RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ADRIANO BARLOTTI

Configurazioni *K*-chiuse e piani *K*-aperti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 35, nº 1 (1965), p. 56-64

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_1_56_0>

CONFIGURAZIONI K-CHIUSE E PIANI K-APERTI

Nota *) *di* ADRIANO BARLOTTI (*a Firenze*) **)

1. Una classe particolarmente interessante di piani grafici è costituita dai piani che non contengono alcuna configurazione chiusa e hanno pertanto ricevuto il nome di *piani aperti*. Tale classe comprende oltre i piani liberi (M. HALL, cfr. [2]) altri piani (KOPEJKINA, cfr. [4]) caratterizzati fra i piani non liberi, dal fatto di essere localmente liberi (DEMBOWSKI, cfr. [1]).

Nel presente lavoro indicheremo una semplice generalizzazione della nozione di configurazione chiusa dando la definizione di *configurazione k-chiusa*. Tale definizione ci sembra possa risultare di un certo interesse nello studio dei piani grafici infiniti. Mediante essa si ottiene ad esempio una suddivisione della classe dei piani grafici non aperti in infinite sottoclassi, quelle dei *piani k-aperti* ($k = 4, 5,...$) (cfr. n. 2) e quella dei piani ∞-*aperti* formata dai piani non aperti, che non sono k-aperti per alcun valore di k (cfr. n. 4).

Il n. 3 è dedicato alla costruzione di un particolare tipo di piani infiniti 4-aperti. Nel n. 4 si mostra infine che i piani desarguesiani infiniti sono ∞-aperti. Ne segue che all'insieme dei piani ∞-aperti appartengono anche alcuni noti modelli di piani non-desarguesiani infiniti.

---

*)Pervenuta in redazione il 20 maggio 1964.
Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università, Firenze.
**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

2. Siano dati un insieme $\mathfrak{P}$ di elementi, che chiameremo punti, un insieme $\mathfrak{R}$ di elementi che diremo rette, e una relazione di incidenza, I, definita in $\mathfrak{P} \times \mathfrak{R}$. La struttura costituita dalla terna $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R}, \mathrm{I})$ si dice che è una *struttura di incidenza*, $\mathfrak{I}$, se accade che, presi comunque in essa due punti distinti, esiste al più una retta incidente con questi [1]).

Una struttura di incidenza $\mathfrak{I}$ viene chiamata una *configurazione chiusa* se valgono le seguenti circostanze:

a) $\mathfrak{I}$ risulta finita;

b) ogni elemento di $\mathfrak{I}$ è incidente con almeno tre elementi della struttura stessa.

La nozione di configurazione chiusa può essere generalizzata introducendo la seguente definizione.

Chiamiamo configurazione k-chiusa (dove k è un intero $\geqq 3$) *una struttura di incidenza finita e tale che ogni suo elemento è incidente con almeno altri k elementi della struttura stessa.*

Ovviamente se $k < h$ una configurazione h-chiusa è anche k-chiusa. Data una configurazione chiusa, esiste un intero $h(\geqq 3)$ tale che essa è k-chiusa per ogni k per cui sia $3 \leqq k \leqq h$.

Si riconosce subito che esistono configurazioni k-chiuse per ogni valore dell'intero $k(\geqq 3)$. Basta per questo considerare un piano finito di ordine sufficientemente grande e sopprimere da esso un opportuno numero di elementi.

La nozione di configurazione k-chiusa porta in modo del tutto naturale a staccare infinite sottoclassi dalla classe dei piani non aperti. Per questo basta dare la seguente definizione:

Chiamiamo piano k-aperto (dove k è un intero maggiore di tre) *un piano che non contenga nessuna configurazione k-chiusa, ma almeno una configurazione* $(k-1)$*-chiusa.*

Esempi di piani k-aperti si ottengono per ogni valore di k (> 3) come prodotto libero [2]), p. es., di una configurazione

---

[1]) Qualora tale retta esista sarà detta la « congiungente » i due punti in questione. È subito visto che la proprietà qui indicata è equivalente all'altra: prese due rette distinte esiste al più un punto (loro « intersezione ») incidente con entrambe.

[2]) Cfr. [4].

