, *puramente lavorante*, dà contributo al $\delta l^{(i)}$ mentre l'altra, *non lavorante*, non dà contributo. Tale decomposizione sussiste per deformazioni finite, mentre una analoga è già dovuta ad A. Bressan [8]) nel caso di piccole deformazioni. Inoltre essa, in conseguenza del suo carattere tensoriale e del fatto che a ciascun indice è assegnata una precisa varianza che nel presente lavoro è sempre sistematicamente rispettata, si trasporta immediatamente, immutata nella forma, al tensore euleriano dei momenti. Le suddette due parti risultano essere tra loro *ortogonali* [9]) e la parte non lavorante è rappresentata dal tensore isotropo di minimo *scarto* [9]) dal tensore dei momenti.

Successivamente, ho dedotto le equazioni di Toupin e di Mindlin e Tiersten.

Con un'altra semplice trasformazione del $\delta l^{(i)}$ ho messo in evidenza come l'energia libera possa anche ritenersi funzione del gradiente di deformazione $x^{i}_{i'}$ e delle variabili $\mu'^{i}{}_{i}$ ed ho quindi ricavato le equazioni di Grioli. Particolarmente immediata è risultata la deduzione del sistema di equazioni che condiziona la struttura dell'energia libera.

Con un'ulteriore semplice trasformazione del $\delta l^{(i)}$ ho infine stabilito i risultati di A. Bressan, mettendo in evidenza come l'energia libera possa anche ritenersi funzione delle variabili e_{ij} e μ_{ij}.

Ho poi osservato come, sostituite alle variabili $\mu'^{i}{}_{j}$ le variabili $\mu''^{i}{}_{j} = |x^{i}_{i'}|\,\mu'^{i}{}_{j}$ e al tensore lagrangiano dei momenti $L'_{i}{}^{j}$ da me introdotto il tensore $L_{i}{}^{j} = |x^{i'}_{i}|\,L'_{i}{}^{j}$ [10]), i tensori L^{ij} e μ_{ij}

---

[8]) Cfr. [2], 4 e, anche, la nota (22) della presente memoria.

[9]) Si veda il n. 3 della presente memoria.

[10]) Si veda il n. 13 della presente memoria. Per il significato di $|x^{i}_{i'}|$, $|x^{i'}_{i}|$, si veda il n. 1.

considerati da Bressan non rappresentino altro che le componenti, rispettivamente contravarianti e covarianti, dei tensori $L_i^{\ j}$ e $\mu^i_{\ j}$ nel riferimento che si ottiene interpretando le coordinate x^i della configurazione di riferimento come particolari coordinate curvilinee della configurazione attuale.

Da tale osservazione segue che la relazione esprimente il legame a cui sono soggette le $\mu^{i'}_{\ j}$ e quella esprimente il legame a cui sono soggette le μ_{ij} non sono altro che due tra le diverse forme tensoriali con cui si può esprimere il fatto che il tensore $\mu^i_{\ j}$ ha l'invariante lineare nullo.

Con la suddetta interpretazione delle coordinate x^i, si ha poi che il tensore $\mu^i_{\ j}$ ha nel riferimento cartesiano $x^{i'}$ (coordinate della configurazione attuale) componenti che differiscono unicamente per il fattore $|x^i_{i'}|$ dalle variabili euleriane introdotte da A. Bressan in [2], 5. Il legame a cui queste sono soggette è pertanto ancora un'ulteriore forma con cui si può esprimere il legame a cui è soggetto il tensore $\mu^i_{\ j}$.

Infine, effettuando un'ultima trasformazione del $\delta l^{(i)}$, ho stabilito che l'energia libera termodinamica può anche ritenersi funzione delle variabili e_{ij}, $\mu^i_{\ j}$ ed ho pertanto dedotto un'altra espressione per le relazioni che legano la sollecitazione interna alla deformazione.

E dalla suddetta trasformazione segue inoltre che la decomposizione in precedenza operata del tensore dei momenti $L'_i{}^{j}$ nelle due parti puramente lavorante e non lavorante si trasporta, immutata nella sua forma tensoriale, al tensore $L_i^{\ j}$ e quindi, per quanto in precedenza osservato, al tensore L^{ij}, non appena si interpretino le coordinate x^i come particolari coordinate curvilinee della configurazione attuale.

1. Premessa.

Sia $\mathscr{C}$ un sistema continuo tridimensionale, C una sua arbitraria configurazione di riferimento, C' la sua configurazione attuale. Supporrò lo spazio riferito a un sistema di coordinate cartesiane trirettangole, coordinate che indicherò rispettivamente con $x^i (i = 1, 2, 3)$ o con $x^{i'}$ a seconda che si riferiscano a punti di C o di C'.

Considerato un qualsiasi elemento di superficie orientato [11]) $d\sigma'$ interno a C' e indicato con $\nu'^{i'}$ il versore della normale alla sua faccia positiva, riterrò che le forze di contatto esercitate dagli elementi di $\mathscr{C}$ aderenti alla faccia negativa di $d\sigma'$ su quelli aderenti alla faccia positiva siano riducibili a una forza $T^{i'}_{(\nu')}d\sigma'$ applicata in un punto interno a $d\sigma'$ e a una coppia [12]) di momento $L_{i'(\nu')}d\sigma'$. Ciò implica l'esistenza in C' [13]) di due tensori (campi tensoriali): il *tensore degli sforzi* $T^{i'j'}$ e il *tensore dei momenti superficiali* $L_{i'}{}^{j'}$.

Fatte le posizioni

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = x^{i'}_i, \qquad \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = x^i_{i'},$$

$$\mathrm{Det} \| x^{i'}_i \| = | x^{i'}_i |, \qquad \mathrm{Det} \| x^i_{i'} \| = | x^i_{i'} |,$$

accanto ai due precedenti tensori introdurrò il *tensore lagrangiano degli sforzi* T^{ij} e il *tensore lagrangiano dei momenti superficiali* $L'_i{}^j$, definiti dalle [14])

$$T^{ij} = | x^{i'}_i | \, x^i_{i'} x^j_{j'} T^{i'j'}, \tag{1.1}$$

$$L'^{j}_i = x^{i'}_i x^j_{j'} L_{i'}{}^{j'}. \tag{1.2}$$

---

[11]) Nel senso che su esso sia stata scelta una faccia da ritenersi positiva.

[12]) È quanto si deve ritenere quando si supponga che le forze di massa agenti sull'elemento di volume di C' e le forze esterne agenti sull'elemento di superficie di Σ' (Σ' superficie contorno completo di C'), siano riducibili a una forza applicata all'elemento e a una coppia. Cfr., ad es., [8], I, 1.

[13]) Cfr. [5], 5, 7.

[14]) Cfr. [5], 6, 7. In realtà il tensore lagrangiano dei momenti ivi definito differisce per il fattore $| x^{i'}_i |$ dall'analogo tensore definito qua dalle (1.2). Il motivo per cui ho ritenuto opportuno apportare, per il momento, tale modifica nella definizione apparirà chiaro più avanti

Ciò premesso, intendendo

$$\partial_{i'} = \frac{\partial}{\partial x^{i'}}$$

e indicati con $\eta^{i'p'q'}$ il tensore di Ricci (in forma euleriana), con $T^{(i'j')}$ la parte simmetrica di $T^{i'j'}$, con $\delta u_{i'} \equiv \delta x^{i'}$ lo spostamento subito dai punti di C' nel passaggio da detta configurazione a un'altra infinitamente prossima e con

$$\delta e_{i'j'} = \frac{1}{2}(\partial_{i'}\delta u_{j'} + \partial_{j'}\delta u_{i'}), \tag{1.3}$$

$$\delta r^{i'} = \frac{1}{2}\eta^{i'p'q'}\partial_{p'}\delta u_{q'} \tag{1.4}$$

rispettivamente le caratteristiche di deformazione e il vettore della rotazione locale che gli elementi di $\mathscr{C}$ subiscono nel suddetto passaggio, il corrispondente lavoro specifico delle forze interne di contatto relativo alla configurazione C' è espresso da [15])

$$\delta l'^{(i)} = T^{(i'j')}\delta e_{i'j'} + L_{i'}{}^{j'}\partial_{j'}\delta r^{i'}. \tag{1.5}$$

Posto

$$g'_{ij} = x_i^{i'} x_j^{i'} \tag{1.6}$$

e indicato con e_{ij} il tensore di deformazione, definito dalle [16])

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(g'_{ij} - \delta_{ij}), \tag{1.7}$$

(si veda, ad es., l'analogia che consegue, nella forma, fra le (4.2) e le (1.1), fra le (8.1) e le (7.5'), ecc.

Nelle (1.1), (1.2) e nel seguito è sottinteso il simbolo di somma rispetto agli indici ripetuti.

[15]) La deduzione di (1.5) è in tutto analoga a quella contenuta in [6], 16.

[16]) δ_{ij} è il simbolo di Kronecker, come pure δ_i^j.

risulta, tenendo presenti le (1.3),

$$x_i^{i'} x_j^{j'} \delta e_{i'j'} = \frac{1}{2}(x_j^{j'} \delta x_i^{i'} + x_i^{i'} \delta x_j^{j'}) = \delta e_{ij}, \tag{1.8}$$

in quanto è, ovviamente,

$$\partial_i \delta x^{i'} = \delta x_i^{i'}. \tag{1.9}$$

Pertanto, tenuto presente che il legame fra il lavoro specifico delle forze interne di contatto relativo alla configurazione attuale C' e quello, $\delta l^{(i)}$, relativo alla configurazione di riferimento C è dato da

$$\delta l^{(i)} = |\, x_i^{i'} \,|\, \delta l'^{(i)},$$

si ha, per le (1.1), (1.2),

$$\delta l^{(i)} = T^{(ij)} \delta e_{ij} + |\, x_i^{i'} \,|\, L_i'^{j} x_{i'}^{i} \partial_j \delta r^{i'}, \tag{1.10}$$

il significato di $T^{(ij)}$ e di ∂_j essendo ormai ovvio.

