Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Valeriano Cominciolli

Analisi numerica di alcuni problemi ai limiti per l'operatore di Laplace iterato

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 35, nº 1 (1965), p. 190-235

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_1_190_0>

ANALISI NUMERICA DI ALCUNI PROBLEMI AI LIMITI PER L'OPERATORE DI LAPLACE ITERATO

Memoria *) *di* VALERIANO COMINCIOLI (*Pavia*) **)

Introduzione.

È noto che molte questioni di teoria dell'elasticità (cfr. ad es. Timoshenko-Goodier [1]) conducono a problemi ai limiti per l'equazione:

(E) $\Delta^2 u + ku = f\,,\ k \geqslant 0;\ \Delta^2 u = \Delta\Delta u,\ \Delta =$ Laplaciano.

Taluni di tali problemi sono già da molto tempo stati oggetto di studio dal punto di vista sia teorico che numerico (cfr. ad es. Collatz [1]; Fichera [1]; Forsythe-Wasow [1]; Kantorovich-Krylov [1]; Lions [1]; Magenes-Stampacchia [1] ecc.). Tale è il caso ad es. del cosiddetto « problema di Dirichlet » consistente nel cercare la soluzione u di (E) in un certo insieme Ω quando sulla frontiera di Ω la u e la sua derivata normale assumono valori fissati.

Scopo di questo lavoro, che è uno sviluppo della mia Tesi di Laurea discussa all'Università di Pavia col prof. E. Magenes, è di studiare *numericamente con un metodo di differenze finite*,

---

*) Pervenuta in redazione il 7 gennaio 1965.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Pavia.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività svolta nel gruppo n. 12 del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

alcuni di questi problemi — che mi risulta siano stati esplicitamente trattati solo parzialmente (cfr. Lions [3]) da questo punto di vista — partendo dalla loro formulazione variazionale nella forma datale da J. L. Lions in [2]. Lo strumento utilizzato per l'approssimazione, come si è già detto, è quello delle differenze finite [1]), rivisto tuttavia alla luce del metodo variazionale e per esso mi sono ispirato a O. A. Ladizenskaja [1], [2] e in modo particolare a J. L. Lions [1] e J. Céa [1], [2]. Con tale metodo è stato possibile qui ottenere per la soluzione approssimata e per altre funzioni, ottenute applicando ad essa operatori alle differenze finite, una convergenza in media d'ordine 2, come meglio si vedrà nel seguito.

È parso non inutile considerare, oltre ai suddetti problemi ai limiti, ancora il « problema di Dirichlet » per cui i problemi qui trattati risultano i seguenti che scriviamo in forma classica senza per ora precisare [2]) le ipotesi sulle funzioni e sull'insieme Ω:

1° $$\Delta^2 u + ku = f \text{ in } \Omega, k \geqslant 0; \quad u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ su } \Gamma$$

$$(\Gamma = \text{frontiera di } \Omega); \ \frac{\partial u}{\partial n} = \text{derivata normale esterna});$$

2° $$\Delta^2 u + ku = f \text{ in } \Omega, k > 0; \ \Delta u = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0 \text{ su } \Gamma;$$

3° $$\Delta^2 u + ku = f \text{ in } \Omega, k \geqslant 0; \quad u = \Delta u = 0 \text{ su } \Gamma;$$

4° $$\Delta^2 u + ku = f \text{ in } \Omega, k > 0; \quad u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ su } \Gamma_1,$$

$$\Delta u = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0 \text{ su } \Gamma_2, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma.$$

---

[1]) Per tale metodo si veda, anche per la vasta bibliografia ivi riportata, Forsythe-Wasow [1].

[2]) Osserviamo comunque che nel seguito per ogni problema si è avuta particolare cura di imporre ipotesi meno restrittive possibile e ciò non soltanto sulla f che verrà supposta solo di quadrato sommabile, ma anche sull'insieme Ω.

Nella loro formulazione variazionale si è seguita l'impostazione, che assume per l'operatore $\Delta^2 u$ come operatori « elementari » u, Δu anzichè u e le derivate prime e seconde. È questa in ogni caso un'impostazione più generale e d'altra parte si è resa qui necessaria perchè, mentre i problemi 1° e 3° si potrebbero trattare in ambedue le impostazioni, il 2° e il 4° si riescono a studiare solo in tale impostazione (cfr. Lions [2] pp. 77, 79; Magenes-Stampacchia [1] pp. 276, 288, 349).

I problemi suddetti vengono tradotti dunque in un'equazione funzionale del tipo:

$$(1) \qquad \int_\Omega \Delta u \Delta v dx + k \int_\Omega uv dx = \int_\Omega fv dx \qquad \forall v \in V \ ;$$

dove V è una opportuna classe di « test functions » e risolti rispetto ad u nello spazio delle funzioni u di quadrato sommabile in Ω insieme a Δu; la soluzione u viene poi numericamente approssimata, secondo certe opportune convergenze in media, dalle funzioni costanti a tratti soluzioni dei sistemi alle differenze finite approssimanti la (1).

Il lavoro si compone di due parti. Nella prima, dopo alcuni richiami relativi ad alcuni spazi di Hilbert, si riportano le formulazioni dei problemi; nella seconda poi si passa allo studio della loro approssimazione. In Appendice infine sono riportati i risultati ottenuti applicando il metodo esposto a un problema del tipo 3° [3]).

§ 1. - PROBLEMI CONTINUI

1. Generalità.

Si indica con Ω un insieme aperto e limitato dello spazio euclideo reale R^m a m dimensioni e si chiama con Γ e $\overline{\Omega}$ rispettivamente la sua frontiera e la sua chiusura.

---

[3]) I relativi calcoli sono stati eseguiti presso il « Centro Calcoli Numerici » dell'Università di Pavia.

Con $\mathfrak{D}(\Omega)$ si indica lo spazio delle funzioni [4]) indefinitamente differenziabili in Ω e a supporto compatto in Ω e con $C^k(\overline{\Omega}), k$ intero $\geqslant 0$ [$C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$, $0 < \lambda \leqslant 1$] lo spazio delle funzioni k-volte continuamente differenziabili in $\overline{\Omega}$ [e con derivate k-esime λ-hölderiane].