$(k-1)$-chiusa e di un punto. Tali esempi banali sono però di nessun interesse in quanto le uniche configurazioni chiuse contenute in essi appartengono alla base del piano in questione. Andiamo a mostrare come si ottenga un esempio non banale di piano infinito 4-aperto.

3. Nel presente n. vogliamo indicare come si costruisca un piano infinito [3]) 4-aperto nel quale ogni elemento è contenuto in una configurazione chiusa.

Partiamo da un insieme $\mathfrak{B}$ di un numero finito, m (con $m \geqq 8$), di punti. A ciascun punto, P, di $\mathfrak{B}$ associamo un indice, i_P, costituito da un intero positivo, in modo che l'insieme degli indici sia formato da numeri tutti distinti.

Consideriamo quindi le strutture di incidenza definite induttivamente nel seguente modo:

1) $\Pi_0 = \mathfrak{B}$.

2) A ogni punto di Π_{2k} è associato un indice costituito da un insieme ordinato di 3^{2k} numeri, in modo che punti diversi abbiano indici diversi. Posto $i_P = (x_1^{(P)}, x_2^{(P)}, \ldots)$ e $i_Q = (x_1^{(Q)}, x_2^{(Q)}, \ldots)$, stabiliamo che risulti $i_P > i_Q$ se per il minimo valore di s per cui $x_s^{(P)} \neq x_s^{(Q)}$ risulta $x_s^{(P)} > x_s^{(Q)}$. La struttura Π_{2k+1} si ottiene allora da Π_{2k} con il seguente procedimento: consideriamo l'insieme (certamente finito), τ, formato da tutte le terne di punti distinti di Π_{2k}, per le quali non accada che una coppia di punti di una medesima terna abbia in Π_{2k} una congiungente e ordiniamo di elementi della terna (A, B, C) in modo che risulti $i_A < i_B < i_C$. Chiamiamo indice della terna (A, B, C) l'insieme, i_{ABC}, di 3^{2k+1} numeri ottenuto scrivendo successivamente i numeri di i_A, i_B e i_C. Ordiniamo questi nuovi indici con lo stesso criterio usato per gli indici dei punti.

Consideriamo allora la terna di indice minore (A_0, B_0, C_0), e aggiungiamo in corrispondenza di essa una retta, incidente con i tre punti A_0, B_0, C_0 e con nessun altro punto di Π_{2k}. A tale retta attribuiamo come indice $i_{A_0B_0C_0}$. Cancelliamo ora dall'in-

---

[3]) L'unico piano grafico finito che risulti 4-aperto è ovviamente quello di ordine due.

sieme τ tutte le terne che contengono due dei punti A_0, B_0, C_0. Otteniamo un insieme τ_1, scegliamo in questo la terna di indice minore (A_1, B_1, C_1), e procediamo in corrispondenza a questa così come abbiamo fatto sopra con la terna (A_0, B_0, C_0): si perverrà a una nuova retta di indice $i_{A_1B_1C_1}$ e a un sottoinsieme τ_2 di τ_1. Continuiamo in tale modo fino a che non sono esaurite tutte le terne a disposizione. Chiamiamo Π'_{2k} la struttura di incidenza che si ottiene aggiungendo a Π_{2k} le rette ora definite e ampliando corrispondentemente la relazione di incidenza. Consideriamo quindi l'insieme τ' formato da tutte le coppie non ordinate di punti distinti di Π_{2k} che non posseggono in Π'_{2k} una congiungente. Sia (A', B') una di tali coppie e supponiamo che risulti $i_{A'} < i_{B'}$. Aggiungiamo in corrispondenza ad essa una retta incidente con A', B' e con nessun altro punto di Π_{2k}, e assegnamo a questa come indice un insieme di 3^{2k} zeri seguiti ordinatamente dai numeri di $i_{A'}$ e di $i_{B'}$.

La struttura Π_{2k+1} si ottiene aggiungendo a Π'_{2k} tutte queste nuove congiungenti e ampliando come indicato la relazione di incidenza. Alle rette di Π_{2k} $(k > 0)$ attribuiamo come indice in Π_{2k+1} l'indice che esse hanno in Π_{2k-1} seguito da $3^{2k-1} \cdot 8$ zeri.