2. Una conveniente trasformazione dell'espressione del lavoro delle forze interne.

Fatte le posizioni

$$\partial_j x_i^{i'} = x_{ij}^{i'}, \qquad \partial_{j'} x_{i'}^{i} = x_{i'j'}^{i},$$

dall'identità $x_{p'}^{l} x_h^{p'} = \delta_h^l$ si ricava

$$\partial_j x_{p'}^{l} = - x_{jh}^{l'} x_{l'}^{l} x_{p'}^{h}. \tag{2.1}$$

Porrò inoltre

$$\mu'^{i}{}_{j} = \frac{1}{2}\, \eta^{ipq} x_{jp}^{i'} x_q^{i'}, \tag{2.2}$$

ove η^{ipq} è il tensore di Ricci in forma lagrangiana. E anzi risulta

$$\eta^{ipq} = |\, x^{i'}_{i} \,|\, x^{i}_{i'} x^{p}_{p'} x^{q}_{q'} \eta^{i'p'q'} . \tag{2.3}$$

Ciò premesso, tenuto presente che, per le (1.9), le (1.4) si possono scrivere

$$\delta r^{i'} = \frac{1}{2} \eta^{i'p'q'} x^{l}_{p'} \delta x^{q'}_{l} , \tag{2.4}$$

e che, analogamente alle (1.9), risulta

$$\partial_j \delta x^{q'}_{l} = \delta x^{q'}_{jl} , \tag{2.5}$$

si ha

$$\begin{aligned} x^{i}_{i'} \partial_j \delta r^{i'} &= \frac{1}{2} \eta^{i'p'q'} x^{i}_{i'} \partial_j (x^{l}_{p'} \delta x^{q'}_{l}) = \\ &= \frac{1}{2} \,|\, x^{i}_{i'} \,|\, \eta^{ipq} x^{p'}_{p} x^{q'}_{q} (x^{l}_{p'} \delta x^{q'}_{jl} - x^{l'}_{jh} x^{l}_{l'} x^{h}_{p'} \delta x^{q'}_{l}) = \\ &= |\, x^{i}_{i'} \,|\, [\delta \mu'^{i}{}_{j} - \frac{1}{2} \eta^{ipq} (x^{q'}_{jp} \delta x^{q'}_{q} + x^{l'}_{jp} x^{l}_{l'} x^{q'}_{q} \delta x^{q'}_{l})] = \\ &= |\, x^{i}_{i'} \,|\, [\delta \mu'^{i}{}_{j} - \frac{1}{2} \eta^{ipq} x^{l'}_{jp} x^{l}_{l'} (x^{q'}_{l} \delta x^{q'}_{q} + x^{q'}_{q} \delta x^{q'}_{l})], \end{aligned}$$

ossia, ricordando le (1.8),

$$x^{i}_{i'} \partial_j \delta r^{i'} = |\, x^{i}_{i'} \,|\, (\delta \mu'^{i}{}_{j} + \eta^{ipq} x^{l'}_{jp} x^{l}_{l'} \delta e_{lq}) .$$

Tenendo quindi presente che il tensore e_{ij} è simmetrico, si ha

$$x^{i}_{i'} \partial_j \delta r^{i'} = |\, x^{i}_{i'} \,|\, (\delta \mu'^{i}{}_{j} + \eta^{ip(h} x^{k)}_{l'} x^{l'}_{jp} \delta e_{hk}) , \tag{2.6}$$

ove è da intendersi

$$\eta^{ip(h} x^{k)}_{l'} = \frac{1}{2} (\eta^{iph} x^{k}_{l'} + \eta^{ipk} x^{h}_{l'}) .$$

Per brevità, nel seguito porrò

$$\eta^{ip(h}x^{k)}_{l'}\, x^{l'}_{jp} = \omega'^{hki}{}_j \tag{2.7}$$

sicchè, sostituente le (2.6) nella (1.10), si ha in definitiva

$$\delta l^{(i)} = (T^{(ij)} + \omega'^{ijh}{}_k L'^k_h)\delta e_{ij} + L'^j_i \delta\mu'^i{}_j, \tag{2.8}$$

espressione che presenta un indubbio vantaggio sulla (1.10) in quanto, quando si supponga il sistema a trasformazioni reversibili, *esprime chiaramente di quali variabili sia da ritenersi funzione l'energia libera termodinamica* [17]).

Il tensore $\mu'^i{}_j$ introdotto nel presente numero differisce unicamente per il fattore $\frac{3}{2}$ dall'analogo tensore introdotto, per altra via, da Toupin [18]) e coincide con quello introdotto da Mindlin e Tiersten [19]). Esso ha un ben preciso significato meccanico: ricordate le posizioni (2.2) e (1.6), si hanno le

$$\mu'^i{}_j = \frac{1}{2}\eta^{ipq}\partial_p g'_{qj} \tag{2.9}$$

che, qualora si ricordino le (1.7), dàn luogo alle

$$\mu'^i{}_j = \eta^{ipq}\partial_p e_{qj} \tag{2.10}$$

le quali esprimono che il *tensore $\mu'^i{}_j$ è il rotore del tensore di deformazione* [20]).

---

[17]) È immediato constatare che l'energia libera termodinamica si può anche considerare funzione delle variabili $x^{i'}_i$, $x^{i'}_{ij}$ in quanto (si veda la deduzione delle (2.6) e si ricordino le (1.8)) è

$$x^{i'}_i \partial_j \delta r^{i'} = \frac{1}{2} \mid x^i_{i'} \mid \eta^{ipq} x^{q'}_q (\delta x^{q'}_{jp} - x^{l'}_{jp} x^l_{l'} \delta x^{q'}_l),$$
$$\delta e_{ij} = x^{i'}_{(i} \delta x^{i'}_{j)}.$$

[18]) Cfr. [10], 6.

[19]) Cfr. [9], 2.

[20]) Per la definizione di rotore di un tensore si veda, ad es., [4], pp. 140-141.

3. Decomposizione dei tensori $L_i'^j$, $L_{i'}{}^{j'}$ nelle due parti non lavorante e puramente lavorante.

Dalle (2.2) segue immediatamente che *le variabili* $\mu'^i{}_j$ *sono soggette al legame*

$$(3.1) \qquad \mu'^i{}_i = 0,$$

da cui segue che per le variazioni $\delta\mu'^i{}_j$ deve essere

$$(3.2) \qquad \delta\mu'^i{}_i = 0,$$

ossia che *le* $\delta\mu'^i{}_j$ *sono a invariante lineare nullo.*

La (3.1) rappresenta l'unico legame in termini finiti a cui sono soggette le variabili $\mu'^i{}_j$ [21]).

Inoltre, analogamente alla (3.1), si ha

$$(3.3) \qquad \omega'^{hki}{}_i = 0,$$

come subito segue dalle (2.7).

Sulla base delle (3.2), (3.3) e (2.8), è interessante osservare che, *non appena il tensore* $L_i'^j$ *risulta isotropo, ossia non appena risulta*

$$L_i'^j = q\delta_i^j,$$

con q *arbitrario, risulta nullo il contributo dato per ogni spostamento infinitesimo da* $L_i'^j$ *al lavoro* $\delta l^{(i)}$, *la cui espressione si riduce a quella del caso simmetrico.*

Viceversa, *se risulta*

$$L_i'^j \delta\mu'^i{}_j = 0$$

per ogni spostamento infinitesimo del sistema, dall'unicità del legame (3.1) *segue che il tensore* $L_i'^j$ *deve essere isotropo.*

Ne segue che, *non appena* $L_i'^j$ *ha l'invariante lineare uguale a*

---

[21]) La dimostrazione dell'unicità di tale legame è data in [7], dove si prova inoltre che detto legame si conserva unico anche per i sistemi soggetti a vincoli interni.

zero, il suo contributo al $\delta l^{(i)}$ per ogni spostamento infinitesimo del sistema risulta nullo se e soltanto se esso è il tensore nullo.

Infatti, per quanto ora visto, è

$$\omega'^{ijh}{}_k L'^{k}_{h} \delta e_{ij} + L'^{j}_{i} \delta \mu'^{i}{}_{j} = 0$$

per ogni spostamento infinitesimo del sistema se e soltanto se L'^{j}_{i} è isotropo, ossia, dovendo per ipotesi essere $L'^{i}_{i} = 0$, soltanto se è $q = 0$, cioè soltanto se è $L'^{j}_{i} = 0$.

Vien quindi naturale assegnare la denominazione di *non lavorante* al tensore L'^{j}_{i} quando esso è isotropo e di *puramente lavorante* quando esso non è nullo e ha l'invariante lineare uguale a zero [22]).

Da quanto ora esposto e tenendo presente che ogni tensore doppio si può decomporre in uno e in un sol modo in un tensore isotropo (parte scalare) e in un tensore a invariante lineare nullo (parte deviatrice) [23]), segue che *il tensore L'^{j}_{i} si può decomporre in uno e in un sol modo in due parti, di cui una, $L'^{(0)j}_{i}$, non lavorante e l'altra, $L'^{(1)j}_{i}$, puramente lavorante. Esse sono rispettivamente la parte scalare e la parte deviatrice del tensore L'^{j}_{i}.* Si ha quindi

$$L'^{(0)j}_{i} = \frac{1}{3} L' \delta^{j}_{i}, \qquad L'^{(1)j}_{i} = L'^{j}_{i} - \frac{1}{3} L' \delta^{j}_{i}, \tag{3.4}$$

ove con L' ho indicato l'invariante lineare di L'^{j}_{i} [24]).