Supposto poi Ω di classe C^k [5]), k intero $\geqslant 0$, si indica con $C^k(\Gamma)$ lo spazio delle funzioni definite su Γ e ivi continue con le derivate d'ordine $\leqslant k$, da intendersi queste fatte rispetto ai parametri locali, nel senso preciso indicato da Miranda [1]. Con $L^2(\Omega)$ si indica, come di consueto, lo spazio (di Hilbert) delle (classi di) funzioni di quadrato sommabile in Ω munito del prodotto scalare:

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx \qquad \begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \dots, x_m) \\ dx &= dx_1\, dx_2 \dots dx_m. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ci è poi utile introdurre il seguente spazio:

DEF. 1.1 – *$D^0_\Delta(\Omega)$ è lo spazio delle (classi di) funzioni $u \in L^2(\Omega)$ tali che $\Delta u \in L^2(\Omega)$* [6]).

Lo spazio $D^0_\Delta(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare definito da:

$$(u, v)_{D^0_\Delta(\Omega)} = \int_\Omega uv dx + \int_\Omega \Delta u \Delta v dx. \tag{1.2}$$

---

[4]) Tutte le funzioni numeriche considerate in questo lavoro sono supposte, per comodità di esposizione e trattandosi di questioni numeriche, a valori reali.

[5]) Con ciò intendiamo dire (cfr. Miranda [1]) che ad ogni punto x di Γ si può associare un'ipersfera $\Gamma(x)$ di centro x, in modo che la parte di Γ contenuta in $\Gamma(x)$ sia rappresentabile, rispetto ad un sistema di assi $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ con l'origine in x, nella forma:

$$\xi_m = \psi(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}) \tag{I}$$

con ψ funzione definita in un opportuno intorno $D(x)$ dell'origine, di classe $C^k(D(x))$ e nulla con le derivate prime nell'origine. Per un tale dominio esiste l'iperpiano tangente a Γ in ogni punto x di Γ; supporremo la rappresentazione (I) tale che l'asse ξ_m sia la normale esterna, cioè che i punti di $\Omega \cap \Gamma(x)$ si ottengano per $\xi_m \leqslant 0$.

[6]) Qui e nel seguito la derivazione va intesa nel senso delle distribuzioni su Ω.

Saranno utili gli spazi hilbertiani $H^s(\Omega)$ (s intero $\geqslant 0$) e $H^{s+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (s intero qualunque); per maggiori particolari a riguardo di tali spazi si rinvia per es. a Lions-Magenes [1], [2]; ci si limita qui a ricordarne la definizione. Per s intero $\geqslant 0$, $H^s(\Omega)$ è lo spazio delle (classi di) funzioni $u \in L^2(\Omega)$, tali che $D^r u$ [7]) $\in L^2(\Omega)$ per $|r| \leqslant s$, munito del prodotto scalare:

$$(u, v)_{H^s(\Omega)} = \sum_{|r| \leqslant s} \int_\Omega D^r u D^r v dx . \tag{1.3}$$

Se Ω è di classe $\mathcal{C}^s$, $H^s(\Gamma)$ (s intero $\geqslant 0$) è lo spazio delle (classi di) funzioni su Γ che sono ivi di quadrato sommabile insieme alle loro derivate rispetto ai parametri locali d'ordine $\leqslant s$. $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ è lo spazio delle $u \in H^0(\Gamma)$ tali che esista finito l'integrale:

$$\int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^m} d\sigma_x d\sigma_y \qquad d\sigma\text{: elemento superficiale di } \Gamma.$$

Per s intero >0 si ha allora che $H^{s+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ è lo spazio delle $u \in H^s(\Gamma)$ e tali che le derivate di ordine s stanno in $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Ed infine $H^{s+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ per s intero < 0 si definisce come il duale (forte) dello spazio $H^{-s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Ricordiamo poi la seguente:

DEF. 1.2. – *$H_0^s(\Omega)$ (s intero > 0) è l'aderenza di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H^s(\Omega)$.*

È nota allora (cfr. Lions [2]) la seguente proposizione:

PROP. 1.1. – *L'aderenza di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $D_\Delta^0(\Omega)$ è $H_0^2(\Omega)$.*

Ricordiamo infine i seguenti due teoremi di tracce che danno significato alla traccia di u e della sua derivata normale su Γ anche se u è funzione degli spazi $H^s(\Omega)$ ($s = 1, 2$) e $D_\Delta^0(\Omega)$.

TEOREMA 1.1 - *Supposto Ω di classe $\mathcal{C}^s$ ($s = 1, 2,$) per $u \in \mathcal{C}^s(\bar{\Omega})$ poniamo $\gamma_j u = \dfrac{\partial^j u}{\partial n^j}$ ($j = 0, ..., s-1$), con $\dfrac{\partial^j u}{\partial n^j}$ derivata normale*

---

[7]) $D^r u = \dfrac{D^{|r|} u}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_m^{r_m}}$ dove $r = (r_1, ..., r_m)$ è una m-pla di numeri interi $\geqslant 0$ e $|r| = r_1 + ... + r_m$; se $r = (0, ..., 0)$, $D^r u = u$.

su Γ d'ordine j, n indicando il vettore unitario normale a Γ e diretto verso l'esterno.

L'applicazione $u \to \gamma u = \{\gamma_0 u, \dots \gamma_{s-1} u\}$ di $\mathcal{C}^s(\overline{\Omega}) \to \prod_{j=0}^{s-1} \mathcal{C}^{s-j}(\Gamma)$ si prolunga per continuità in una applicazione lineare continua ancora denotata con $u \to \gamma u$ di $H^s(\Omega)$ su $\prod_{j=0}^{s-1} H^{s-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$; inoltre:

(i) L'applicazione $u \to \gamma u$ è suriettiva.

(ii) Il nucleo di γ (cioè l'insieme delle $u \in H^s(\Omega)$ tali che $\gamma u = 0$) è $H_0^s(\Omega)$.

Per la dimostrazione si veda ad es. Prodi [1].

TEOREMA 1.2 - *Supposto Ω di classe $\mathcal{C}^2$, lo spazio $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ è denso in $D_\Delta^0(\Omega)$. L'applicazione $u \to \{\gamma_0 u, \gamma_1 u\}$ di $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) \to \mathcal{C}^2(\Gamma) \times \mathcal{C}^1(\Gamma)$ si prolunga per continuità in una applicazione lineare continua di $D_\Delta^0(\Omega)$ in $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$. L'applicazione prolungata è ancora denotata con $u \to \{\gamma_0 u, \gamma_1 u\}$.*

Per la dimostrazione si veda Lions-Magenes [1] [8]).