3) Π_{2k+2} si ottiene da Π_{2k+1} con il procedimento duale di quello indicato in 2).

Per la successione di strutture Π_n $(n = 0, 1, \ldots)$ che risultano in tal modo definite si ha:

$$\Pi_0 \subseteq \Pi_1 \subseteq \Pi_2 \subseteq \ldots .$$

Ne segue subito che la struttura di incidenza

$$\Pi = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Pi_n$$

è un piano grafico.

Possiamo osservare che il piano in questione è certamente un piano infinito. Infatti essendo $m \geqq 8$, in Π_1 dal punto di indice minimo escono almeno quattro rette, mentre ogni retta è incidente con al più tre punti, quindi Π_1 non è certamente un piano grafico. Un ragionamento dello stesso tipo vale per ogni struttura Π_n, nella quale gli elementi che non appartengono a Π_{n-1} sono incidenti con al più tre elementi; si deve quindi escludere che esista una struttura Π_n che coincida con Π_{n+1} (e quindi con tutte le seguenti) e ne segue che Π non può essere finito.

Vogliamo ora provare che per il piano Π così costruito vale il

TEOREMA 1: *Preso comunque un elemento di Π esiste una configurazione chiusa che lo contiene.*

Per la dimostrazione ci saranno utili alcune definizioni [4]) e i due lemmi seguenti.

Chiameremo *altezza* di un elemento α di Π il numero $h(\alpha)$ dato dal più piccolo intero n per cui risulta $\alpha \in \Pi_n$. Per l'altezza di un elemento valgono le due seguenti proprietà:

(s 1) se $h(\alpha) > 0$, esistono due elementi incidenti con α e aventi altezza minore di $h(\alpha)$;

(s 2) se $h(\alpha) > 0$, al più un elemento incidente con α ha altezza $< h(\alpha) - 1$.

Se α e β sono due elementi di Π, diremo che α *precede* β (o che β *segue* α) se esiste un insieme $(u_0 \ldots, u_k)$ di elementi di Π tali che risulti $\alpha = u_0$, $\beta = u_k$ e $u_i \, \mathrm{I} \, u_{i+1}$, $h(u_i) < h(u_{i+1})$ per $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Infine un elemento u, con $h(u) > 0$, lo diremo *vincolato* quando è incidente con più di due elementi aventi altezza minore di $h(u)$, *libero* quando invece ciò non accade.

Passiamo ora a dimostrare i due lemmi:

LEMMA 1: *Fissato un intero p si può sempre trovare un valore di n tale che a Π_n appartenga una struttura di incidenza S la quale contiene:*

(I, *a*) *p punti, a tre a tre non allineati e uniti a due a due da rette di Π_n;*

(I, *b*) *p rette, a tre a tre non passanti per uno stesso punto e secantesi a due a due in punti di Π_n.*

Infatti una tale struttura, S, si può certamente trovare nel piano Π. Poichè gli elementi di essa sono in numero finito ne esiste certamente (almeno) uno di altezza massima n. Tutti gli elementi di S sono allora contenuti in Π_n, e il lemma risulta provato.

---

[4]) Cfr., per la maggior parte di queste, DEMBOWSKI [1].

LEMMA 2: *Se α è un elemento di Π, esiste in questo piano un elemento vincolato, β, che segue α.*

Nell'ipotesi che non valga la proprietà enunciata esisterà almeno un elemento α tale che in una qualsiasi successione

$$\alpha_0\,,\quad \alpha_1\,,\quad \alpha_2\,,\quad \ldots \tag{1}$$

nella quale risulti

$$\alpha = \alpha_0\ ;\quad \alpha_i \,\mathrm{I}\, \alpha_{i+1}\,,\quad h(\alpha_i) < h(\alpha_{i+1}) \qquad i = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

tutti gli elementi α_i con $i > 0$, sono liberi. Proveremo ora invece che, per il modo come è definito Π, per ogni α esiste una successione (1) per cui valgano le (2) e che contiene un elemento vincolato α_i $(i > 0)$.

A questo scopo facciamo uso del lemma 1 e posto $p = 9$ determiniamo n in modo che Π_n contenga una struttura S per cui valgano le proprietà (I, a) e (I, b). Consideriamo poi nella (1) un elemento α_i che sia una retta e per cui risulti $h(\alpha_i) = j > n$.