---

[22]) La terminologia ora introdotta è di A. Bressan. Cfr. [2], 4 ove, identificando la configurazione di riferimento C con la configurazione attuale C', è effettuata la decomposizione del tensore $L_{i'}{}^{j'}$. Tale decomposizione però, per il procedimento con cui è stata ottenuta e per il modo con cui è stato ivi definito il tensore lagrangiano dei momenti, non può essere trasportata a quest'ultimo, conservandone in particolare immutato il carattere tensoriale. Detto trasporto, con un'opportuna accortezza, verrà effettuato per tale tensore nel n. 14 della presente memoria.

[23]) Cfr., ad es., [1], a); [10], 4.

[24]) È ovvio che anche per il tensore T^{ij} si può operare la decomposizione nelle due parti non lavorante e puramente lavorante: esse sono date rispettivamente da $T^{(ij)}$ e da $T^{[ij]}$, quest'ultima essendo la parte emisimmetrica di T^{ij}.

I due tensori $L_i'^{(0)j}$ e $L_i'^{(1)j}$ sono fra loro ortogonali, nel senso che si ha $L_i'^{(0)j}\,L_i'^{(1)j} = 0$; inoltre, definito *scarto* fra il tensore $L_i'^{j}$ e il tensore isotropo $q\delta_i^j$ la differenza $S_i'^{j} = L_i'^{j} - q\delta_k^j$ e modulo dello scarto la determinazione positiva della radice quadrata di $S_i'^{j}S_i'^{j}$, $L_i'^{(0)j}$ *è*, come subito si può verificare [25]), *il tensore per il quale il modulo dello scarto da $L_i'^{j}$ risulta minimo.* E tale scarto è proprio la parte puramente lavorante di $L'{}_i{}^j$.

La stessa decomposizione nelle due parti non lavorante e puramente lavorante vale per il tensore $L_{i'}{}^{j'}$: basta osservare che, ricordate le (1.4), risulta

$$\partial_{i'}\delta r^{i'} = 0$$

(equivalente euleriana della (3.2)) per avere che, *non appena $L_{i'}{}^{j'}$ è isotropo, il contributo da esso dato per ogni spostamento infinitesimo al $\delta l'^{(i)}$ risulta nullo* (v. la (1.5)). Ecc.

Le espressioni di $L_{i'}^{(0)j'}$, $L_{i'}^{(1)j'}$ sono date dalle analoghe delle (3.4) [26]):

$$L_{i'}^{(0)j'} = \frac{1}{3}\,L'\delta_{i'}^{j'}, \qquad L_{i'}^{(1)j} = L_{i'}{}^{j'} - \frac{1}{3}\,L'\delta_{i'}^{j'} \tag{3.4'}$$

e il legame fra $L_i'^{(0)j}$ e $L_{i'}^{(0)j'}$, $L_i'^{(1)j}$ e $L_{i'}^{(1)j'}$ risulta ancora espresso da relazioni analoghe alle (1.2):

$$L_i'^{(0)j} = x_i^{i'}x_{j'}^{j}L_{i'}^{(0)j'}, \qquad L_i'^{(1)j} = x_i^{i'}x_{j'}^{j}L_{i'}^{(1)j'}. \tag{3.5}$$

Da quanto ora visto segue che l'espressione (2.8) di $\delta l^{(i)}$ si può sostituire con

$$\delta l^{(i)} = (T^{(ij)} + \omega'^{ijh}{}_k L_h'^{(1)k})\delta e_{ij} + L_i'^{(1)j}\delta\mu'^i{}_j, \tag{3.6}$$

mentre, tenendo presenti le

$$L_{i'}{}^{j'}\partial_{j'}\delta r^{i'} = L_i'^{j}x_{i'}^{i}\partial_j\delta r^{i'}$$

---

25) Cfr. [3], 1.

26) Si tenga presente che, stanti le (1.2), l'invariante lineare di $L_{i'}{}^{j'}$ coincide con l'invariante lineare di $L'{}_i{}^j$.

e le (2.6), la (1.5) si trasforma nella

$$(3.7) \qquad \delta l'^{(i)} = T^{(i'j')}\delta e_{i'j'} + |\, x^i_{,i'} \,|\, L'^{(i)j}_i(\omega'^{hki}{}_j \delta e_{hk} + \delta \mu'^i{}_j)$$

che, non appena si ricordino le (1.8), (2.7), coincide con l'analoga stabilita, con tecnica di calcolo piuttosto laboriosa, da Mindlin e Tiersten [27]).

Nella presente deduzione si è inoltre provato che, essendo unico il legame (3.1), *le due parti non lavorante e puramente lavorante di* L'^j_i *sono proprio espresse dalla sua parte scalare e dalla sua parte deviatrice.*

4. Introduzione dei tensori $L^{i'j'l'}$, L^{ijl}, μ_{ijl}.

Qualora si convenga di rappresentare le coppie con tensori doppi emisimmetrici invece che con vettori (cfr. il n. 1), i tensori $L_{i'}{}^{j'}$, L'^j_i vanno sostituiti con i tensori $L^{i'j'l'}$, L^{ijl}, definiti dalle [28])

$$(4.1) \qquad L^{i'j'l'} = \eta^{i'j'h'} L'_{h'}{}^{l'}, \qquad L^{ijl} = \eta^{ijh} L'^l_h .$$

Il legame che fra essi intercorre, come subito si ottiene dalle (1.2), qualora si tengano presenti le (2.3), risulta espresso dalle [29])

$$(4.2) \qquad L^{ijl} = |\, x^{i'}_i \,|\, x^i_{,i'} x^j_{,j'} x^l_{,l'} L^{i'j'l'},$$

in tutto analoghe, nella forma, alle (1.1).

Ai due tensori ora introdotti conservo la denominazione di *tensori dei momenti superficiali* [30]), precisando eventualmente il loro carattere di tensori tripli ad evitare che possano essere confusi con i tensori doppi $L_{i'}{}^{j'}$, L'^j_i.

Introdurrò inoltre, accanto al tensore di Ricci, il tensore di Kronecker generalizzato δ^{hk}_{ij}, definito da

$$\delta^{hk}_{ij} = \delta^h_i \delta^k_j - \delta^k_i \delta^h_j ,$$

[27]) Cfr. [9], 2.
[28]) Cfr. [5], 4, 5, 6, 7.
[29]) Cfr. [5], 6.
[30]) Cfr. [5], 5.

per il quale risulta

$$\eta^{hkl}\eta_{ijl} = \delta^{hk}_{ij}. \tag{4.3}$$

Ciò premesso, pongo, in analogia alle (4.1),

$$\mu_{ijl} = \eta_{ijp}\mu'^{p}{}_{l}, \tag{4.4}$$

ossia, ricordando le (2.2), (4.3),

$$\mu_{ijl} = \frac{1}{2}\,\delta^{hk}_{ij}x^{i'}_{lh}x^{i'}_{k}, \tag{4.4'}$$

e pongo ancora

$$\omega^{hk}{}_{ijl} = \eta_{ijp}\omega'^{hkp}{}_{l} \tag{4.5}$$

ossia, per le (2.7) e con il significato dei simboli ormai evidente

$$\omega^{hk}{}_{ijl} = \delta^{p(h}_{ij}x^{k)}_{l'}\,x^{l'}_{lp}. \tag{4.5'}$$

Con le posizioni ora fatte l'espressione (2.8) di $\delta l^{(i)}$ si trasforma nella [31])

$$\delta l^{(i)} = \left(T^{(ij)} + \frac{1}{2}\,\omega^{ij}{}_{hkl}L^{hkl}\right)\delta e_{ij} + \frac{1}{2}\,L^{ijl}\delta\mu_{ijl} \tag{4.6}$$

dalla quale si deduce che, quando il sistema è a trasformazioni reversibili, *l'energia libera si può pure ritenere funzione delle variabili* e_{ij}, μ_{ijl}. Queste ultime differiscono unicamente per il fattore $\frac{3}{2}$ dalla analoghe introdotte, con diverso procedimento, da Toupin [32]).

[31]) Si tenga presente che è

$$\eta^{hki}\eta_{hkj} = 2\delta^{i}_{j}.$$

[32]) Cfr. [10], 5.

5. Decomposizione dei tensori L^{ijl}, $L^{i'j'l'}$.

Stanti le seconde delle (4.1), la parte $L^{(o)ijl}$ non lavorante e la parte $L^{(l)ijl}$ puramente lavorante di L^{ijl} risultano evidentemente espresse da

$$L^{(o)ijl} = \eta^{ijh} L'^{(o)l}_{h}, \qquad L^{(l)ijl} = \eta^{ijh} L'^{(l)l}_{h} \tag{5.1}$$

sicchè, ricordate le (3.4), si ottengono le

$$\left\{ \begin{aligned} L^{(o)ijl} &= \frac{1}{3} L' \eta^{ijl} = L^{[ijl]}, \\ L^{(l)ijl} &= L^{ijl} - L^{[ijl]} = \frac{1}{3}(2L^{ijl} + L^{lji} - L^{lij}), \end{aligned} \right. \tag{5.2}$$

ove $L^{[ijl]}$ sta ad indicare la parte emisimmetrica del tensore L^{ijl} [33]:

$$L^{[ijl]} = \frac{1}{3}(L^{ijl} + L^{jli} + L^{lij}).$$

L'ultimo membro delle seconde delle (5.2) coincide con la parte di L^{ijl} che Toupin chiama *principale* [34]. Si può quindi concludere che $L^{(l)ijl}$, *parte puramente lavorante di* L^{ijl}, *è data dalla parte principale di detto tensore mentre* $L^{(o)ijl}$, *parte non lavorante, è data dalla parte emisimmetrica.*

Anche ora *tali due parti sono fra loro ortogonali* [35]) e anche

---

[33]) Si tenga presente che L^{ijl} è emisimmetrico rispetto ai primi due indici.