2. Formulazioni variazionali dei problemi:

$$1^\circ) \qquad \Delta^2 u + ku = f \text{ in } \Omega, k \geqslant 0; \quad u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ su } \Gamma.$$

$$2^\circ) \qquad \Delta^2 u + ku = f \text{ in } \Omega, k > 0; \quad \Delta u = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0 \text{ su } \Gamma.$$

$$3^\circ) \qquad \Delta^2 u + ku = f \text{ in } \Omega, k \geqslant 0; \quad u = \Delta u = 0 \text{ su } \Gamma.$$

L'insieme Ω in questo numero verrà supposto aperto e limitato qualunque per il problema 1°, di classe $\mathcal{C}^2$ per i rimanenti problemi.

Tutti e tre i problemi indicati, come pure il problema che

---

[8]) Ivi tuttavia il teorema è dimostrato in condizioni più restrittive su Ω, ma si può agevolmente vedere che l'estensione del tipo qui fatta è possibile con gli stessi ragionamenti.

sarà oggetto del successivo numero, nella teoria variazionale [9]), come è noto, si lasciano inquadrare in una visione unitaria.

Indichiamo con $V(\Omega)$ un sottospazio chiuso di $D^0_\Delta(\Omega)$ contenente $H^2_0(\Omega)$:

$$H^2_0(\Omega) \subset V(\Omega) \subset D^0_\Delta(\Omega) .$$

Munito $V(\Omega)$ della struttura hilbertiana indotta da $D^0_\Delta(\Omega)$, introduciamo la seguente forma bilineare e continua su $V(\Omega) \times V(\Omega)$:

$$a(u, v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v dx + k \int_\Omega uv dx \qquad k \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Facciamo ora l'*ipotesi*:

$$a(v, v) \geqslant \alpha \, \| v \|^2_{D^0_\Delta(\Omega)} \qquad \forall v \in V(\Omega). \tag{2.2}$$

Vale allora (cfr. Lions [2]) il seguente:

Teorema 2.1 - *Nell'ipotesi* (2.2) *per ogni funzione* $f \in L^2(\Omega)$ *esiste ed è unica la funzione* $u \in V(\Omega)$ *che verifica*:

$$a(u, v) = \int_\Omega f v dx \qquad \forall v \in V(\Omega). \tag{2.3}$$

Interpretiamo il risultato ottenuto con il teor. 2.1.

Assumiamo in (2.3) $v = \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$; si ha:

$$\int_\Omega (\Delta u \Delta \varphi + k u \varphi) dx = \int_\Omega f \varphi dx \tag{2.4}$$

cioè, essendo φ qualsiasi in $\mathfrak{D}(\Omega)$:

$$\Delta^2 u + k u = f \tag{2.5}$$

---

[9]) Come già avvertito nell'introduzione per tale teoria si segue qui la forma datale da J.L. Lions in [2]; a questo lavoro e a Magenes-Stampacchia [1] si rinvia in ogni caso per una più dettagliata trattazione dei problemi qui indicati.

ove naturalmente $\Delta^2 u$ è calcolata nel senso delle distribuzioni su Ω.

Supponiamo ora $V(\Omega) = H_0^2(\Omega)$. In questo caso la (2.2) è senz'altro valida; per $k > 0$ infatti essa è del tutto evidente e per $k = 0$ essa è conseguenza del fatto che in $H_0^2(\Omega)$ vale la ben nota maggiorazione:

$$\| u \|^2_{H^2(\Omega)} \leqslant c \| \Delta u \|^2_{L^2(\Omega)} \qquad c > 0. \tag{2.6}$$

Pertanto vale il teorema (2.1) e, osservato allora che le condizioni al contorno per la soluzione u dell'equazione funzionale (2.3) si possono, come è noto, ritenere soddisfatte in senso generalizzato per il fatto che la $u \in H_0^2(\Omega)$, si ha che tale equazione risolve in senso «debole» il problema 1°. Si osserverà come formulato così il «problema di Dirichlet» per l'operatore Δ^2 mantiene un senso preciso, le condizioni ai limiti essendo intese nel senso generalizzato sopra detto, anche quando Ω è un aperto qualunque.

Osserviamo ora che dalla (2.5), poichè u e f sono $\in L^2(\Omega)$, si ricava $\Delta^2 u \in L^2(\Omega)$ e quindi $\Delta u \in D_\Delta^0(\Omega)$. Supposto allora Ω di classe C^2 in virtù del teorema di traccia 1.2 ha senso definire $\gamma_0 \Delta u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ e $\gamma_1 \Delta u \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$. Data ora una qualsiasi funzione $v \in H^2(\Omega) \cap V(\Omega)$, moltiplichiamo ambo i membri di (2.5) per v ed integriamo su Ω; si ha:

$$\int_\Omega \Delta^2 uv dx + k \int_\Omega uv dx = \int_\Omega fv dx ,$$

cioè per la (2.3)

$$\int_\Omega \Delta^2 uv dx = \int_\Omega \Delta u \Delta v dx . \tag{2.7}$$

Tenendo conto della seguente formula di Green generalizzata (cfr. Lions Magenes [1]):

$$\int_\Omega \Delta^2 uv dx = <\gamma_1 \Delta u, \gamma_0 v> - <\gamma_0 \Delta u, \gamma_1 v> + \int_\Omega \Delta u \Delta v dx , \tag{2.8}$$

dove, tenuti presenti i teor. 1.1 e 1.2, il primo $< \ >$ indica la dualità tra $H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ e $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ e il secondo la dualità tra $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ e $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, dalla (2.7) si ottiene:

$$(2.9) \qquad < \gamma_1 \Delta u, \gamma_o v > - < \gamma_o \Delta u, \gamma_1 v > = 0 \, .$$

Assumiamo ora $V(\Omega) = D^0_\Delta(\Omega)$. In questo caso la (2.2) è valida solo per $k > 0$ e pertanto anche il teorema (2.1) vale soltanto in tale ipotesi. Presa allora una funzione $\varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ si può trovare (teor. 1.1) una funzione $v \in H^2(\Omega)$ tale che: $\gamma_o v = \varphi$; $\gamma_1 v = 0$. Per tale funzione v la (2.9) diviene:

$$(2.10) \qquad < \gamma_1 \Delta u, \varphi > = 0 \, .$$

Perchè ciò è possibile per ogni $\varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$, si ha: $\gamma_1 \Delta u = 0$. Ragionando in modo analogo si trova l'altra condizione al contorno: $\gamma_o \Delta u = 0$. In questo caso pertanto l'equazione funzionale (2.3) risolve il problema 2°, che viene classificato come « problema di Neumann » relativo all'operatore $\Delta^2 u$ o meglio relativo alla decomposizione: $\Delta^2 u = \Delta \Delta u$.

