

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELLA CORSI

Sui commutatori nei gruppi il cui derivato è prodotto diretto di gruppi ciclici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 35, n° 2 (1965), p. 253-259

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_2_253_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SUI COMMUTATORI NEI GRUPPI IL CUI
DERIVATO È PRODOTTO DIRETTO
DI GRUPPI CICLICI

*Nota *) di GABRIELLA CORSI (a Firenze) **)*

I. Dato un gruppo G il cui derivato G' sia prodotto diretto di un numero finito m di gruppi ciclici, si può porre il problema di stabilire se G' possa essere generato mediante m commutatori. Il problema, in questa forma generale, riceve risposta negativa: I. D. Mac Donald ha dimostrato in [2] che, fissato comunque un numero naturale n , esiste un gruppo G , il cui derivato G' è ciclico e non può essere generato da meno di n commutatori. D'altra parte, sempre in [2], Mac Donald dimostra che, se il derivato G' di un gruppo G è ciclico, condizione sufficiente affinché G' sia generato da un commutatore è che G sia nilpotente oppure G' infinito.

Estendiamo qui in parte questo teorema, provando che:

a) Se G è nilpotente e G' prodotto diretto di m gruppi ciclici finiti, si può generare G' mediante m commutatori;

b) se G è nilpotente di classe 2 e G' è prodotto diretto di m gruppi ciclici (finiti o infiniti), si può generare G' mediante m commutatori.

*) Pervenuta in redazione il 9 gennaio 1965.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Firenze.

***) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

2. - LEMMA: *Se G è un p -gruppo e il suo derivato G' è prodotto diretto di m gruppi ciclici, si può generare G' con m commutatori.*

Infatti, essendo G' prodotto diretto di m p -gruppi ciclici, il sottogruppo di Frattini di G' ha indice p^m in G' stesso. Ne viene, per il teorema di Burnside sulla base, che da ogni insieme di generatori di G' si possono estrarre m elementi che generano G' : in particolare dall'insieme dei commutatori di G si potranno estrarre m generatori di G' .

TEOREMA 1: *Dato un gruppo nilpotente G , se il suo derivato G' è prodotto diretto di m gruppi ciclici finiti, si può generare G' con m commutatori.*

Supponiamo dapprima G finito: poichè è nilpotente, G è allora prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow G_1, G_2, \dots, G_r e si ha:

$$G' = G'_1 \times G'_2 \times \dots \times G'_r$$

dove G'_i ($i = 1, \dots, r$) è il derivato del p_i -gruppo G_i ¹⁾. Inoltre i G'_i , quali sottogruppi di Sylow di G_r , sono pienamente invarianti in G' , quindi, se G' è prodotto diretto degli m sottogruppi ciclici T_1, T_2, \dots, T_m , si ha²⁾:

$$G'_i = (G'_i \cap T_1) \times (G'_i \cap T_2) \times \dots \times (G'_i \cap T_m) \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

¹⁾ Se un gruppo G è prodotto diretto di r suoi sottogruppi qualunque G_1, G_2, \dots, G_r , il suo derivato G' è prodotto diretto dei derivati G'_i dei G_i ($i = 1, \dots, r$) (cfr. per es. [1] pag. 120).

²⁾ Se H è un sottogruppo pienamente invariante di un gruppo G prodotto diretto dei suoi sottogruppi G_1, G_2, \dots, G_r , deve essere $H = (H \cap G_1) \times (H \cap G_2) \times \dots \times (H \cap G_r)$. Infatti l'endomorfismo φ_i ($i = 1, \dots, r$) di G , definito da $\varphi_i(g) = \varphi_i(g_1 g_2 \dots g_r) = g_i$ ($g \in G$; $g_j \in G_j$; $j = 1, \dots, r$), induce in $H \cap G_i$ l'automorfismo identico, onde deve essere: $H \cap G_i = \varphi_i(H \cap G_i) \subset \varphi_i(H)$; d'altra parte, poichè H è pienamente invariante, $\varphi_i(H) \subset H \cap G_i$, quindi $\varphi_i(H) = H \cap G_i$, cioè $H \cap G_i$ è proprio la componente i -esima di H .