In Π_j la retta α_i è incidente con al più sei rette di S, quindi in Π_{j+1} [che contiene almeno le p rette di cui in (I, b)] la retta α_i è incidente con almeno tre punti, P_1, P_2, P_3, di altezza $j+1$. Proiettando da ciascuno di questi i punti di S non appartenenti ad α_i, si ottengono delle rette di altezza $j+2$ che seguono α. Poichè l'ipotesi che i punti di S siano due a due uniti da rette di Π_n porta che la retta che unisce un punto di altezza $j+1$ con uno di S non contiene altri punti di S, segue che da ciascun punto P_i $(i = 1, 2, 3)$ escono almeno cinque rette di altezza $j+2$. Esistono quindi certamente tre di tali rette non aventi a due a due un punto in comune. Allora per il modo seguito nel definire successivamente le strutture Π_n [cfr. sopra: 3)] qualcuna di queste tre rette fa parte di una terna di rette di Π_{j+2} atta a definire un punto vincolato di Π_{j+3}. Ma questo elemento vincolato segue α, e quindi il lemma 2 è provato.

Passiamo infine alla dimostrazione del teorema. Fissato un elemento α di Π proviamo che esiste una configurazione chiusa che lo contiene. Sia β un elemento vincolato che segue α e consideriamo la struttura, $\mathfrak{B}(\beta)$, formata da β e da tutti gli elementi di Π che precedono β. Poichè tutti questi elementi appartengono a $\Pi_{h(\beta)}$ il loro numero è certamente finito. È subito visto che ogni elemento di $\mathfrak{B}(\beta)$ avente altezza maggiore di zero è incidente con almeno tre elementi di $\mathfrak{B}(\beta)$. Precisamente la cosa è vera per β perchè è vincolato; inoltre ogni altro elemento $\gamma \in \mathfrak{B}(\beta)$ avente altezza maggiore di zero è incidente con almeno due elementi di altezza minore [cfr. (s 1)] e uno di altezza maggiore (in quanto γ precede β). Se anche ogni elemento di altezza zero è incidente con almeno tre elementi di $\mathfrak{B}(\beta)$, questa struttura è una configurazione chiusa e il teorema è provato. In caso contrario consideriamo un punto, P_1, di altezza zero appartenente a $\mathfrak{B}(\beta)$ e incidente con meno di tre rette di $\mathfrak{B}(\beta)$, e sia α_1 una retta incidente a P_1 e non appartenente a $\mathfrak{B}(\beta)$. Diciamo $\mathfrak{B}(\beta_1)$ la struttura che si ottiene operando su α_1 come si è fatto ora per α. Se $\mathfrak{B}(\beta) \bigcup \mathfrak{B}(\beta_1)$ è una configurazione chiusa il teorema è provato. In caso contrario esiste un punto, P_2, di altezza zero e incidente con meno di tre rette di $\mathfrak{B}(\beta) \bigcup \mathfrak{B}(\beta_1)$. Sia α una retta incidente con P_2 e non contenuta in $\mathfrak{B}(\beta) \bigcup \mathfrak{B}(\beta_1)$: applicando ancora il procedimento ora indicato si ottiene la struttura $\mathfrak{B}(\beta) \bigcup \mathfrak{B}(\beta_1) \bigcup \mathfrak{B}(\beta_2)$. Poichè i punti di altezza zero sono in numero finito: ripetendo un numero finito di volte questa costruzione si perviene ad una configurazione chiusa $\mathfrak{B}(\beta) \bigcup \ldots \ldots \bigcup \mathfrak{B}(\beta_t)$ che contiene α e quindi il teorema risulta provato.

È subito visto che Π non può invece contenere una configurazione 4-chiusa. Infatti sia $\mathfrak{C}$ una tale configurazione. Poichè gli elementi di $\mathfrak{C}$ sono in numero finito, ve ne è tra questi almeno uno di altezza massima. Questo è incidente con al più tre elementi di $\mathfrak{C}$, e quindi $\mathfrak{C}$ non è 4-chiusa. È così provato il

TEOREMA 2: *Il piano Π è 4-aperto.*

4. - Le definizioni introdotte nel n. 2 pongono la questione di esaminare in che relazione stia la famiglia più semplice di piani infiniti, quella dei piani desarguesiani infiniti con la nozione di piano k-aperto.