Assumiamo infine $V(\Omega) = \{v \mid v \in D^0_\Delta(\Omega) \ \gamma_o v = 0\}$[10]. La (2.2) vale allora sia per $k > 0$ che per $k = 0$ perchè anche in questo caso vale la ben nota maggiorazione (2.6). La (2.9) si riduce alla:

$$< \gamma_o \Delta u, \gamma_1 v > = 0 \, ,$$

valida per ogni $v \in V(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Con un ragionamento del tipo di quello svolto poco fa si ottiene allora: $\gamma_o \Delta u = 0$ e pertanto la (2.3) in questo caso traduce il problema 3°.

---

[10]) Nelle ipotesi fatte su Ω si ha: $V(\Omega) = H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, per noti risultati sulla regolarizzazione delle soluzioni del problema di Dirichlet per Δu (cfr. Magenes-Stampacchia [1]).

3. Un problema misto del tipo di Dirichlet-Neumann..

È noto che vengono chiamati problemi misti i problemi che consistono nel cercare la soluzione in Ω di una equazione differenziale quando siano assegnate su porzioni diverse di Γ condizioni ai limiti diverse. Tra i numerosi problemi di tipo misto che si possono studiare in relazione all'operatore $\Delta^2 + k$, ci si limita qui a considerare il seguente, la cui formulazione si può far rientrare nello schema del N. precedente.

Siano Γ_1 e Γ_2 due porzioni di Γ di misura positiva e disgiunte. Supponiamo inoltre che Γ_1 e Γ_2 siano aperti, di frontiera relativamente a Γ di misura $(m-1)$-dimensionale nulla e tali che $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \Gamma$.

Supposto Ω di classe C^2, definiamo come spazio $V(\Omega)$ la chiusura in $D^0_\Delta(\Omega)$ delle $u \in C^2(\overline{\Omega})$ con $\gamma_0 u = \gamma_1 u = 0$ su Γ_1.

Introdotta allora la forma $a(u, v)$, con $k > 0$, per risultati già acquisiti, si ha che la soluzione dell'equazione funzionale (2.3) verifica in Ω l'equazione:

$$\Delta^2 u + ku = f$$

e per ogni $v \in H^2(\Omega) \cap V(\Omega)$ la condizione:

$$< \gamma_1 \Delta u, \gamma_0 v > - < \gamma_0 \Delta u, \gamma_1 v > = 0 . \tag{3.1}$$

Sia ora φ una funzione $\in C^2(\Gamma)$ e a supporto compatto in Γ_2; è possibile allora trovare una $v \in C^2(\overline{\Omega})$ tale che: $\gamma_0 v = \varphi$; $\gamma_1 v = 0$. La v ovviamente appartiene a $V(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, per cui, con tale scelta di v, la (3.1) diventa: $< \gamma_1 \Delta u, \varphi > = 0$. Poichè ciò è possibile per ogni $\varphi \in C^2(\Gamma)$ a supporto compatto in Γ_2 si ha che la distribuzione $\gamma_1 \Delta u$ è nulla su Γ_2.

In modo analogo si dimostra che $\gamma_0 \Delta u = 0$ su Γ_2.

In conclusione quindi la soluzione dell'equazione (2.3) in questo caso verifica il seguente problema:

$$\begin{aligned} \Delta^2 u + ku \quad &= f \text{ in } \Omega ; \\ \gamma_0 u = \gamma_1 u \quad &= 0 \text{ su } \Gamma_1 ; \\ \gamma_0 \Delta u = \gamma_1 \Delta u &= 0 \text{ su } \Gamma_2 . \end{aligned}$$

§ 2. - APPROSSIMAZIONE DELLE SOLUZIONI

1. Alcune notazioni.

Nello spazio euclideo R^m si fissa un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Introdotto il vettore $h = (h_1, h_2, ..., h_m)$ ove h_i sono numeri reali positivi e posto $|h| = (h_1^2 + h_2^2 + ... + h_m^2)^{\frac{1}{2}}$, si indica con R_h l'insieme dei punti:

$$P = (p_1h_1, p_2h_2, ..., p_mh_m) \text{ con } p_j \text{ interi } \geqslant 0 \text{ o } < 0 .$$

Indicato poi con g una qualsiasi funzione definita su R^m, si definiscono i seguenti operatori alle differenze finite:

$$\nabla_i g(x) = \frac{1}{h_i}\left(g\left(x + \frac{h_i}{2}\right) - g\left(x - \frac{h_i}{2}\right)\right) ;$$

$$\Delta_h g(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{h_i^2}(g(x + h_i) + g(x - h_i) - 2g(x)) ; \qquad [11]$$

ove

$$g(x + c_i) = g(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + c_i, x_{i+1}, ..., x_m) .$$

Si indica ora con $\sigma_h(P)$ il parallelepipedo semiaperto superiormente di centro $P(\in R_h)$, di lati paralleli agli assi e di lunghezza $h_1, h_2, ..., h_m$, definito cioè dalle disuguaglianze: $P - \frac{h_i}{2} \leqslant x_i < P + \frac{h_i}{2}$, $i = 1, 2, ..., m$.

---

[11]) Gli operatori ∇_i e Δ_h così introdotti «approssimano» D_i e rispettivamente Δ nel senso che, come è facile verificare, per ogni funzione v una volta continuamente differenziabile (risp. due volte continuamente differenziabile) si ha: $\nabla_i v \to D_i v$ (risp. $\Delta_h v \to \Delta v$) uniformemente su ogni compatto, quando $|h| \to 0$.

Si noterà inoltre che: $\Delta_h g(x) = \sum_{i=1}^{m} \nabla_i \nabla_i g(x)$.

Con $\lambda_h(P)$ si indica poi il parallelepipedo definito dalle disuguaglianze: $P - h_i \leqslant x_i < P + h_i$, $i = 1, 2, ..., m$.

Si definiscono allora i seguenti insiemi:

$$\varrho_h(P) = \sigma_h(P) \bigcup \left[\bigcup_{i=1}^{m} \sigma_h\left(P + \frac{h_i}{2}\right)\right] \bigcup \left[\bigcup_{i=1}^{m} \sigma_h\left(P - \frac{h_i}{2}\right)\right] ;$$

$$\delta_h(P) = \sigma_h(P) \bigcup [\bigcup_{i=1}^{m} \sigma_h(P + h_i)] \bigcup [\bigcup_{i=1}^{m} \sigma_h(P - h_i)] ;$$

$$\nu_h(P) = \lambda_h(P) \bigcup [\bigcup_{i=1}^{m} \sigma_h(P + h_i)] \bigcup [\bigcup_{i=1}^{m} \sigma_h(P - h_i)] .$$

Si indica infine con $w_P(x)$ la funzione caratteristica dell'insieme $\sigma_h(P)$, cioè la funzione $= 1$ su $\sigma_h(P)$ e $= 0$ in $R^m - \sigma_h(P)$.