[34]) Essa è una delle quattro parti *irriducibili* del tensore L^{ijl}. Le rimanenti parti sono date dalla emisimmetrica $L^{[ijl]}$, dalla simmetrica $L^{(ijl)}$, che è nulla, e dalla

$$\overline{L}^{ijl} = \frac{1}{3}(L^{ijl} + L^{jil} - L^{lij} - L^{ilj}),$$

anch'essa nulla. Cfr., anche per la bibliografia, [10], 4.

[35]) Nel senso che è

$$L^{(o)ijl} L^{(l)ijl} = 0.$$

ora si può provare che, con la definizione di scarto ormai ovvia, *$L^{(o)ijl}$ è il tensore del tipo $q\eta^{ijl}$ che è di minimo scarto dal tensore L^{ijl}.*

Stante la decomposizione ora operata del tensore L^{ijl}, all'espressione (4.6) del $\delta l^{(i)}$ si può sostituire la seguente

$$\delta l^{(i)} = \left(T^{(ij)} + \frac{1}{2}\,\omega^{ij}{}_{hkl}L^{(l)hkl}\right)\delta e_{ij} + \frac{1}{2}\,L^{(l)ijl}\delta\mu_{ijl}. \tag{5.3}$$

La stessa decomposizione e gli stessi risultati ora dedotti per il tensore L^{ijl} valgono per il tensore $L^{i'j'l'}$, ossia *anche per tale tensore le due parti non lavorante e puramente lavorante coincidono rispettivamente con la sua parte emisimmetrica e con la sua parte principale.* E il legame fra $L^{(o)ijl}$ e $L^{(o)i'j'l'}$, $L^{(l)ijl}$ e $L^{(l)i'j'l'}$ risulta ancora espresso da relazioni in tutto analoghe alle (4.2).

6. Intervento dell'energia libera termodinamica. Equazioni di Toupin.

Supposto il sistema a trasformazioni reversibili, in corrispondenza a ogni trasformazione infinitesima del sistema a partire dallo stato attuale vale la

$$\delta F = -\,\delta l^{(i)} - E'\delta\theta', \tag{6.1}$$

con F energia libera termodinamica, E' e θ' entropia e temperatura dello stato attuale.

Qualora nella (6.1) si sostituisca a $\delta l^{(i)}$ l'espressione (3.6), si riconosce che F viene a presentarsi funzione, oltre che delle x^i (se $\mathscr{C}$ non è omogeneo in C) e delle temperature in C e C', delle variabili e_{ij}, $\mu'^{i}{}_{j}$. Stanti però le

$$e_{ij} = e_{ji}$$

e le (3.1), dette variabili non risultano indipendenti, con la conseguenza che viene a presentarsi una indeterminazione nell'espressione effettiva dell'energia libera e delle sue derivate parziali, indeterminazione che risulta però eliminata non appena si convenga di intendere le suddette variabili indipendenti e di restringere la dipendenza funzionale di F da esse in modo che risulti

$$(6.2)\qquad \frac{\partial F}{\partial e_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial e_{ji}}, \qquad \delta^i_j \frac{\partial F}{\partial \mu'^i{}_j} = 0 .$$

E infatti dalle (6.1), (3.2) e dalle

$$\delta e_{ij} - \delta e_{ji} = 0$$

che conseguono dalla simmetria delle e_{ij}, discende che è

$$\frac{\partial F}{\partial e_{ij}} = - T^{(ij)} - \omega'^{ijh}{}_k L'^{(l)k}_h + p^{ij},$$

$$\frac{\partial F}{\partial e_{ji}} = - T^{(ji)} - \omega'^{jih}{}_k L'^{(l)k}_h - p^{ij},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu'^i{}_j} = - L'^{(l)j}_i + q\delta^j_i,$$

dove p^{ij} e q sono parametri che, essendo $\omega'^{jih}{}_k = \omega'^{ijh}{}_k$ e $L'^{(l)i}_i = 0$, risultano nulli non appena la funzione F è supposta soddisfare alle (6.2).

Pertanto, con la convenzione ora introdotta, il ruolo della (6.1) si esaurisce nell'imporre che risulti

$$(6.3)\qquad T^{(ij)} = - \frac{\partial F}{\partial e_{ij}} + \omega'^{ijh}{}_k \frac{\partial F}{\partial \mu'^h{}_k},$$

$$(6.4)\qquad L'^{(l)j}_i = - \frac{\partial F}{\partial \mu'^i{}_j},$$

$$E' = - \frac{\partial F}{\partial \theta'},$$

dalle prime delle quali, stante la simmetria delle $\omega^{ijh}{}_k$ rispetto agli indici i, j, segue che la funzione F è soggetta unicamente alle condizioni (6.2).

Le (6.3), (6.4) esprimono le parti puramente lavoranti dei due tensori lagrangiani T^{ij} e $L'_i{}^j$ in funzione delle derivate parziali dell'energia libera, *parti che risultano completamente determinate* *non appena sia assegnata l'espressione della suddetta funzione termodinamica.*

Tenute presenti le

$$T^{(ij)} = | x^{i'}_{i} | \, x^{i}_{i'} x^{j}_{j'} T^{(i'j')}, \tag{6.5}$$

le seconde delle (3.5) e le (2.7), dalle (6.3), (6.4) seguono poi le

$$T^{(ij)} = - \, | x^{i}_{i'} | \left(x^{i'}_{i} x^{j'}_{j} \frac{\partial F}{\partial e_{ij}} + \eta^{hpq} x^{(i'}_{p} x^{j')}_{kq} \frac{\partial F}{\partial \mu'^{h}_{k}} \right), \tag{6.3'}$$

$$L^{(l)j'}_{i'} = - \, x^{i}_{i'} x^{j'}_{j} \frac{\partial F}{\partial \mu'^{i}_{j}}, \tag{6.4'}$$

ove è ovvio il significato da attribuire a $x^{(i'}_{p} x^{j')}_{kq}$ e che sostanzialmente coincidono con le analoghe stabilite da Toupin e con quelle stabilite da Mindlin e Tiersten [36]).

* * *

Qualora nella (6.1) si sostituisca, invece che la (3.6), la (5.3), l'energia libera termodinamica viene a presentarsi funzione delle e_{ij}, μ_{ijl} e, con la convenzione in precedenza introdotta di ritenere indipendenti dette variabili e di restringere opportunamente la dipendenza funzionale dell'energia libera da esse [37]), risulta

$$T^{(ij)} = - \frac{\partial F}{\partial e_{ij}} + \omega^{ij}{}_{pql} \frac{\partial F}{\partial \mu_{pql}}, \tag{6.6}$$

---

[36]) Cfr. le (6.8), (6.11) di [10] e le (2.24) di [9], la cui lieve differenza con le (6.3'), (6.4') è dovuta al fatto che sia Toupin che Mindlin e Tiersten nelle loro deduzioni partono, invece che dalla F, da una funzione $\overline{F}$ il cui legame con la F è precisato da

$$\mu \delta \overline{F} = - \, \delta F,$$

μ essendo la densità di $\mathscr{C}$ in C'.

[37]) Devono annullarsi, oltre che la parte emisimmetrica di $\frac{\partial F}{\partial e_{ij}}$, tutte le parti irriducibili di $\frac{\partial F}{\partial \mu_{ijl}}$ ad eccezione della parte principale. Cfr. [10], 5.

$$L^{(l)ijl} = - 2 \frac{\partial F}{\partial \mu_{ijl}}. \tag{6.7}$$

Le (6.6), (6.7) si possono d'altronde agevolmente ottenere dalle (6.3), (6.4) qualora si tengano presenti le (5.1), le

$$\frac{\partial F}{\partial \mu'^{i}{}_{j}} = \frac{\partial F}{\partial \mu_{pqj}} \eta_{ipq},$$

conseguenza delle (4.4), le (4.3), le

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_{ijl}} = - \frac{\partial F}{\partial \mu_{jil}},$$

conseguenza della convenzione introdotta all'inizio del presente n., e le (4.5).

Dalle (6.6), (6.7), o direttamente dalle (6.3′), (6.4′), seguono le

$$T^{(i'j')} = - \mid x^{i}_{i'} \mid \left(x^{i'}_{i} x^{j'}_{j} \frac{\partial F}{\partial e_{ij}} + 2 x^{(i'}_{p} x^{j')}_{lq} \frac{\partial F}{\partial \mu_{qpl}} \right), \tag{6.6′}$$

$$L^{(l)i'j'l'} = - 2 \mid x^{i}_{i'} \mid x^{i'}_{i} x^{j'}_{j} x^{l'}_{l} \frac{\partial F}{\partial \mu_{ijl}}. \tag{6.7′}$$

E ancora, risultando

$$L^{i(jl)} = L^{(l)i(jl)},$$

ove è da intendersi

$$L^{i(jl)} = \frac{1}{2} (L^{ijl} + L^{ilj}),$$

$$L^{(l)i(jl)} = \frac{1}{2} (L^{(l)ijl} + L^{(l)ilj}),$$

dalle (6.7) seguono le

$$L^{i(jl)} = - 2 \delta^{(j}_{r} \delta^{l)}_{s} \frac{\partial F}{\partial \mu_{irs}} \tag{6.8}$$

e infine da queste, o direttamente dalle (6.7′), le

$$L^{i'(j'l')} = -2\,|\,x^{i}_{i'}\,|\,x^{i'}_{i}x^{(j'}_{j}x^{l')}_{l}\frac{\partial F}{\partial \mu_{ijl}}. \tag{6.8′}$$

Le (6.6′), (6.8′) coincidono con le analoghe stabilite con diverso procedimento da Toupin [38]).