Dunque ogni p_i -gruppo G'_i è prodotto diretto di m gruppi ciclici e quindi, per il lemma, è generato da m commutatori. Siano essi:

$$\gamma_1^{(i)} = (a_{1i}, b_{1i}), \quad \gamma_2^{(i)} = (a_{2i}, b_{2i}), \quad \dots, \quad \gamma_m^{(i)} = (a_{mi}, b_{mi}) \\ (i = 1, \dots, r)$$

Allora gli m commutatori

$$\gamma_j = (a_{j1}a_{j2} \dots a_{jr} b_{j1}b_{j2} \dots, b_{jr}) = \\ = (a_{j1}, b_{j1})(a_{j2}, b_{j2}) \dots (a_{jr}, b_{jr}) \quad (j = 1, \dots, m)$$

generano G' ; infatti, se $p_i^{k_i}$ è l'ordine di G'_i , posto $q_i = p_1^{k_1} \dots p_{i-1}^{k_{i-1}} p_{i+1}^{k_{i+1}} \dots p_r^{k_r}$ si ha:

$$\gamma_j^{q_i} = (a_{ji}, b_{ji})^{q_i},$$

ed, essendo $(a_{ji}, b_{ji}) \in G'_i$, q_i è primo con l'ordine di (a_{ji}, b_{ji}) , onde $\{\gamma_j^{q_i}\} = \{(a_{ji}, b_{ji})\}$: ogni commutatore $\gamma_j^{(i)}$ ($i = 1, \dots, r$; $j = 1, \dots, m$) si può cioè ottenere come potenza di un commutatore γ_j e quindi $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ contiene un sistema di generatori di ciascun G'_i .

Sia ora G infinito ¹⁾: poichè G' è generato da un numero finito di commutatori, possiamo sempre ricondurci al caso che G sia generato da un sistema finito di elementi g_1, g_2, \dots, g_r . Il centralizzante C_i di ciascun g_i ($i = 1, \dots, r$) deve avere indice finito in G , infatti tale indice è uguale al numero dei coniugati di g_i e questo numero deve essere finito, altrimenti sarebbero infiniti anche i commutatori di g_i con gli altri elementi di G , in contraddizione con la finitezza di G' . Ne viene che il centro C di G ha indice finito: C infatti non è altro che l'intersezione di tutti i centralizzanti C_i , e si ha:

$$[G : C_1 \cap C_2] = [G : C_1][C_1 : C_1 \cap C_2],$$

¹⁾ La linea di questa dimostrazione è quella usata da I. D. Mac Donald per provare l'analoga proposizione nel caso di G nilpotente infinito e G' ciclico.

ma $C_1 \cap C_2$ è il centralizzante di g_2 in C_1 e quindi ha indice finito in C_1 , onde $C_1 \cap C_2$ ha indice finito in G ; analogamente, procedendo per induzione, si vede che C ha indice finito in G ed è perciò infinito. Inoltre C è finitamente generato: infatti, poichè C ha indice finito in G , esistono r interi positivi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, tali che $g_1^{\alpha_1}, g_2^{\alpha_2}, \dots, g_r^{\alpha_r} \in C$; sia $\bar{C} = \{g_1^{\alpha_1}, g_2^{\alpha_2}, \dots, g_r^{\alpha_r}\}$: ogni elemento $x \in G/\bar{C}$ si può esprimere nella forma $x = \bar{g}_1^{x_1} \bar{g}_2^{x_2} \dots \bar{g}_r^{x_r} \bar{d}_r$ (dove \bar{g}_i è il laterale di \bar{C} rappresentato da g_i ($i = 1, 2, \dots, r$) e \bar{d}_r è un elemento del derivato di G/\bar{C} , il quale è finito poichè è finito il derivato di G) con $1 \leq x_i \leq \alpha_i$ ($i = 1, \dots, r$); quindi G/\bar{C} è finito; è finito pertanto anche l'indice di \bar{C} in C ed, essendo \bar{C} finitamente generato, anche C risulta finitamente generato. Ne segue che esiste in C almeno un sottogruppo N , libero da torsione massimo; come tale N ha indice finito in C (essendo C finitamente generato) e quindi in G ; inoltre N è un sottogruppo normale, perchè centrale. Dunque G/N è un gruppo nilpotente finito; d'altra parte $G' \cap N = 1$ (G' è finito e N libero da torsione), onde ¹⁾:

$$\left(\frac{G}{N}\right)' \simeq G'$$

Ma allora $\left(\frac{G}{N}\right)'$ è prodotto diretto di m gruppi ciclici e, applicando i risultati precedenti, si ha che $\left(\frac{G}{N}\right)'$ è generato da m commutatori, onde G' è generato da m commutatori.

¹⁾ Dato un qualunque gruppo G , se N è un sottogruppo normale di G , si ha $\left(\frac{G}{N}\right)' \simeq \frac{G'}{G' \cap N}$. Infatti l'omomorfismo naturale φ di G su $\frac{G}{N}$ fa corrispondere ad ogni elemento del tipo $x^{-1}y^{-1}xy$ di G un elemento del tipo $\bar{x}^{-1}\bar{y}^{-1}\bar{x}\bar{y}$ di $\frac{G}{N}$, viceversa ogni generatore $\bar{x}^{-1}\bar{y}^{-1}\bar{x}\bar{y}$ di $\left(\frac{G}{N}\right)'$ proviene da almeno un elemento di G del tipo $x^{-1}y^{-1}xy$; pertanto φ , portando un sistema di generatori di G' in un sistema di generatori di $\left(\frac{G}{N}\right)'$, induce un omomorfismo $\bar{\varphi}$ di G' su $\left(\frac{G}{N}\right)'$; il nucleo di $\bar{\varphi}$ è $G' \cap N$, onde $\left(\frac{G}{N}\right)' \simeq \frac{G'}{G' \cap N}$.

2. — TEOREMA 2: *Se G è un gruppo nilpotente di classe 2 ed il suo derivato G' è prodotto diretto di m gruppi ciclici finiti T_1, T_2, \dots, T_m e di n gruppi ciclici infiniti F_1, F_2, \dots, F_n , si può generare G' mediante $m + n$ commutatori. Nel caso poi che sia $m = 0$, G' si può esprimere come prodotto diretto di n gruppi ciclici generati da commutatori.*

Per $n = 0$ il teorema è vero come caso particolare del teorema precedente; procediamo allora per induzione rispetto ad n . Posto $H = T_1 \times T_2 \times \dots \times T_m \times F_1 \times F_2 \times \dots \times F_{n-1}$, essendo H normale in G , perchè centrale, si ha ¹⁾:

$$\left(\frac{G}{H}\right)' \simeq \frac{G'}{H} \simeq F_n;$$

cioè $\frac{G}{H}$ è un gruppo che ha il derivato ciclico infinito, onde, per il teorema di I. D. Mac Donald [2], esiste un commutatore $\bar{\delta}_n$ che genera $\left(\frac{G}{H}\right)'$. Se φ è l'omomorfismo naturale di G su $\frac{G}{H}$, esiste ¹⁾ in G un commutatore δ_n , tale che $\varphi(\delta_n) = \bar{\delta}_n$ e, poichè $\bar{\delta}_n$ genera tutto $\left(\frac{G}{H}\right)'$, le potenze di δ_n rappresentano ¹⁾ tutti i laterali di H in G' ; inoltre si ha $\{\delta_n\} \cap H = 1$, perchè, se fosse diverso dall'unità, questo sottogruppo di $\{\delta_n\}$ dovrebbe avere indice finito in $\{\delta_n\}$. Pertanto si può scrivere:

$$G' = H \times \{\delta_n\}$$

con $\{\delta_n\}$ sottogruppo normale di G , perchè centrale. Analogamente a sopra, si ha allora:

$$\left(\frac{G}{\{\delta_n\}}\right)' \simeq \frac{G'}{\{\delta_n\}} \simeq H$$

cioè $\frac{G}{\{\delta_n\}}$ è un gruppo nilpotente di classe 2 il cui derivato è pro-