Sono allora di facile verifica le seguenti identità:

$$\nabla_i w_P(x) = \frac{1}{h_i} (w_{P - \frac{h_i}{2}}(x) - w_{P + \frac{h_i}{2}}(x)) ; \tag{1.1}$$

$$\triangle_h w_P(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{h_i^2} (w_{P - h_i}(x) + w_{P + h_i}(x) - 2w_P(x)). \tag{1.2}$$

2. **Indirizzo generale.**

Alle formulazioni variazionali continue del § 1 si associano qui formulazioni variazionali « discrete ».

All'insieme Ω viene associato un certo insieme di punti $\Omega_h \subset R_h$ e allo spazio $V(\Omega)$ lo spazio delle funzioni reali definite su tutto R^m e costanti a tratti:

$$V_h = \{v_h \mid v_h = \sum_{P \in \Omega_h} \xi_P w_P(x), \quad \xi_P = \text{costanti reali}\} . \tag{2.1}$$

Alla forma $a(u, v)$ (§ 1, N. 2) si associa un forma approssimata $a_h(u_h, v_h)$, ottenuta sostituendo agli operatori differenziali i corrispondenti operatori alle differenze finite.

Si considera allora il problema seguente:

Problema 2.1 - *Per $f \in L^2(\Omega)$ trovare $u_h \in V_h$ che verifica*:

$$a_h(u_h, v_h) = \int_\Omega f v_h dx \tag{2.2}$$

per ogni $v_h \in V_h$.

Il problema 2.1 si riduce sostanzialmente alla risoluzione di un sistema di equazioni lineari algebriche. La (2.2) infatti è verificata per tutte le v_h di V_h se lo è per le funzioni $w_M(x)$, se cioè si ha:

$$\sum_{P \in \Omega_h} \xi_P a_h(w_P(x). \ w_M(x)) = \int_\Omega f w_M(x) dx \tag{2.3}$$

per ogni $M \in \Omega_h$.

Considerate come incognite le ξ_P, (2.3) è allora un sistema lineare di matrice $A_h = \| a_h(w_P, w_M) \|$.

Più avanti, dimostrata la risolubilità del sistema (2.3) per ogni singolo problema trattato, si daranno alcune proprietà di tali sistemi in vista della loro risoluzione numerica.

Determinate le u_h attraverso la risoluzione di (2.3), si stabiliscono poi teoremi di convergenza della u_h alla soluzione u del problema continuo corrispondente.

3. Due lemmi.

Prima di iniziare la trattazione particolareggiata dei problemi, si riuniscono in questo numero le dimostrazioni di due lemmi più volte richiamati nel seguito.

Indicato con I_h l'insieme di punti: $\{M \mid M \in R_h, \varrho_h(M) \subset \Omega\}$, si indica con G_h lo spazio di funzioni: $\{g_h \mid g_h = \sum_{M \in I_h} \eta_M w_M(x)\}$.

Lemma 3.1 - *Per g, z qualsiasi in G_h, è verificata l'uguaglianza*:

$$\sum_{i=1}^{m} \int_\Omega \nabla_i g \nabla_i z dx = - \int_\Omega g \Delta_h z dx . \tag{3.1}$$

Dimostrazione.

Verifichiamo la (3.1) innanzitutto in R^1, cioè nel caso in cui Ω sia un insieme lineare. Osserviamo allora che, essendo Ω un insieme aperto qualunque, purchè limitato, esso potrebbe anche comporsi di un numero infinito di intervallini disgiunti; tuttavia, per il modo con il quale è stato definito I_h, è subito visto che per entrambi i membri della (3.1) non recano contributo tutti quegli intervallini che sono di ampiezza $\leqslant 2h$; basta infatti osservare che in tali intervallini ogni $g \in G_h$ è nulla insieme alla $\nabla_1 g$. Ne segue pertanto che la (3.1) è da verificare per un numero finito di intervalli e quindi basterà verificarla nel caso di un solo intervallo.

Supposto $]a, b[$ tale intervallo, la (3.1) si riduce, sopprimendo a ∇_1 l'indice 1, alla:

$$\int_a^b \nabla g \nabla z dx = - \int_a^b g \nabla \nabla z dx . \tag{3.2}$$

Attraverso ovvi passaggi ed integrando per sostituzione e ricordando la definizione di G_h si ha:

$$\begin{aligned}\int_a^b \nabla g \nabla z dx &= \frac{1}{h^2}\left\{ \int_{a+\frac{h}{2}}^{b+\frac{h}{2}} g(t)z(t)dt - \int_{a+\frac{h}{2}}^{b+\frac{h}{2}} g(t)z(t-h)dt - \int_{a-\frac{h}{2}}^{b-\frac{h}{2}} g(t)z(t+h)dt + \right.\\ &\quad \left. + \int_{a-\frac{h}{2}}^{b-\frac{h}{2}} g(t)z(t)dt \right\} = \frac{1}{h^2}\left\{ \int_a^b g(x)z(x)dx - \int_a^b g(x)z(x-h)dx - \right.\\ &\quad \left. - \int_a^b g(x)z(x+h)dx + \int_a^b g(x)z(x)dx \right\} = - \int_a^b g(x)\nabla\nabla z dx\end{aligned}$$

c.v.d.

Verificato che la (3.1) è valida in uno spazio ad una sola dimensione, è facile far vedere che essa è pure valida in uno spazio a dimensione m qualsiasi. Infatti, chiamato con $x_{\hat{i}}$ il vettore $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)$ e con $R_{\hat{i}}^{m-1}$ lo spazio ad $m-1$

dimensione dei vettori $x_{\hat{i}}$, chiamiamo con $S_{x_{\hat{i}}}(\Omega)$ la sezione di Ω di piede $x_{\hat{i}}$, cioè l'insieme dei punti di Ω che si ottengono al variare della coordinata x_i quando si fissi $x_{\hat{i}}$ e con $\Pi_i(\Omega)$ la proiezione di Ω su $R_{\hat{i}}^{m-1}$, cioè l'insieme dei punti di $R_{\hat{i}}^{m-1}$ descritti da $x_{\hat{i}}$ quando il punto x descrive Ω.