7. Una ulteriore trasformazione dell'espressione del lavoro delle forze interne.

Fatte, con Grioli [39]), le posizioni

$$\mu^{i'}{}_{j} = \frac{1}{2}\eta^{i'p'q'}x^{l}_{p'}x^{q'}_{lj} \tag{7.1}$$

e ricordate le (2.1), (2.3), (2.4) e le

$$\delta x^{l}_{p'} = -\,x^{p}_{p'}x^{l}_{l'}\delta x^{l'}_{p}, \tag{7.2}$$

conseguenza immediata delle $x^{l}_{p'}x^{p'}_{p} = \delta^{l}_{p}$, risulta

$$\partial_j \delta r^{i'} = \frac{1}{2}\eta^{i'p'q'}\partial_j(x^{l}_{p'}\partial x^{q'}_{l}) =$$

$$\frac{1}{2}\eta^{i'p'q'}[-\,x^{l'}_{jp}x^{l}_{l'}x^{p}_{p'}\delta x^{q'}_{l} + \delta(x^{l}_{p'}x^{q'}_{lj}) + x^{q'}_{jl}x^{p}_{p'}x^{l}_{l'}\delta x^{l'}_{p}] =$$

$$= \delta\mu^{i'}{}_{j} + \frac{1}{2}\eta^{i'p'q'}(x^{h}_{p'}x^{l}_{h'}x^{q}_{l'} - x^{h}_{l'}x^{l}_{p'}x^{q}_{h'})x^{q'}_{q}x^{l'}_{jl}\delta x^{h'}_{h}.$$

Pertanto, posto

$$\frac{1}{2}\,\eta^{i'p'q'}(x^{h}_{p'}x^{l}_{h'}x^{q}_{l'} - x^{h}_{l'}x^{l}_{p'}x^{q}_{h'})x^{q'}_{q}x^{l'}_{jl} = \omega^{h}{}_{h'}{}^{i'}{}_{j} \tag{7.3}$$

---

[38]) Cfr. le (5.19) di [10].
[39]) Cfr. [8], 1, 5.

e introdotti i tensori $T^{(i'j)}(\equiv T^{(ji')})$, $L_{i'}{}^{j}$, definiti da [40])

$$(7.4) \qquad T^{(i'j)} = |x_i^{i'}|\, x_{j'}^{j} T^{(i'j')},$$

$$(7.5) \qquad L_{i'}{}^{j} = |x_i^{i'}|\, x_{j'}^{j} L_{i'}{}^{j'},$$

ossia, per le (6.5) e le (1.2), espressi da

$$(7.4') \qquad T^{(i'j)} = x_i^{i'} T^{(ij)},$$

$$(7.5') \qquad L_{i'}{}^{j} = |x_i^{i'}|\, x_{i'}^{i} L_i'^{j},$$

la (1.10) diventa, ricordando anche le (1.8),

$$(7.6) \qquad \delta l^{(i)} = (T^{(i'i)} + \omega^{i}{}_{i'}{}^{h'}{}_{h} L_{h'}{}^{h})\delta x_i^{i'} + L_{i'}{}^{i}\delta\mu^{i'}{}_{i}$$

dalla quale appare evidente che nel caso dei sistemi a trasformazioni reversibili, come ha osservato Grioli [41]), *l'energia libera termodinamica si può anche ritenere funzione delle variabili* $x_i^{i'}$, $\mu^{i'}{}_{i}$.

8. Legame fra le variabili $\mu^{i'}{}_{j}$, $\mu'^{i}{}_{j}$ e le variabili $x_i^{i'}$, $\mu^{i'}_{j}$.

Ricordate le (2.3), dalle (7.1) seguono le

$$\mu^{i'}{}_{j} = \frac{1}{2}|x_{i'}^{i}|\, \eta^{ipq} x_i^{i'} x_q^{q'} x_{jp}^{q'}$$

che, ricordate le (2.2), dàn luogo alle

$$(8.1) \qquad \mu^{i'}{}_{j} = |x_{i'}^{i}|\, x_i^{i'} \mu'^{i}{}_{j},$$

[40]) Essi sono pertanto definiti allo stesso modo del tensore $T^{i'j}$ di Piola-Kirchhoff della teoria simmetrica (cfr. [11], 210):

$$T^{i'j} = |x_i^{i'}|\, x_{j'}^{j} T^{i'j'}.$$

$L_{i'}{}^{j}$ coincide con il tensore definito dalle (7.7′) di [5] e con il tensore definito dalle (32) di [8].

[41]) Cfr. [8], 1, 5.

esprimenti il legame che intercorre fra le variabili $\mu^{i'}{}_j$ e le variabili $\mu'^{i}{}_j$. Esse sono, nella forma, analoghe alle (7.5′).

Dalle (8.1) seguono le

$$\mu'^{i}{}_j = |\, x^{i'}_{i} \,|\, x^{i}_{i'} \mu^{i'}{}_j$$

da cui, ricordata la (3.1), si deduce che *le variabili* $x^{i'}_{i}$, $\mu^{i'}{}_j$ *non sono indipendenti, bensì soggette al legame* [42])

$$x^{i}_{i'} \mu^{i'}{}_i = 0\,. \tag{8.2}$$

Ricordate le (7.2), si ha pertanto che le variazioni $\delta x^{i'}_{i}$, $\delta \mu^{i'}{}_i$ non sono arbitrarie ma devono soddisfare alla

$$\mu^{i'}{}_i x^{j}_{i'} x^{i}_{j'} \delta x^{j'}_{j} - x^{i}_{i'} \delta \mu^{i'}{}_i = 0\,. \tag{8.3}$$

9. Equazioni di Grioli.

Supposto il sistema a trasformazioni reversibili, vale la (6.1) che, qualora si assuma come espressione del $\delta l^{(i)}$ la (7.6), andrà considerata valida non per variazioni arbitrarie delle $x^{i'}_{i}$, $\mu^{i'}{}_i$ ma, stante il legame (8.2), per tutte e sole quelle che soddisfano alla (8.3). Pertanto la (6.1) si esaurisce nell'imporre l'esistenza di una scalare q tale da rendere simultaneamente soddisfatte le 16 eguaglianze [43])

$$\frac{\partial F}{\partial x^{i'}_{i}} = - T^{(i'i)} - \omega^{i}{}_{i'}{}^{h'}{}_{h} L_{h'}{}^{h} + q x^{i}_{j'} x^{j}_{i'} \mu^{j'}{}_j\,, \tag{9.1}$$

---

[42]) Si tenga presente che $x^{i}_{i'}$ è uguale al complemento algebrico, diviso per $|\, x^{i'}_{i} \,|$, di $x^{i'}_{i}$ nella matrice $\|\, x^{i'}_{i} \,\|$.

[43]) Naturalmente il legame (8.2) dà origine a una certa indeterminazione nell'espressione effettiva dell'energia libera termodinamica e delle sue derivate parziali, indeterminazione che risulta però evidentemente eliminata non appena si convenga di fare sempre capo a una stessa, ben determinata espressione di F.

$$\frac{\partial F}{\partial \mu^{i'}{}_i} = - L_{i'}{}^i - q x^i_{i'}, \tag{9.2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta'} = - E'.$$

Osservando che, per le (7.3), (7.1), risulta

$$\omega^i{}_{i'}{}^{h'}{}_h x^h_{h'} = - x^i_{j'} x^j_{i'} \mu^{j'}{}_j,$$

dalle (9.1), (9.2) si ricava

$$T^{(i'i)} = - \frac{\partial F}{\partial x^{i'}_i} + \omega^i{}_{i'}{}^{h'}{}_h \frac{\partial F}{\partial \mu^{h'}{}_h}, \tag{9.3}$$

$$L_{i'}{}^i = - \frac{\partial F}{\partial \mu^{i'}{}_i} - q x^i_{i'}, \tag{9.4}$$

nelle prime delle quali non v'è più traccia del parametro q.

Le (9.3), (9.4) sono state stabilite, in forma equivalente ma un po' differente dall'attuale, da Grioli [44]) e, successivamente, con diverso metodo di calcolo, da Mindlin e Tiersten [45]) e da A. Bressan [46]).

* * *

Dalle (9.3), ricordate le (7.4), seguono le

$$T^{(i'j')} = - \mid x^i_{i'} \mid x^{j'}_i \left(\frac{\partial F}{\partial x^{i'}_i} - \omega^i{}_{i'}{}^{h'}{}_h \frac{\partial F}{\partial \mu^{h'}{}_h} \right)$$

e da queste, dovendo risultare $T^{(i'j')} = T^{(j'i')}$, si deduce che l'espressione di F deve soddisfare alle

$$\delta^{i'j'}_{p'q'} x^{p'}_i \left(\frac{\partial F}{\partial x^{q'}_i} - \omega^i{}_{q'}{}^{h'}{}_h \frac{\partial F}{\partial \mu^{h'}{}_h} \right) = 0,$$

---

44) Cfr. [8], 1, 6.
45) Cfr. [9], 4.
46) Cfr. [2], 4.

che sono equivalenti alle tre

$$\eta_{i'p'q'}\, x^{p'}_{i}\left(\frac{\partial F}{\partial x^{q'}_{i}} - \omega^{i}{}_{q'}{}^{h'}{}_{h}\,\frac{\partial F}{\partial \mu^{h'}{}_{h}}\right) = 0. \tag{9.5}$$

D'altra parte, ricordate le (7.3), (4.3), risulta

$$\begin{aligned}
\eta_{i'p'q'} x^{p'}_{i}\omega^{i}{}_{q'}{}^{h'}{}_{h} &= \\
&= \frac{1}{2}\eta_{i'p'q'}\eta^{h'p's'}(x^{l}_{q'} x^{s'}_{hl} - x^{l}_{s'} x^{q'}_{hl}) = \\
&= \frac{1}{2}\delta^{h's'}_{i'q'}\delta^{j'l'}_{q's'} x^{l}_{j'} x^{l'}_{hl} = \frac{1}{2}\delta^{j'l'}_{i'h'} x^{l}_{j'} x^{l'}_{hl} = \\
&= \eta_{i'h'p'}\mu^{p'}{}_{h} = - \eta_{i'p'h'}\mu^{p'}{}_{h},
\end{aligned}$$

sicchè in definitiva le (9.5) si possono scrivere

$$\eta_{i'p'q'}\left(x^{p'}_{i}\,\frac{\partial F}{\partial x^{q'}_{i}} + \mu^{p'}{}_{i}\,\frac{\partial F}{\partial \mu^{q'}{}_{i}}\right) = 0. \tag{9.6}$$

Tali equazioni, che condizionano l'espressione dell'energia libera termodinamica quando si intenda funzione delle variabili $x^{i'}_{i}$, $\mu^{i'}{}_{i}$, sono dovute a Grioli [47]).

