VINICIO VILLANI

Su alcune proprietà coomologiche dei fasci coerenti su uno spazio complesso

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 35, nº 1 (1965), p. 47-55

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_1_47_0>

SU ALCUNE PROPRIETÀ COOMOLOGICHE DEI FASCI COERENTI SU UNO SPAZIO COMPLESSO

Nota *) *di* VINICIO VILLANI (*a Pisa*) **)

INTRODUZIONE. – Sia X uno spazio complesso nel senso di Serre, con fascio strutturale $\mathfrak{O}$; X abbia topologia con base numerabile. Nel presente lavoro si stabiliscono alcuni criteri che assicurano $H^j(X, \mathfrak{F}) = 0$ per opportuni valori di j, e per ogni fascio di $\mathfrak{O}$-moduli $\mathfrak{F}$, che sia coerente su X.

Lo spunto per queste considerazioni mi è stato dato del seguente teorema di Andreotti-Grauert [1], pag. 250:

TEOREMA: *Se lo spazio complesso X è q-completo, allora*

$$H^j(X, \mathfrak{F}) = 0 \quad per \ j \geqslant q$$

e per ogni fascio $\mathfrak{F}$ coerente su X.

Dato uno spazio complesso X, denoteremo con S l'insieme dei punti singolari di X. Nel presente lavoro si dimostra:

TEOREMA 1: *Ogni spazio complesso X, tale che* $\dim_{\mathbf{C}} X = n$, $\dim_{\mathbf{C}} S = 0$, *è $(n+1)$-completo.*

In virtù del citato teorema di Andreotti-Grauert, ne segue:

COROLLARIO: *Se X soddisfa alle ipotesi del teorema* 1, *si ha*

$$H^j(X, \mathfrak{F}) = 0 \quad per \quad j \geqslant n+1$$

e per ogni fascio $\mathfrak{F}$ coerente su X.

---

*) Pervenuta in redazione il 18 maggio 1964.
Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Pisa.
**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Il teorema 1 ed il suo corollario valgono in particolare per ogni varietà complessa X, di dimensione complessa n. In tale caso, e sotto opportune ipotesi di natura differenziale per la varietà X, il corollario può essere migliorato:

TEOREMA 2: *Se X è una varietà complessa, di dimensione complessa n, e se esiste su X una funzione φ, differenziabile di classe C^∞, tale che:*

1) *Gli insiemi $B_c = \{x \in X;\ \varphi(x) < c\}$ sono relativamente compatti in X, per ogni $c \in \mathbf{R}$;*

2) *Nei punti $x \in X$ in cui* $\operatorname{grad} \varphi = 0$, *la forma di Levi $\mathscr{L}(\varphi, x)$ ha almeno un autovalore > 0; allora*

$$H^j(X, \mathfrak{F}) = 0 \quad per \quad j \geqslant n$$

e per ogni fascio $\mathfrak{F}$ coerente su X.

Senza fare alcuna ipotesi restrittiva sull'insieme singolare S dello spazio X, si dimostra inoltre il

TEOREMA 3: *Se X è uno spazio complesso arbitrario, con* $\dim_{\mathbf{C}} X = n$, $\dim_{\mathbf{C}} S = m$, *allora si ha*

$$H^j(X, \mathfrak{F}) = 0 \quad per \quad j \geqslant \max(n+2, 2m+1)$$

e per ogni fascio $\mathfrak{F}$ coerente su X.

1. Dimostriamo il teorema 1. Poichè $\dim_{\mathbf{C}} S = 0$, S consta di una totalità, eventualmente infinita, di punti isolati, siano essi $\{P_s\}$, $s = 1, 2, \ldots$. Quindi è possibile trovare due sistemi di intorni aperti $\{U_s\}$, rispettivamente $\{V_s\}$ di $\{P_s\}$, tali che:

1) U_s è relativamente compatto in X, per ogni s;

2) $\overline{U}_s \cap \overline{U}_t = \varnothing$ per ogni $s \neq t$;

3) Detto $\mathscr{T}_s$ lo spazio tangente di Zariski ad X nel punto P_s, e fissato un isomorfismo analitico π_s di un opportuno intorno W_s di P_s, in X, con un sottoinsieme analitico di $\mathscr{T}_s$, si abbia $\overline{U}_s \subset W_s$, per ogni s;

4) $\overline{V}_s \subset U_s$, per ogni s.