Per il teorema di Fubini si ha allora:

$$\int_{\Omega} \nabla_i g \nabla_i z dx = \int_{\Pi_i(\Omega)} dx_{\hat{i}} \int_{S_{x_{\hat{i}}}(\Omega)} \nabla_i g \nabla_i z dx_i \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Ora, per quanto si è dimostrato nel caso unidimensionale, si ha:

$$\int_{S_{x_{\hat{i}}}(\Omega)} \nabla_i g \nabla_i z dx_i = -\int_{S_{x_{\hat{i}}}(\Omega)} g \nabla_i \nabla_i z dx_i$$

e quindi:

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{\Omega} \nabla_i g \nabla_i z dx = -\sum_{i=1}^{m} \int_{\Omega} g \nabla_i \nabla_i z dx$$

cioè la (3.1), quando si tenga presente che: $\Delta_h z = \sum_{i=1}^{m} \nabla_i \nabla_i z$.

LEMMA 3.2 - *Per ogni $g \in G_h$ vale la seguente maggiorazione*:

$$\| g \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c \sum_{i=1}^{m} \| \nabla_i g \|^2_{L^2(\Omega)} \tag{3.3}$$

con c costante > 0, indipendente da h e da g.

DIMOSTRAZIONE.

Incominciamo a dimostrare la (3.3) nel caso in cui Ω è un insieme lineare. Anche qui, per l'osservazione fatta al Lemma precedente, basterà limitarci a prendere in considerazione il caso in cui $\Omega =]a, b[$, a dimostrare cioè la:

$$\int_a^b g^2 dx \leqslant c \int_a^b (\nabla g)^2 dx . \tag{3.4}$$

Indicati con $M_1, M_2, \ldots, M_r$ i punti di I_h, supposti ordinati ad es. nel senso delle ascisse crescenti, poniamo $M_0 = M_1 - h$, $M_{r+1} = M_r + h$. Tenuto conto della definizione di I_h, si ha allora $M_0 > a$, $M_{r+1} \leqslant b$. Poniamo poi:

$$S_j = g(M_j) - g(M_{j-1}) \qquad j = 1, 2, \ldots, r+1.$$

Poichè la g è nulla in $\left(a, M_1 - \frac{h}{2}\right)$ e in $\left(M_r + \frac{h}{2}, b\right)$, si ha:

$$\max_{x \in (a,b)} |g| \leqslant \sum_{j=1}^{r+1} |S_j| = \sum_{j=1}^{r+1} \frac{|S_j|}{h} h = \int_{M_0}^{M_{r+1}} |\nabla g| \, dx$$

ed anche:

$$\max_{x \in (a,b)} |g| \leqslant (M_{r+1} - M_0)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{M_0}^{M_{r+1}} (\nabla g)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant (b-a)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (\nabla g)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

e quindi in definitiva:

$$\int_a^b g^2 dx \leqslant (b-a)^2 \int_a^b (\nabla g)^2 dx \qquad c.v.d.$$

Per dimostrare la (3.3) nel caso generale si può procedere a questo modo. Utilizzando le notazioni introdotte nel Lemma precedente si ha ovviamente:

$$\int_\Omega g^2 dx \leqslant \sum_{i=1}^{m} \int_{\Pi_i(\Omega)} dx_{\hat{i}} \int_{S_{x_{\hat{i}}}(\Omega)} g^2 dx_i \, .$$

Ora, per quanto si è dimostrato nel caso unidimensionale, si ha:

$$\int_{S_{x_{\hat{i}}}(\Omega)} g^2 dx_i \leqslant d^2 \int_{S_{x_{\hat{i}}}(\Omega)} (\nabla_i g)^2 dx_i \qquad d = \text{diametro di } \Omega.$$

e quindi:

$$\int_{\Omega} g^2 dx \leqslant d^2 \sum_{i=1}^{m} \int_{\Pi_i(\Omega)} dx_{\hat{i}} \int_{S_{x_{\hat{i}}}(\Omega)} (\nabla_i g)^2 dx_i = d^2 \sum_{i=1}^{m} \| \nabla_i g \|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \text{c.v.d.}$$

4. Problema:

$$1^{\circ}) \qquad \Delta^2 u + ku = f \text{ in } \Omega,\ k \leqslant 0;\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ su } \Gamma .$$

L'insieme Ω è un aperto limitato qualunque di R^m.

Seguendo la linea tracciata in N. 2 si introducono le seguenti definizioni:

$$\Omega_h = \{ M \mid M \in R_h,\ \nu_h(M) \subset \Omega \} ; \tag{4.1}$$

$$V_h = \{ v_h \mid v_h = \sum_{M \in \Omega_h} \xi_M w_M(x) \} ; \tag{4.2}$$

$$a_h(u_h, v_h) = k \int_{\Omega} u_h v_h dx + \int_{\Omega} \Delta_h u_h \Delta_h v_h dx . \tag{4.3}$$

Osservato ora che l'insieme Ω_h così definito è ovviamente contenuto nell'insieme I_h definito in N. 3, si ha che per le funzioni di V_h sono senz'altro validi i due lemmi del N. 3.

Dal lemma 3.1 si ha allora in particolare, posto $g = z = u_h \in V_h$:

$$\sum_{i=1}^{m} \| \nabla_i u_h \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \| u_h \|_{L^2(\Omega)} \| \Delta_h u_h \|_{L^2(\Omega)} . \tag{4.4}$$

Dal Lemma 3.2 posto $g = u_h$ si ha poi:

$$\| u_h \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c \sum_{i=1}^{m} \| \nabla_i u_h \|^2_{L^2(\Omega)} . \tag{4.5}$$

Dalle (4.4) e (4.5) si ricava:

$$\| u_h \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c \, \| u_h \|_{L^2(\Omega)} \, \| \Delta_h u_h \|_{L^2(\Omega)}$$

cioè:

$$\| u_h \|_{L^2(\Omega)} \leqslant c \, \| \Delta_h \, u_h \|_{L^2(\Omega)} \, . \tag{4.6}$$

Si può allora mettere in evidenza la seguente importante proprietà della forma $a_h(u_h, v_h)$: sia per $k > 0$ che per $k = 0$ esiste una costante $\alpha > 0$ tale che:

$$a_h(u_h, u_h) \geq \alpha \, \| u_h \|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u_h \in V_h \, . \tag{4.7}$$

Proseguendo la trattazione consideriamo il problema:

PROBLEMA 4.1 - *Per* $f \in L^2(\Omega)$ *determinare* u_h *in* V_h *tale che*:

$$a_h(u_h, v_h) = \int_\Omega f v_h dx \quad \textit{per ogni } v_h \in V_h \; ; \tag{4.8}$$

e ricordiamo che esso si riduce alla risoluzione del sistema lineare:

$$\sum_{P \in \Omega_h} \xi_P a_h(w_P(x), w_M(x)) = \int_\Omega f w_M(x) dx \qquad \forall M \in \Omega_h. \tag{4.9}$$

TEOREMA 4.1 - *Il sistema* 4.9 *ammette una ed una sola soluzione.*

DIMOSTRAZIONE.