* * *

Ricordate le (7.4'), (7.5'), dalle (9.3), (9.4) seguono le

$$T^{(ij)} = - x^{i}_{i'}\left(\frac{\partial F}{\partial x^{i'}_{j}} - \omega^{j}{}_{i'}{}^{h'}{}_{h}\,\frac{\partial F}{\partial \mu^{h'}{}_{h}}\right), \tag{9.7}$$

$$L'_{i}{}^{j} = - \,|\, x^{i}_{i'} \,|\left(x^{i'}_{i}\,\frac{\partial F}{\partial \mu^{i'}{}_{j}} - q\delta^{j}_{i}\right), \tag{9.8}$$

---

[47]) Cfr. [8], 1, 7, dove sono stabilite con diverso e meno semplice procedimento.

e da queste ultime si ricava

$$L' = - \mid x^i_{i'} \mid \left(x^{i'}_i \frac{\partial F}{\partial \mu^{i'}{}_i} - 3q \right).$$

Ricordate le seconde delle (3.4), si ha quindi che la parte puramente lavorante di $L_i{}^j$ è espressa da

$$L_i'^{(1)j} = - \mid x^i_{i'} \mid \left(x^{i'}_i \frac{\partial F}{\partial \mu^{i'}{}_j} - \frac{1}{3}\, x^{h'}_h \frac{\partial F}{\partial \mu^{h'}{}_h}\, \delta^j_i \right) \tag{9.9}$$

ove, com'è naturale, non v'è traccia del parametro q.

* * *

Anche per il tensore $L_{i'}{}^i$ si può effettuare la decomposizione nelle due parti non lavorante $L^{(0)i}_{i'}$ e puramente lavorante $L^{(1)i}_{i'}$, che risultano espresse da

$$L^{(0)i}_{i'} = \frac{1}{3} \mid x^i_{i'} \mid L' x^i_{i'} \;,$$

$$L^{(1)i}_{i'} = L_{i'}{}^i - \frac{1}{3} \mid x^i_{i'} \mid L' x^i_{i'},$$

ove L' rappresenta ancora l'invariante lineare di $L'_i{}^j$, ecc.

Ed anche ora, in analogia a L^{ijl}, μ_{ijl}, si potrebbero introdurre i tensori $L^{i'j'l}$, $\mu_{i'j'l}$, ecc.

10. Un'altra trasformazione dell'espressione del lavoro delle forze interne.

Grioli ha introdotto, accanto al tensore $L_{i'}{}^{j'} \equiv L^{i'j'}$, il tensore lagrangiano L^{ij}, definito allo stesso modo del tensore T^{ij}, ossia da [48])

$$L^{ij} = \mid x^{i'}_i \mid x^i_{i'} x^j_{j'} L^{i'j'}. \tag{10.1}$$

[48]) Cfr. [8], 1, 3; [5], 7. Esso è il tensore di cui si è fatto cenno nella nota [22]).

Ne segue che, posto, accanto alle (1.6),

(10.2) $$g'^{ij} = x^i_{i'} x^j_{i'},$$

risulta

(10.3) $$L^{ij} = \mid x^{i'}_i \mid g'^{ih} L'_h{}^j$$

e ancora, ricordando le (7.5′),

(10.4) $$L_{i'}{}^j = x^{i'}_i L^{ij}.$$

Posto poi, con A. Bressan [49]),

(10.5) $$\mu_{ij} = x^{i'}_i \mu^{i'}{}_j,$$

(10.6) $$\omega^{hk}{}_{ij} = (-\,\delta^h_i \mu^{k'}{}_j + \omega^h{}_{k'}{}^{j'}{}_j x^{j'}_i) x^k_{k'},$$

risulta, ricordando le (10.4) e l'espressione di $\partial_j \delta r^{i'}$ ricavata al n. 7,

$$\begin{aligned} L_i{}'^j \partial_j \delta r^{i'} &= L^{ij}(x^{i'}_i \delta \mu^{i'}{}_j + \omega^h{}_{h'}{}^{j'}{}_j x^{j'}_i \delta x^{h'}_h) = \\ &= L^{ij}(\delta \mu_{ij} + (-\,\delta^h_i \mu^{k'}{}_j + \omega^h{}_{k'}{}^{j'}{}_j x^{j'}_i) x^k_{k'} x^{h'}_k \delta x^{h'}_h), \end{aligned}$$

ossia

(10.7) $$L_{i'}{}^j \partial_j \delta r^{i'} = L^{ij}(\delta \mu_{ij} + \omega^{hk}{}_{ij} x^{h'}_k \delta x^{h'}_h).$$

A questo punto conviene osservare che è

(10.8) $$\omega^{hk}{}_{ij} = \omega^{kh}{}_{ij}.$$

E infatti si ha, ricordando le (7.3), (8.1), (4.3), (4.4), (2.3), (4.4′) [50]),

$$\omega^{hk}{}_{ij} - \omega^{kh}{}_{ij} =$$

[49]) Cfr. [2], 14.

[50]) Si osservi che è

$$\eta^{j'p'q'} \delta^{m'n'}_{p'k'} \delta^{q'k'}_{r's'} = \eta^{m'n't'} \delta^{j'q'}_{t'k'} \delta^{q'k'}_{r's'} = \eta^{m'n't'} \delta^{j't'}_{r's'}.$$

$$= - \mu^{k'}{}_j(\delta^h_i x^k_{k'} - \delta^k_i x^h_{k'}) + x^{j'}_i(\omega^h{}_{k'}{}^{j'}{}_j x^k_{k'} - \omega^k{}_{k'}{}^{j'}{}_j x^h_{k'}) =$$

$$= - \mu^{k'}{}_j x^l_{k'} \delta^{hk}_{il} + \frac{1}{2} x^{j'}_i \eta^{j'p'q'} \delta^{m'n'}_{p'k'} \delta^{q'k'}_{r's'} x^h_{m'} x^k_{n'} x^{r'}_{jp} x^p_{s'} =$$

$$= - \mid x^i_{i'} \mid \eta^{hkp} \mu_{pij} + \frac{1}{2} x^{j'}_i \eta^{m'n't'} x^h_{m'} x^k_{n'} \delta^{j't'}_{r's'} x^{r'}_{jp} x^p_{s'} =$$

$$= - \mid x^i_{i'} \mid \eta^{hkp} \mu_{pij} + \mid x^i_{i'} \mid \eta^{hkp} \mu_{pij} = 0\,.$$

Ne segue che, ricordate le (1.8), la (10.7) si può scrivere [51])

$$L_{i'}{}^j \partial_j \delta r^{i'} = L^{ij}(\delta\mu_{ij} + \omega^{hk}{}_{ij} \delta e_{hk}) \tag{10.9}$$

e pertanto, ricordate le (7.5′), la (1.10) diventa

$$\delta l^{(i)} = (T^{(ij)} + \omega^{ij}{}_{hk} L^{hk}) \delta e_{ij} + L^{ij} \delta\mu_{ij}\,, \tag{10.10}$$

da cui, se il sistema è a trasformazioni reversibili, appare evidente che, come ha dimostrato A. Bressan per altra via [52]), *l'energia libera termodinamica può anche ritenersi funzione delle variabili* e_{ij}, μ_{ij}.

11. Legame fra le μ_{ij}, $\mu'^i{}_j$ e vincolo a cui sono soggette le μ_{ij}.

Ricordate le (8.1), (1.6), dalle (10.5) seguono le

$$\mu_{ij} = \mid x^i_{i'} \mid g'_{ih} \mu'^h{}_j \tag{11.1}$$

esprimenti il legame che intercorre fra le variabili μ_{ij} e $\mu'^i{}_j$. Le (11.1) sono, nella forma, analoghe alle (10.3).

Ricordate le posizioni (10.2) e le (3.1), dalle (11.1) segue che *le variabili* μ_{ij} *non sono indipendenti, bensì soggette al legame*

$$g'^{ij} \mu_{ij} = 0 \tag{11.2}$$

---

[51]) L'espressione (10.10) di $\partial l^{(i)}$ è dovuta ad A. Bressan che l'ha ottenuta con procedimento nettamente diverso. Cfr. [2], 15.

[52]) Cfr. [2], 14.

e pertanto, tenuto presente che è

$$\delta g'^{hk} = - g'^{hi} g'^{kj} \delta g'_{ij} = - g'^{h(i} g'^{j)k} \delta g'_{ij}, \tag{11.3}$$

come subito segue dalle $g'^{hk} g'_{kj} = \delta^h_j$, e che inoltre risulta, ricordando le (1.7),

$$\delta g'_{ij} = 2 \delta e_{ij}, \tag{11.4}$$

si ha che le variazioni δe_{ij}, $\delta \mu_{ij}$ non possono essere arbitrarie, bensì soggette alla condizione

$$g'^{h(i} g'^{j)k} \mu_{hk} \delta e_{ij} - g'^{ij} \delta \mu_{ij} = 0. \tag{11.5}$$

12. Equazioni di A. Bressan.

Nel caso in cui il sistema sia a trasformazioni reversibili, dalla (6.1) si ricava, qualora si assuma come espressione del $\delta l^{(i)}$ la (10.10) e si tenga presente che le δe_{ij}, $\delta \mu_{ij}$ sono soggette al legame (11.5) [53]),

$$\frac{\partial F}{\partial e_{ij}} = - T^{(ij)} - \omega^{ij}{}_{hk} L^{hk} + 2 q g'^{h(i} g'^{j)k} \mu_{hk}, \tag{12.1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_{ij}} = - L^{ij} - q g'^{ij}, \tag{12.2}$$

col solito significato di q.