Sia poi $\varrho_s(x)$ una funzione differenziabile di classe C^∞ su X, tale che:

$$\begin{array}{lll} 0 \leqslant \varrho_s(x) \leqslant 1 & \text{per ogni} & x \in X \\ \varrho_s(x) = 1 & \text{per} & x \in V_s \\ \varrho_s(x) = 0 & \text{per} & x \in X - U_s \,. \end{array}$$

Sulla varietà $X - S$ esiste una funzione ψ differenziabile di classe C^∞, tale che gli insiemi $\{x \in X - S; \psi(x) < c\}$ siano relativamente compatti in $X - S$, per ogni $c \in \mathbf{R}$; per provarlo basta prendere una successione crescente $Z_1, Z_2, \ldots,$ di insiemi aperti relativamente compatti in $X - S$, tali che $\overline{Z}_h \subset Z_{h+1}$; $\bigcup Z_h = X - S$. Allora si può costruire (lemma di Urysohn) una funzione continua che vale h su $\partial \overline{Z}_h$ (per ogni intero h) e che su $Z_{h+1} - Z_h$ assume solo valori compresi tra h ed $h + 1$. Poichè le funzioni continue possono essere approssimate di quanto si vuole mediante funzioni differenziabili, ne segue subito l'esistenza di una ψ godente delle proprietà desiderate.

Si considerino poi negli spazi $\mathscr{T}_s$, di coordinate $z_1, \ldots, z_{d_s}$ ($d_s = \dim \mathscr{T}_s$) le funzioni

$$\chi_s = \varrho_s \, (s + \sum_{\alpha=1}^{d_s} z_\alpha \bar{z}_\alpha) \,.$$

Le funzioni χ_s danno luogo a delle funzioni differenziabili di classe C^∞ su X, ponendo

$$\psi_s(x) = \begin{cases} \pi_s^*(\chi_s) & \text{se} \quad x \in U_s \\ 0 & \text{se} \quad x \notin U_s \,. \end{cases}$$

Si ponga infine

$$\varphi = (1 - \sum_s \varrho_s)\psi + \sum_s \psi_s \,.$$

La funzione φ è chiaramente ben definita e differenziabile. Dimostriamo che X è $(n + 1)$-completo relativamente a φ: gli insiemi $\{x \in X; \varphi(x) < c\}$ sono relativamente compatti in X. Nei punti non singolari di X nulla si sa sugli autovalori di φ; ma in tali punti lo spazio tangente di Zariski ha dimensione n, ossia la forma di Levi $\mathscr{L}(\varphi, x)$ è una forma in n variabili; nella più sfavorevole delle ipotesi questa forma non avrà alcun autovalore positivo in taluni di questi punti, ossia, detto $n - q + 1$

il numero degli autovalori positivi, risulterà $n - q + 1 = 0$, vale a dire $q = n + 1$. Nei punti singolari P_s, la forma di Levi $\mathscr{L}(\varphi, x)$, calcolata nello spazio tangente $\mathscr{T}_s$, è una forma in d_s variabili; in questo caso però, per costruzione, tutti gli autovalori sono positivi, ossia si può prendere per q un qualunque intero $\geqslant 1$. Se ne trae appunto che X è q-completo, con $q = n + 1$.

2. La funzione φ, che nel teorema 1 doveva venire costruita, viene invece data a priori nel teorema 2; se X è una varietà compatta, una funzione φ soddisfacente alle ipotesi del teorema 2 non può esistere su X (nei punti di massimo di φ, l'ipotesi 2 certamente non è verificata). Invece è facile costruire delle funzioni φ soddisfacenti alle ipotesi del teorema 2, per ampie classi di varietà non compatte; ignoro se le ipotesi del teorema 2 possono venir soddisfatte per ogni varietà complessa non compatta.

Alla dimostrazione del teorema 2 premettiamo il seguente

LEMMA: *Ipotesi e notazioni siano come nel teorema* 2. *Per ogni* $c \in \mathbf{R}$ *la varietà* B_c *è* n*-completa, relativamente alla funzione* $\dfrac{1}{e^{Kc} - e^{K\varphi}}$, *ove* K *è una costante positiva opportunamente grande.*

DIMOSTRAZIONE: La funzione $\dfrac{1}{e^{Kc} - e^{K\varphi}}$ è ben definita su B_c. Sia Δ_c l'insieme dei punti di $\overline{B}_c$, in cui $\operatorname{grad}\varphi = 0$. Sia U_c un intorno aperto di Δ_c in X, tale che in tutti i punti x di U_c la forma di Levi $\mathscr{L}(\varphi, x)$ abbia almeno un autovalore positivo; ciò è possibile per via dell'ipotesi 2 del teorema 2, e per via della continuità degli autovalori di $\mathscr{L}(\varphi, x)$, al variare del punto x. L'insieme $D_c = \overline{B}_c - U_c \cap \overline{B}_c$ è un compatto che ha intersezione vuota con Δ_c.