Consideriamo il sistema omogeneo associato a (4.9) cioè supponiamo ad es. $f = 0$. Per la (4.8) si ha allora in particolare: $a_h(u_h, u_h) = 0$. Dalla (4.7) si ricava perciò: $\| u_h \|_{L^2(\Omega)} = 0$ cioè $\xi_M = 0$ per ogni $M \in \Omega_h$. Il sistema omogeneo associato quindi ammette l'unica soluzione nulla e pertanto il teorema consegue per noti risultati sui sistemi lineari.

Prima di procedere oltre facciamo un'osservazione che si ricollega a quanto si è detto nell'introduzione e che, come si vedrà, sarà di utilità per il teorema di convergenza.

OSSERVAZIONE 4.1.

In luogo della forma $a_h(u_h, v_h)$ dianzi introdotta, consideriamo la seguente:

$$(4.10) \qquad a_h^*(u_h, v_h) = \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^m \eta \nabla_i \nabla_j u_h \nabla_i \nabla_j v_h + \sum_{i,j=1}^m \mu \nabla_i \nabla_i u_h \nabla_j \nabla_j v_h \Big) dx + k \int_\Omega u_h v_h dx$$

con η e μ costanti fissate, $\eta > 0$, $\mu \geqslant 0$, $\eta + \mu = 1$.

La $a_h^*(u_h, u_h)$ è «la forma alle differenze finite» associata alla forma:

$$a^*(u, v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^m \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x_i dx_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^m \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} \right) dx + k \int_\Omega uv dx ,$$

continua e bilineare su qualsiasi sottospazio chiuso di $H^2(\Omega)$, munito della struttura hilbertiana indotta da quest'ultimo.

Ora nell'introduzione si è già avvertito circa l'esistenza in teoria variazionale di due schemi risolutivi a secondo che per $\Delta^2 u$ si assumono come operatori elementari u, Δu oppure u e le derivate prime e seconde. Ebbene si ha (cfr. Lions [2] pag. 75; Magenes-Stampacchia [1] pag. 272) che la $a^*(u, v)$ rientra nello schema risolutivo corrispondente al secondo modo di pensare $\Delta^2 u$, cioè alla sua decomposizione seguente:

$$\Delta^2 u = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \eta \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u + \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u .$$

Ma ancora nell'introduzione si è detto che per il problema di Dirichlet i due schemi sono equivalenti, cioè la funzione $u \in H^2(\Omega)$ soluzione dell'equazione:

$$a(u, v) = \int_\Omega fv dx \qquad \forall v \in H_0^2(\Omega) .$$

coincide con la soluzione della:

$$a^*(u, v) = \int_\Omega f v dx \qquad \forall v \in H_0^2(\Omega) .$$

Ci si può chiedere allora se un risultato analogo vale anche per il problema di Dirichlet approssimato, se cioè la soluzione del problema 4.1 coincide con la soluzione dell'analogo problema ottenuto sostituendo alla (4.8) la:

$$\text{(4.8)*} \qquad a_h^*(u_h, v_h) = \int_\Omega f v_h dx \qquad \forall v_h \in V_h .$$

Ebbene si è verificato che la risposta a tale questione dipende dalla scelta di Ω_h e che nelle condizioni in cui ci siamo posti essa è senz'altro affermativa. Nella verifica, che qui per brevità e perchè di carattere elementare si tralascia, si fa vedere che i coefficienti del sistema (4.9) coincidono coi coefficienti dell'analogo sistema:

$$\text{(4.9)*} \qquad \sum_{P \in \Omega_h} \xi_P a_h(w_P(x), w_M(x)) = \int_\Omega f w_M(x) dx \qquad \forall\, M \in \Omega_h .$$

Possiamo dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA 4.2. - *Quando* $|h| \to 0$, $u_h \to u$

$$\nabla_i u_h \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, ..., m)$$

$$\nabla_i \nabla_j u_h \to \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (i, j = 1, 2, ..., m)$$

in $L^2(\Omega)$ *fortemente, u essendo la soluzione del problema continuo.*

DIMOSTRAZIONE.

Dalla (4.8) posto $v_h = u_h$ e dalla (4.7) si ottiene

$$\text{(4.12)} \qquad \alpha \| u_h \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant a_h(u_h, u_h) \leqslant \left(\int_\Omega f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega u_h^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

da cui, posto $\left(\int\limits_{\Omega} f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = c_1$:

$$\alpha \| u_h \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c_1 \| u_h \|_{L^2(\Omega)}$$

e quindi:

$$\| u_h \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c \tag{4.13}$$

e, poichè:

$$\| \triangle_h u_h \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant a_h(u_h, u_h),$$

si ha pure:

$$\| \triangle_h u_h \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c\,. \tag{4.14}$$

Tenuto conto della (4.4) si ha poi:

$$\sum_{i=1}^{m} \| \nabla_i u_h \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c\,. \tag{4.15}$$

Tenuto presente infine che in conseguenza dell'osservazione 4.1 il procedimento precedente si può ripetere partendo dalla (4.8)* anzichè dalla (4.8), si ha pure:

$$\| \nabla_i \nabla_j u_h \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c \qquad i, j = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.16}$$

In conclusione pertanto le u_h, $\nabla_i u_h$, $\nabla_i \nabla_j u_h$ al variare di h si mantengono in insiemi limitati di $L^2(\Omega)$. Per la compattezza debole degli insiemi limitati in uno spazio di Hilbert, da ogni successione $\{h_{(n)}\}$, tale che $|h_{(n)}| \to 0$ per $n \to \infty$, si può allora estrarre una sottosuccessione $\{h'_{(n)}\}$, tale che:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} u_{h'_{(n)}} = u^* \text{ debolmente in } L^2(\Omega);\\
&\lim_{n\to\infty} \nabla_i u_{h'_{(n)}} = \alpha_i \text{ debolmente in } L^2(\Omega) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)\,;\\
&\lim_{n\to\infty} \nabla_i \nabla_j u_{h'_{(n)}} = \omega_{ij} \text{ debolmente in } L^2(\Omega) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m)\,.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Dimostriamo che $\alpha_i = \dfrac{\partial u^*}{\partial x_i}$ nel senso delle distribuzioni su Ω.