¹⁾ Cfr. nota precedente.

dotto diretto di m gruppi ciclici finiti e $n - 1$ gruppi ciclici infiniti; per l'ipotesi d'induzione $\left(\frac{G}{\{\delta_n\}}\right)'$ è quindi generato da $m + n - 1$ commutatori $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_m, \bar{\delta}_1, \dots, \bar{\delta}_{n-1}$. Pertanto si possono determinare in G $m + n - 1$ commutatori ¹⁾ $\gamma_1, \dots, \gamma_m, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}$, tali che $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}\}$ contiene almeno un rappresentante di ogni laterale di $\{\delta_n\}$ in G : ogni elemento $g' \in G'$ si può dunque esprimere nella forma

$$g' = \gamma_1^{x_1} \gamma_2^{x_2} \dots \gamma_m^{x_m} \delta_1^{y_1} \delta_2^{y_2} \dots \delta_n^{y_n}$$

Se poi $m = 0$ ed $n = 2$, si ha come sopra:

$$G' = F_1 \times \{\delta_2\}$$

e

$$\left(\frac{G}{\{\delta_2\}}\right)' \simeq \frac{G'}{\{\delta_2\}} \simeq F_1$$

onde, ripetendo per $\frac{G}{\{\delta_2\}}$ il ragionamento fatto sopra per $\frac{G}{H}$, si ha $G = \{\delta_1\} \times \{\delta_2\}$, con δ_1 e δ_2 commutatori in G . Per ipotesi di induzione possiamo allora supporre che il derivato $\left(\frac{G}{\{\delta_n\}}\right)'$ di $\frac{G}{\{\delta_n\}}$ si possa esprimere come prodotto diretto di $n - 1$ gruppi ciclici generati da commutatori:

$$\left(\frac{G}{\{\delta_n\}}\right)' = \{\bar{\delta}_1\} \times \{\bar{\delta}_2\} \times \dots \times \{\bar{\delta}_{n-1}\}.$$

Se φ è l'omomorfismo naturale di G su $\frac{G}{\{\delta_n\}}$, esistono quindi in G $n - 1$ commutatori $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}$, tali che $\varphi(\delta_i) = \bar{\delta}_i$ ($i = 1, \dots, n - 1$); sia $K = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}\}$: dovrà essere $K \cap \{\delta_n\} = 1$, perchè $K \simeq \frac{G}{\{\delta_n\}} \simeq \frac{K \cup \{\delta_n\}}{\{\delta_n\}} \simeq \frac{K}{K \cap \{\delta_n\}}$ e, mentre K è

¹⁾ Cfr. nota p. 4.

prodotto diretto di $n - 1$ gruppi ciclici infiniti, se fosse $K \cap \{\delta_n\} \neq 1$, K potrebbe essere al più prodotto diretto di $n - 2$ gruppi ciclici infiniti. D'altra parte, poichè $\{\bar{\delta}_i\} \cap \{\bar{\delta}_j\} = 1$ ($i, j = 1, \dots, n - 1$), deve essere $\{\delta_i\} \cap \{\delta_j\} \in \{\delta_n\}$, ma $K \cap \{\delta_n\} = 1$, onde $\{\delta_i\} \cap \{\delta_j\} = 1$ ($i, j = 1, \dots, n - 1$). Pertanto:

$$G' = \{\delta_1\} \times \{\delta_2\} \times \dots \times \{\delta_n\}.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. G. KUROSH: *The Theory of Groups*, vol. I, New York, 1955.
- [2] I. D. MAC DONALD: *On Cyclic Commutator Subgroups*. Jour. London Math. Soc., 38 (1963), 419-422.