Sia $V_1, \ldots, V_s$ un ricoprimento di D_c, costituito da un numero finito di carte locali di X, tali che ciascun V_ϱ sia contenuto come sottoinsieme relativamente compatto in una carta locale W_ϱ. Poniamo

$$\mu_\varrho = \min_{x \in \overline{V}_\varrho} (\operatorname{grad}\varphi \times \overline{\operatorname{grad}\varphi}) = \min_{x \in \overline{V}_\varrho} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial z_\alpha} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial \bar{z}_\alpha},$$

ove $z_1, \ldots, z_n$ sono le coordinate locali in W_ϱ.

Poniamo poi

$$\mu = \min_{\varrho=1,\dots,s} \mu_\varrho .$$

Il numero μ è positivo. Poniamo ora

$$M_\varrho = \max_{\substack{\|v\|=1\\ x\in \overline{V}_\varrho}} |\mathscr{L}(\varphi, x)(v)| ;$$

infine sia

$$M = \max_{\varrho=1,\dots,s} M_\varrho .$$

La tesi del lemma è verificata, prendendo per K una qualunque costante che verifichi la disuguaglianza $K\mu > M$. Infatti si ha:

$$\mathscr{L}\left(\frac{1}{e^{Kc}-e^{K\varphi}}, x\right)(v) = \frac{Ke^{K\varphi}}{(e^{Kc}-e^{K\varphi})^2}\,(\mathscr{L}(\varphi, x)(v) +$$

$$+ K|\mathrm{grad}\,\varphi \times v|^2) + 2\,\frac{(Ke^{K\varphi})^2}{(e^{Kc}-e^{K\varphi})^3}\,|\mathrm{grad}\,\varphi \times v|^2 .$$

L'ultimo addendo è sempre $\geqslant 0$; poichè il coefficiente del primo addendo è positivo, basta far vedere che in ciascun punto $x \in B_c$ la forma $\mathscr{L}(\varphi, x)(v) + K|\mathrm{grad}\,\varphi \times v|^2$ assume valore > 0 in una direzione v. Ora se $x \in U_c$ l'addendo $\mathscr{L}(\varphi, x)(v)$ è positivo almeno su una direzione v, per come U_c è stato costruito, e l'addendo $K|\mathrm{grad}\,\varphi \times v|^2$ è certo $\geqslant 0$. Se invece $x \in D_c$, la tesi si verifica prendendo v nella direzione individuata da $\overline{\mathrm{grad}\,\varphi}$, e ricordando la disuguaglianza $K\mu > M$.

Inoltre gli insiemi $\dfrac{1}{e^{Kc}-e^{K\varphi}} < C$ sono relativamente compatti in B_c, per ogni $C \in \mathbf{R}$. Ciò prova il lemma.

Osservazione: Più precisamente gli insiemi $\dfrac{1}{e^{Kc}-e^{K\varphi}} < C$ sono della forma

$$B_{c^\circ} = \{x \in X;\, \varphi(x) < c^0\} ,$$

con $c^0 = \frac{1}{K} \log \left(e^{Kc} - \frac{1}{C} \right)$, ossia le funzioni φ e $\frac{1}{e^{Kc} - e^{K\varphi}}$ hanno in B_c le medesime superficie di livello. Questa osservazione sarà essenziale per concludere la dimostrazione che ora daremo del teorema 2.

Sia $\mathfrak{A}$ un ricoprimento di X, adattato al fascio $\mathfrak{F}$, e tale che per ogni fissato intero m, gli aperti di $\mathfrak{A}$ aventi intersezione non vuota con $\overline{B}_m$ siano tutti contenuti in B_{m+1}. Allora per ogni m il ricoprimento $\mathfrak{A}$ può essere sostituito con un ricoprimento $\mathfrak{B}$ di B_{m+2}, adattato ad $\mathfrak{F}$ su B_{m+2}, e tale che le restrizioni di $\mathfrak{A}$ e di $\mathfrak{B}$ a B_{m+1} coincidano [1]).