Ricordando le (10.6), (8.1), (7.3), (2.3), (2.2), (11.1), risulta

$$\omega^{ij}{}_{hk} g'^{hk} = - \mid x^i_{,\prime} \mid g'^{ik} \mu'^{j}{}_{k} + \frac{1}{2} \mid x^i_{,\prime} \mid \eta^{kiq} x^{q'}_{q} x^{q'}_{kl} g'^{jl} =$$

$$= - 2 \mid x^i_{,\prime} \mid \delta^{(i}_{p} \delta^{j)}_{q} \mu'^{p}{}_{l} g'^{lq} = - 2 g'^{h(i} g'^{j)k} \mu_{hk}$$

---

[53]) Nello scrivere le (12.1) si è fatto uso, per quanto concerne le e_{ij}, della convenzione introdotta all'inizio del n. 6.

e pertanto dalle (12.1), (12.2) si ricavano le

$$T^{(ij)} = -\frac{\partial F}{\partial e_{ij}} + \omega^{ij}{}_{hk}\frac{\partial F}{\partial \mu_{ij}}, \tag{12.3}$$

$$L^{ij} = -\frac{\partial F}{\partial \mu_{ij}} - qg'^{ij}, \tag{12.4}$$

dovute ad A. Bressan [54]. La dimostrata simmetria delle $\omega^{ij}{}_{hk}$ rispetto agli indici i, j (cfr. le (10.8)) mostra che F è soggetta unicamente alla condizione di soddisfare alle prime delle (6.2).

13. Introduzione dei tensori $L_i{}^j$, $\mu^i{}_j$ e loro identificazione con i tensori L^{ij}, μ_{ij}.

Ai due tensori T^{ij}, L^{ij} è associato il tensore μ_{ij} e da tali tensori si passa ai tensori $T^{i'j}$ (corrispondente al tensore di Piola-Kirchhoff della teoria simmetrica [55]), $L^{i'j} \equiv L_{i'}{}^j$ e al tensore $\mu_{i'j} \equiv \mu^{i'}{}_j$, associato a questi ultimi, mediante le

$$T^{i'j} = x^{i'}_i T^{ij}, \tag{13.1}$$

$$L^{i'j} = x^{i'}_i L^{ij}, \tag{13.2}$$

$$\mu_{i'j} = x^i_{i'} \mu_{ij}, \tag{13.3}$$

che nella forma sono fra loro analoghe.

Inoltre, introdotti i tensori $L_{i'}{}^j$, $\mu^i{}_j$ definiti dalle [56])

$$L_i{}^j = |\, x^{i'}_i \,|\, L'_i{}^j, \tag{13.4}$$

$$\mu^i{}_j = |\, x^i_{i'} \,|\, \mu'^i{}_j, \tag{13.5}$$

---

[54]) Cfr. [2], 15, dove sono stabilite con procedimento diverso dal presente.

[55]) Cfr. [11], 210.

[56]) $L_i{}^j$ coincide pertanto con il tensore definito dalle (7.11) di [5], 7 (cfr. anche la nota [14])).

le (10.3), (11.1) si scrivono

$$L^{ij} = g'^{ih} L_h{}^j, \tag{13.6}$$

$$\mu_{ij} = g'_{ih} \mu^h{}_j, \tag{13.7}$$

le quali, non appena si interpretino le coordinate lagrangiane x^i come particolari coordinate curvilinee della configurazione attuale [57]), esprimono che *le* L^{ij}, μ_{ij} *non sono altro che le componenti, rispettivamente contravarianti e covarianti, dei tensori lagrangiani che hanno per componenti miste le* $L_i{}^j$, $\mu^i{}_j$. E queste ultime risultano ancora definite dalle (2.2), pur di intendere le η_{ipq} come componenti del tensore di Ricci nel riferimento curvilineo x^i.

Pertanto, con l'interpretazione ora data delle coordinate x^i, *i due tensori introdotti al n.* 10 *mediante le* (10.1), (10.5) *si possono identificare con i due tensori ora introdotti mediante le* (13.4), (13.5).

Inoltre si ha che la (8.2), esprimente il legame a cui sono soggette le $\mu^{i'}{}_j$, e la (11.2), esprimente il legame a cui sono soggette le μ_{ij}, *non sono altro che due tra le diverse forme tensoriali con cui si può esprimere il legame*

$$\mu^i{}_i = 0 \tag{13.8}$$

a cui è soggetto il tensore $\mu^i{}_j$.

Infine risulta che nel riferimento cartesiano $x^{i'}$ il tensore $\mu^i{}_j$ ha per componenti le

$$\mu^{i'}{}_{j'} = x^{i'}_i x^j_{j'} \mu^i{}_j \tag{13.9}$$

e il legame a cui queste sono soggette,

[57]) Cfr., ad es., [6], 4. Le coordinate $x^{i'}$ restano invece cartesiane ortogonali, ed è per tale ragione che gli indici dotati di apice possono essere scritti indifferentemente o in alto o in basso (cfr. il n. 10 e il presente n.).

$$\mu^{i'}{}_{i'} = 0, \tag{13.10}$$

è ancora una ulteriore forma con cui si può esprimere il legame a cui è soggetto il tensore $\mu^i{}_j$.

* * *

A. Bressan in [2], 5 ha introdotto, partendo dalle variabili miste $\mu^{i'}{}_j$, certe variabili euleriane, che indicherò con $\mu'^{i'}{}_{j'}$, definite da

$$\mu'^{i'}{}_{j'} = |\, x^{i'}_i \,|\, x^j_{j'} \mu^{i'}{}_j . \tag{13.11}$$

Ricordate le (8.1), si ha quindi che il legame fra queste nuove variabili e le $\mu'^i{}_j$ risulta espresso da relazioni analoghe alle (13.9):

$$\mu'^{i'}{}_{j'} = x^{i}_{i'} x^j_{j'} \mu'^i{}_j , \tag{13.9'}$$

e da queste e dalle (13.5) segue che *dette variabili differiscono unicamente per il fattore* $|\, x^{i'}_i \,|$ *dalle* $\mu^{i'}{}_{j'}$. Quindi, analogamente a queste ultime, esse sono soggette al legame

$$\mu'^{i'}{}_{i'} = 0, \tag{13.10'}$$

come d'altronde subito si ottiene dalle (13.9'), ricordando le (3.1).

* * *

Con l'interpretazione delle coordinate x^i come particolari coordinate curvilinee della configurazione attuale, coordinate per le quali la forma quadratica fondamentale è espressa da

$$ds^2 = g'_{ij} dx^i dx^j ,$$

si ha, introducendo i simboli di Christoffel di 1ª specie $\{jp, q\}$ e ricordando le (2.2), (13.5),

$$\mu^i{}_j = \frac{1}{2}\, \eta^{ipq} \{jp, q\}, \tag{13.12}$$

naturalmente intendendo le η^{ipq} come componenti del tensore di Ricci nel suddetto riferimento.

E inoltre, introducendo i simboli di Christoffel di 2ª specie $\begin{Bmatrix} k \\ j\ p \end{Bmatrix} = g'^{kq}\{jp, q\}$, per i quali è

$$\begin{Bmatrix} k \\ j\ p \end{Bmatrix} = x^k_{l'} x^{l'}_{jp},$$

risulta dalle (2.7)

$$\omega'^{hki}{}_j = \eta^{ip(h} \begin{Bmatrix} k) \\ j\, p \end{Bmatrix}. \tag{13.13}$$

Ricordate poi la (13.7) si ha

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2}\eta_i{}^{pq}\{jp, q\} = \frac{1}{2}\eta_i{}^p{}_q \begin{Bmatrix} q \\ j\ p \end{Bmatrix}. \tag{13.14}$$

Infine, in analogia alle (13.12), (13.13), dalle (4.4′), (4.5′) seguono le

$$\mu_{ijl} = \frac{1}{2}\,\eth^{pq}_{ij}\,\{lp, q\}, \tag{13.15}$$

$$\omega^{hk}{}_{ijl} = \delta^{p(h}_{ij} \begin{Bmatrix} k) \\ l\ p \end{Bmatrix}. \tag{13.16}$$

14. Un'ultima trasformazione dell'espressione del lavoro delle forze interne. Decomposizione di $L_i{}^j$, L^{ij} nelle due parti non lavorante e puramente lavorante.

Ricordate le (13.6), (13.7), (11.3), dalla (10.9) si ricava

$$L_{i'}{}^j \eth_j \delta r^{i'} = L_i{}^j \delta\mu^i{}_j + L_h{}^k \mu_{lk} g'^{h(i} g'^{j)l} \delta g'_{ij} +$$

$$+ \omega^{ij}{}_{lk} g'^{hl} L_h{}^k \delta e_{ij},$$

ossia, per le (11.4),

$$L_{i'}{}^{j}\partial_j \delta r^{i'} = L_h{}^k g'^{hl}(\omega^{ij}{}_{lk} + 2\delta_l^{(i}\delta_q^{j)}\mu^q{}_k)\delta e_{ij} + L_i{}^j\delta\mu^i{}_j.$$

Pertanto, posto

$$\omega^{ijh}{}_k = g'^{hl}(\omega^{ij}{}_{lk} + 2\delta_l^{(i}\delta_q^{j)}\mu^q{}_k), \tag{14.1}$$

sicchè risulta, ricordando le (10.8),

$$\omega^{ijh}{}_k = \omega^{jih}{}_k, \tag{14.2}$$

la (1.10) si può scrivere

$$\delta l^{(i)} = (T^{(ij)} + \omega^{ijh}{}_k L_h{}^k)\delta e_{ij} + L_i{}^j\delta\mu^i{}_j, \tag{14.3}$$

che dà un'altra espressione del lavoro delle forze interne di contatto e dalla quale appare che, supposto il sistema a trasformazioni reversibili, *l'energia libera si può anche ritenere funzione delle variabili* e_{ij}, $\mu^i{}_j$.