Daremo una risposta a questa provando il seguente

TEOREMA 3: *Un piano desarguesiano infinito contiene delle configurazioni n-chiuse per qualunque valore ($\geqq 3$) dell'intero n.*

In altre parole: un piano desarguesiano infinito non è n-aperto per alcun valore di n. Questo teorema porta come conseguenza che l'insieme dei piani grafici non è esaurito dalla classe dei piani aperti e dalle infinite classi dei piani k-aperti ($k = 4, 5, \ldots$), e quindi accanto a queste deve essere collocata un'ultima famiglia di piani che diremo piani ∞-aperti.

Dimostriamo ora il teorema. Detto π il piano desarguesiano in questione e fissato il valore di n, consideriamo uno spazio proiettivo, S_n, a n dimensioni, i cui piani siano isomorfi a π.

Scegliamo poi in S_n un iperpiano, $\overline{S}_{n-1}$, e in questo fissiamo n spazi a $n-2$ dimensioni, $S^{(1)}_{n-2}, \ldots, S^{(n)}_{n-2}$ linearmente indipendenti in $\overline{S}_{n-1}$. In corrispondenza di ogni $S^{(i)}_{n-2}$ $(i = 1, \ldots, n)$ consideriamo infine n iperpiani distinti, $S^{(i,j)}_{n-1}$ $(j = 1, \ldots, n)$, passanti per $S^{(i)}_{n-2}$. Ognuna delle seguenti n^n $(n-1)$-ple di iperpiani.

$$(3) \qquad S^{(i,j_i)}_{n-1} \quad (i = 1, \ldots, h-1, h+1, \ldots n)$$

determina una retta $r_{h,J}$ [dove J sta a indicare la permutazione $j_1, \ldots, j_{h-1}, j_{h+1}, \ldots, j_n$ che corrisponde alla $(n-1)$-pla (3)]. Tagliando la retta $r_{h,J}$, con gli iperpiani $S^{(k,k)}_{n-1}$ $(k = 1, \ldots, n)$ si ottengono su essa n punti, $P_{h,J,k}$. Ciascuno di questi punti appartiene ad n diverse rette $r_{h,J}$, e quindi facendo variare la retta $r_{h,J}$, e corrispondentemente gli iperpiani $S^{(k,k)}_{n-1}$ in tutti i modi possibili si ottengono n^n punti che presi insieme alle rette $r_{h,J}$ formano una configurazione (n^n_n, n^n_n) formata da n^n punti e altrettante rette, nella quale ogni elemento è incidente con n di nome diverso.

Fissato in S_n un piano, $\overline{\pi}$, è possibile determinare un S_{n-3} di S_n dal quale gli elementi della configurazione si proiettano su $\overline{\pi}$ in elementi tutti distinti. Queste proiezioni formano allora una configurazione n-chiusa di $\overline{\pi}$ e il teorema risulta così provato.

Alla classe dei piani ∞-aperti appartengono anche piani non desarguesiani. Ad esempio il modello di Hilbert (cfr. [3]) e il piano di Moulton (cfr. [5]), che si ottengono deformando una parte del piano reale, e i piani che si ottengono come prodotto libero di un piano desarguesiano infinito e (p. es.) di un punto.

BIBLIOGRAFIA

[1] Dembowski P.: *Freie und offene projektive Ebenen*. Math. Z., 72, pp. 410-438, 1960.
[2] Hall M.: *Projective planes*. Trans. Amer., Math. Soc., 54, pp. 229-277, 1943.
[3] Hilbert D.: *Grundlagen der Geometrie*, 1 Aufl., Berlin, 1899.
[4] Kopejkina L. I.: *Scomposizioni libere di piani proiettivi*. (In russo): Isvestija Akad. Nauk. SSSR, S. Mat., 9, pp. 495-526, 1945.
[5] Moulton F. R.: *A simple non-desarguesian plane geometry*. Trans. Amer. Math. Soc., 3, 192-195, 1902.