Tenuto conto della coincidenza di questi due ricoprimenti su B_{m+1}, e del lemma dimostrato sopra, si può applicare la proposizione 19 di [1], nella dimensione $q = n$, ossia esiste un $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \leqslant 1$) tale che l'applicazione

$$Z^{n-1}(\mathfrak{A} | B_{m+\varepsilon}, \mathfrak{F}) \to Z^{n-1}(\mathfrak{A} | B_m, \mathfrak{F})$$

ha immagine densa. Si noti che qui viene sfruttata l'osservazione fatta al termine della dimostrazione del lemma; infatti B_m, $B_{m+\varepsilon}$, che sono definiti attraverso le superficie di livello della funzione φ, sono altresì definibili tramite le superficie di livello della funzione introdotta nel lemma, che dà la n-completezza di B_{m+2}.

Per far vedere che si può scegliere $\varepsilon = 1$ basta applicare un numero finito di volte la proposizione 20 di [1], nella quale va notato che l'ipotesi «il ricoprimento $\mathfrak{A}$ sia adattato ad $\mathfrak{F}$» è inessenziale.

Possiamo ora utilizzare il lemma di [1], pag. 250, per $r = n$, da cui segue appunto $H^n(X, \mathfrak{F}) \simeq H^n(\varnothing, \mathfrak{F}) = 0$.

Osservazione: Con una dimostrazione perfettamente analoga a quella del teorema 2, si prova altresì il teorema seguente:

Se X è una varietà complessa, di dimensione complessa n, e

---

1) Questa precisazione è necessaria, in quanto la restrizione di un ricoprimento adattato ad $\mathfrak{F}$ su X, non è più necessariamente un ricoprimento adattato ad $\mathfrak{F}$ su B_m.

se esiste su X *una funzione* φ, *differenziabile di classe* C^∞, *tale che*: 1) *Gli insiemi* $B_c = \{x \in X; \varphi(x) < c\}$ *sono relativamente compatti in* X, *per ogni* $c \in \mathbf{R}$;

2) *Nei punti* $x_0 \in X$ *in cui* grad $\varphi \neq 0$, *la forma di Levi* $\mathscr{L}(\varphi, x_0)$, *ristretta all'iperpiano complesso tangente all'ipersuperficie* $\varphi(x) = \varphi(x_0)$, *ha almeno* $n - q$ *autovalori* > 0; *nei punti* $x \in X$ *in cui* grad $\varphi = 0$, *la forma di Levi* $\mathscr{L}(\varphi, x)$ *ha almeno* $n - q + 1$ *autovalori* > 0. *Allora*

$$H^j(X, \mathfrak{F}) = 0 \quad \text{per} \quad j \geqslant q\,,$$

e per ogni fascio $\mathfrak{F}$ *coerente su* X.

3. La dimostrazione del teorema 3 fa uso della successione esatta di Mayer-Vietoris, stabilita in [1], che qui ricordiamo brevemente:

Siano: X *uno spazio topologico*, X_1, X_2 *due suoi sottoinsiemi aperti tali che* $X = X_1 \cup X_2$. *Sia poi* $\mathfrak{F}$ *un fascio di gruppi abeliani su* X. *Allora si ha la successione esatta di coomologia*:

$$\begin{aligned}
0 \to H^0(X, \mathfrak{F}) &\xrightarrow{\alpha} H^0(X_1, \mathfrak{F}) \oplus H^0(X_2, \mathfrak{F}) \xrightarrow{\beta} H^0(X_1 \cap X_2, \mathfrak{F}) \to \\
\to H^1(X, \mathfrak{F}) &\xrightarrow{\alpha} \cdots\cdots\cdots\cdots \xrightarrow{\beta} H^j(X_1 \cap X_2, \mathfrak{F}) \to \\
\to H^{j+1}(X, \mathfrak{F}) &\xrightarrow{\alpha} H^{j+1}(X_1, \mathfrak{F}) \oplus H^{j+1}(X_2, \mathfrak{F}) \xrightarrow{\beta} H^{j+1}(X_1 \cap X_2, \mathfrak{F}) \to \ldots
\end{aligned}$$

ove, indicate rispettivamente con $\tau_\lambda : X_\lambda \to X (\lambda = 1, 2)$ *e con* $\sigma_\lambda : X_1 \cap X_2 \to X_\lambda$ $(\lambda = 1, 2)$ *le iniezioni naturali, gli omomorfismi* α *e* β *sono definiti da*:

$$\begin{aligned}
\alpha(\xi) &= \tau_1^*(\xi) \oplus \tau_2^*(\xi) & \xi &\in H^j(X, \mathfrak{F}) \\
\beta(\xi_1 \oplus \xi_2) &= \sigma_1^*(\xi_1) - \sigma_2^*(\xi_2) & \xi_1 &\in H^j(X_1, \mathfrak{F}) \\
& & \xi_2 &\in H^j(X_2, \mathfrak{F})\,.
\end{aligned}$$