* * *

Ricordando le (10.6), dalle (14.1) segue

$$\omega^{ijh}{}_k = g'^{hj}\mu^i{}_k + \omega^i{}_{j'}{}^{k'}{}_k x^j_{j'} x^h_{k'}, \tag{14.4}$$

che è l'espressione per $\omega^{ijh}{}_k$ a cui si sarebbe pervenuti qualora nell'effettuare la deduzione della (14.3) si fosse partiti, invece che dalla (10.9), dalla

$$L_{i'}{}^{j}\partial_j \delta r^{i'} = \omega^i{}_{i'}{}^{h'}{}_h L_{h'}{}^h \delta x^{i'}_i + L_{i'}{}^j\delta\mu^{i'}{}_j$$

dedotta al n. 7. Le (14.4) esprimono il legame fra le $\omega^{ijh}{}_k$ e le $\omega^i{}_{j'}{}^{k'}{}_k$.

E ancora risulta

$$\omega^{ijh}{}_k = |\, x^i_{i'} \,|\, \omega'^{ijh}{}_k + g'^{ij}\mu^h{}_k, \tag{14.5}$$

che è l'espressione a cui si perviene qualora per dedurre la (14.3) si parta dalla

$$L_{i'}{}^j \partial_j \delta r^{i'} = \omega'^{ijh}{}_k L'^k_h \delta e_{ij} + L'_i{}^j \delta \mu'^i{}_j,$$

dedotta al n. 2 [58]).

Sostituendo le (13.12), (13.13) nelle (14.5), che esprimono il legame fra le $\omega^{ijh}{}_k$ e le $\omega'^{ijh}{}_k$, si ha infine

$$\omega^{ijh}{}_k = \frac{1}{2} \mid x^i_{i'} \mid \eta^{hpq}(g'^{ij}g'_{qr} + 2\delta^{(i}_q\delta^{j)}_r) \begin{Bmatrix} r \\ k\ p \end{Bmatrix}.$$

* * *

Stante il carattere tensoriale delle relazioni sino ad ora scritte, le due parti non lavorante e puramente lavorante di $L_i{}^j$ e L^{ij} risultano espresse rispettivamente da (cfr. (13.4))

$$L^{(o)j}_i = \mid x^{i'}_i \mid L'^{(o)j}_i, \qquad L^{(l)j}_i = \mid x^{i'}_i \mid L'^{(l)j}_i, \tag{14.6}$$

e da (cfr. (13.6))

$$L^{(o)ij} = g'^{ih} L^{(o)j}_h, \qquad L^{(l)ij} = g'^{ih} L^{(l)j}_h. \tag{14.7}$$

---

[58]) Essendo, per le (10.2) e le $g'_{ij}g'^{ij} = 3$,

$$\mid x^i_{i'} \mid = \sqrt{\mid g'^{ij} \mid}, \qquad g'_{ij}\delta g'^{ij} = - g'^{ij}\delta g'_{ij},$$

risulta, ricordando anche le (11.4),

$$\delta \mid x^i_{i'} \mid = \frac{1}{2\sqrt{\mid g'^{ij} \mid}} \delta \mid g'^{ij} \mid = \frac{\mid g'^{ij} \mid}{2\sqrt{\mid g'^{ij} \mid}} g'_{ij}\delta g'^{ij} = \\ = - \mid x^i_{i'} \mid g'^{ij}\delta e_{ij}.$$

Pertanto si ha, ricordando le (13.4), (13.5),

$$L'_i{}^j \delta\mu'^i{}_j = L_i{}^j \delta\mu^i{}_j + L_h{}^k \mu^h{}_k g'^{ij} \delta e_{ij},$$

sicchè risulta

$$L_{i'}{}^j \partial_j \delta r^{i'} = L_h{}^k (\mid x^i_{i'} \mid \omega'^{ijh}{}_k + g'^{ij}\mu^h{}_k)\delta e_{ij},$$

donde l'espressione (14.5) per $\omega^{ijh}{}_k$.

Ricordando le (3.4) si ha quindi, esplicitamente,

$$(14.8) \qquad L^{(o)ij} = \frac{1}{3} L g'^{ij}, \qquad L^{(l)ij} = L^{ij} - \frac{1}{3} L g'^{ij},$$

dove L è l'invariante lineare di L^{ij}:

$$(14.9) \qquad L = g'_{ij} L^{ij} = L_i{}^i = |\, x_i^{i'} \,|\, L'.$$

Pertanto, *quanto è stato osservato per il tensore* $L'_i{}^j$, *oltre che trasportarsi immutato a* $L_i{}^j$, *si trasporta immutato a* L^{ij}, *pur di conservare alle coordinate* x^i *l'interpretazione che di esse è stata fatta al n.* 13. Quindi, anche ora, *se il tensore* L^{ij} *risulta isotropo, il suo contributo al* $\delta l^{(i)}$ *risulta nullo*; $L^{(o)ij}$ *è il tensore isotropo di minimo scarto dal tensore* L^{ij} [59]), ecc.

15. Una ulteriore espressione per le relazioni sollecitazione interna-deformazione.

Stante la (13.8), per le variazioni $\delta\mu^i{}_j$ deve essere

$$(15.1) \qquad \delta\mu^i{}_i = 0$$

e pertanto, supposto il sistema a trasformazioni reversibili, si ricava dalla (6.1), qualora si assuma come espressione di $\delta l^{(i)}$ la (14.3) e si conservi la convenzione introdotta al n. 6 [60]),

---

[59]) Naturalmente il modulo dello scarto $S^{ij} = L^{ij} - q g'^{ij}$ è ora espresso da $g'_{ih} g'_{jk} S^{ij} S^{hk}$.

[60]) Ossia si supponga, in particolare,

$$\delta^i_j \frac{\partial F}{\partial \mu^i{}_j} = 0.$$

Con analoga convenzione per $\dfrac{\partial F}{\partial \mu_{ij}}$ $\left(g'_{ij} \dfrac{\partial F}{\partial \mu_{ij}} = 0\right)$, dalle seconde delle (14.8) e dalle (12.4) si ricava

$$L^{(l)ij} = - \frac{\partial F}{\partial \mu_{ij}}.$$

$$T^{(ij)} = -\frac{\partial F}{\partial e_{ij}} + \omega^{ijh}{}_k \frac{\partial F}{\partial \mu^h{}_k}, \tag{15.2}$$

$$L^{(l)ij} = -\frac{\partial F}{\partial \mu^i{}_j}\,, \tag{15.3}$$

che rappresentano *un'altra espressione per le relazioni sollecitazione interna-deformazione.* E, risultando le $\omega^{ijh}{}_k$ simmetriche rispetto agli indici i, j (v. le (14.2)), F è soggetta unicamente alle condizioni

$$\frac{\partial F}{\partial e_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial e_{ji}}, \quad \delta^i_j \frac{\partial F}{\partial \mu^i{}_j} = 0. \tag{15.4}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Bigioggero: *Osservazioni geometriche sui tensori,* Rend. Acc. dei Lincei, s. VI, vol. XVII (1933), pp. 611-616.

[2] A. Bressan: *Sui sistemi continui nel caso asimmetrico,* Ann. di Mat., s. IV, vol. LXII (1963), pp. 169-222.

[3] U. Cisotti: *Sopra il tensore isotropo di minimo scarto da un tensore doppio assegnato,* Atti e Memorie Acc. Sc. Lett. ed Arti di Padova, vol. LVI (1940), pp. 7-10.

[4] B. Finzi, M. Pastori: *Calcolo tensoriale e applicazioni,* Bologna, Zanichelli, 1949.

[5] D. Galletto: *Nuove forme per le equazioni in coordinate generali della statica dei continui con caratteristiche di tensione asimmetriche,* Ann. della Scuola Norm. Sup. di Pisa, Sc. Fis. e Mat., s. III, vol. XVIII (1963), pp. 297-317.

[6] D. Galletto: *Sulle equazioni in coordinate generali della statica dei continui con caratteristiche di tensione asimmetriche,* Ann. Univ. di Ferrara, Sez. VII, vol. X (1962), pp. 33-68.

[7] D. Galletto: *Sull'unicità in presenza di vincoli interni di una condizione cinematica fondamentale nella teoria delle deformazioni finite,* Atti dell'Ist. Veneto di Sc. Lett. e Arti, Classe di Sc. Mat. e Nat., t. CXXIII (1965) (in corso di stampa).

[8] G. Grioli: *Elasticità asimmetrica,* Ann. di Mat., s. IV, vol. L (1960), pp. 389-417.

[9] R. D. Mindlin, H. F. Tiersten: *Effects of Couple-stresses in Linear Elasticity,* Arch. for Rat. Mech. and Analysis, vol. XI (1962), pp. 415-448.

[10] R. A. Toupin: *Elastic Materials with Couple-stresses,* Arch. for Rat. Mech. and Analysis, vol. XI (1962), pp. 385-414.

[11] C. Truesdell, R. Toupin: *The Classical Field Theories,* Handbuch der Physik, Bd. III|1, Berlin Springer-Verlag, 1960.