A questo punto possiamo dimostrare il teorema 3. Sia U un intorno aperto dell'insieme S dei punti singolari di X; dimostriamo in primo luogo che l'omomorfismo naturale di restrizione

$$H^j(X, \mathfrak{F}) \to H^j(U, \mathfrak{F})$$

è un isomorfismo per $j \geqslant n+2$. A tal fine poniamo $V = X - S$, e consideriamo la successione esatta di Mayer-Vietoris:

$$\ldots \to H^{j-1}(U \cap V, \mathfrak{F}) \to H^j(X, \mathfrak{F}) \to$$
$$\to H^j(U, \mathfrak{F}) \oplus H^j(V, \mathfrak{F}) \to H^j(U \cap V, \mathfrak{F}) \to \ldots;$$

se $j \geqslant n+2$, dal corollario al teorema 1 (applicabile in quanto V e $U \cap V$ sono varietà) risulta: $H^{j-1}(U \cap V, \mathfrak{F}) = 0$; $H^j(U \cap V, \mathfrak{F}) = 0$; $H^j(V, \mathfrak{F}) = 0$, per cui la successione sopra scritta diviene semplicemente

$$0 \to H^j(X, \mathfrak{F}) \xrightarrow{r_1^*} H^j(U, \mathfrak{F}) \to 0\,,$$

il che prova l'isomorfismo voluto.

Ne segue che il limite diretto $\lim\limits_{U \supset S} \operatorname{ind} H^j(U, \mathfrak{F})$, al variare di U nella famiglia degli intorni aperti di S in X, coincide con $H^j(X, \mathfrak{F})$. D'altra parte questo limite diretto è isomorfo con $H^j(S, \mathfrak{F})$ (cfr. [2], teorema 4.11.1); onde abbiamo provato l'isomorfismo $H^j(X, \mathfrak{F}) \simeq H^j(S, \mathfrak{F})$ per ogni $j \geqslant n+2$, e per ogni fascio $\mathfrak{F}$ coerente su X.

Il fascio $\mathfrak{F}$, ristretto ad S, in generale non si può interpretare come fascio coerente su S; tuttavia, se S ha dimensione complessa m, ossia dimensione topologica $2m$, si ha certamente $H^j(S, \mathfrak{F}) = 0$ per $j \geqslant 2m+1$; ne risulta la tesi del nostro teorema [1]).

OSSERVAZIONE: La tesi del teorema 3 è non banale, purchè sia $n \geqslant 2$, perchè in tal caso si ha $\max(n+2, 2m+1) \leqslant 2n =$ $=$ dim. topologica di X. Invece il teorema 3 diventa banale per

---

[2]) Il teorema 5 di [4] prova che S ha dimensione topologica $2m$, intendendo per dimensione topologica la dimensione definita nel cap. III di HUREWICZ-WALLMAN, *Dimension Theory* (cfr. anche [3], pag. 162). Il teorema 4 (pag. 181) di [3], applicabile poichè S ha topologia con base numerabile, dimostra che S ha dimensione topologica $2m$ anche nel senso del numero di Lebesgue; da quest'ultima caratterizzazione della dimensione segue appunto $H^j(S, \mathfrak{F}) = 0$, per $j \geqslant 2m+1$.

$n = 1$. Ma in tale caso siamo senz'altro nelle ipotesi del teorema 1, il cui corollario dà a sua volta informazioni non banali sulla coomologia dello spazio complesso X, a valori in un fascio coerente $\mathfrak{F}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDREOTTI A., GRAUERT H.: *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes.* Bull. Soc. Math. France, 90, p. 193-259, 1962.

[2] GODEMENT R.: *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Paris, Hermann, 1958.

[3] KURATOWSKI C.: *Topologie* I (2^a ed.), Warszawa, 1948.

[4] VILLANI V.: *Sulle varie nozioni di dimensione per un insieme analitico.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie III, 17, p. 141-173, 1963.