Sia φ una qualsiasi funzione di $\mathfrak{D}(\Omega)$ e consideriamo l'integrale:

$\int_\Omega \nabla_i u_h \varphi dx$ che è uguale a:

$$\frac{1}{h_i}\int_\Omega u_h\left(x+\frac{h_i}{2}\right)\varphi(x)dx - \frac{1}{h_i}\int_\Omega u_h\left(x-\frac{h_i}{2}\right)\varphi(x)dx .$$

Operando allora per sostituzione su questi due ultimi integrali e ricordando che φ è a supporto compatto in Ω, si ottiene per $|h|$ sufficientemente piccolo:

$$\text{(4.18)}\quad \int_\Omega \nabla_i u_h \varphi dx = \frac{1}{h_i}\int_\Omega u_h(x)\varphi\left(x-\frac{h_i}{2}\right)dx - \\ - \frac{1}{h_i}\int_\Omega u_h(x)\varphi\left(x+\frac{h_i}{2}\right)dx = -\int_\Omega u_h \nabla_i \varphi dx .$$

Ora:

$$\int_\Omega u_h \nabla_i \varphi dx = \int_\Omega u_h\left(\nabla_i\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)dx + \int_\Omega u_h \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx$$

e poichè $\nabla_i \varphi \to \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ uniformemente in $\bar{\Omega}$, si ha:

$$\left|\int_\Omega u_h\left(\nabla_i\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)dx\right| \leqslant c\left\|\nabla_i\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)} \to 0 .$$

Ponendo allora $h = h'_{(n)}$, per $n\to\infty$, si avrà:

$$\int_\Omega u_{h'_{(n)}} \nabla_i \varphi dx \to \int_\Omega u^* \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx .$$

Dalla (4.18) si ottiene pertanto:

$$\int_\Omega \alpha_i \varphi dx = -\int_\Omega u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx$$

e quindi, essendo la φ qualsiasi in $\mathcal{D}(\Omega)$, si è dimostrato l'asserto.

In modo analogo si può dimostrare che $\omega_{ij} = \dfrac{\partial^2 u^*}{\partial x_i \partial x_j}$.

A questo punto della dimostrazione del teorema si è accertato quindi che la u^* è una funzione di $H^2(\Omega)$. Si vuol ora dimostrare che $u^* \in H_0^2(\Omega)$. Nel caso di un insieme Ω sufficientemente regolare, ad es. di classe C^2, ciò è pressochè immediato. Basta infatti far vedere, cosa abbastanza semplice, che il prolungamento a zero fuori di Ω di u^* appartiene a $H^2(R^m)$. Allora, essendo tale funzione nulla fuori di Ω, per la regolarità dell'insieme essa ha traccia nulla su Γ e pertanto la sua restrizione a Ω e cioè la u^* appartiene a $H_0^2(\Omega)$.

Se invece le ipotesi su Ω si vogliono mantenere il meno restrittive possibile e quindi, come qui si è fatto, supporre Ω soltanto aperto e limitato, serve bene al nostro scopo un procedimento escogitato e più volte utilizzato nei suoi lavori da O.A. Ladizenskaja (cfr. ad es. [1], [2]) e che sfrutta un noto teorema degli spazi di Hilbert.

Per comodità del lettore richiamo qui brevemente il procedimento applicandolo al nostro caso. Considerata la funzione u_h, si costruisce una funzione u_h', lineare in tutte le variabili $x_1, \ldots, x_m$ e coincidente con u_h nei punti del reticolo. Per ogni punto x dell'insieme definito da: $P \leqslant x_i < P + h_i$, $i = 1, 2, \ldots. m$, $P \in R_h$, essa è definita da:

$$u_h'(x) = \nabla_1 \nabla_2 \cdots \nabla_m u_h(P) \prod_{s=1}^{m} (x_s - p_s h_s) + \\ + \sum_{r=1}^{m} \nabla_1 \nabla_2 \cdots \nabla_{r-1} \nabla_{r+1} \cdots \nabla_m u_h(P) \cdot \\ \cdot \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^{m} (x_s - p_s h_s) + \ldots + u_h(P) . \tag{4.19}$$

La funzione u_h' è continua in Ω e le sue derivate prime sono ivi ovviamente di quadrato sommabile e quindi $u_h' \in H^1(\Omega)$; inoltre esiste una costante $\gamma > 0$ tale che:

$$\| u_h' \|_{H^1(\Omega)}^2 \leqslant \gamma \left(\| u_h \|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{m} \| \nabla_i u_h \|_{L^2(\Omega)}^2 \right) . \tag{4.20}$$

Ricordando allora le (4.13) e (4.15) si avrà:

$$\| u_h' \|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant \beta \qquad\qquad \beta \text{ costante} > 0 \, .$$

Da ogni successione $\{h_{(n)}\}$, tale che $|h_{(n)}| \to 0$ per $n \to \infty$, si può estrarre pertanto una sottosuccessione $\{h'_{(n)}\}$ tale che $u'_{h_{(n)}}$ convergono debolmente in $H^1(\Omega)$ ad una funzione, che per la limitatezza delle u_h in $L^2(\Omega)$ si dimostra (cfr. O.A. Ladizenskaja [1]) essere la stessa a cui convergono le u_h e cioè nel nostro caso alla u^*.

Osserviamo ora che le u_h sono nulle in ogni punto $M \in R_h$ che non sia tale che M e $M \pm h_i$ $(i = 1, 2, ..., m)$ appartengono a Ω e pertanto le $u'_{h_{(n)}}$ risultano nulle in prossimità di Γ e sono quindi $\in \mathring{H}^1_0(\Omega)$.

Ma allora, applicando il teorema a cui abbiamo accennato, il quale afferma che, se y è il limite debole di una successione $\{y_n\}$ in uno spazio di Hilbert, esso appartiene alla varietà lineare chiusa generata dagli y_n, si ricava che la u^* necessariamente è una funzione di $\mathring{H}^1_0(\Omega)$.

È facile poi verificare, tenendo presenti le (4.15) (4.16), la definizione di Ω_h e di conseguenza il comportamento su Ω delle $\nabla_i u_h$, che tutto ciò che si è detto per le funzioni u_h si può ripetere, per ogni i fissato, per le funzioni $\nabla_i u_h$. Ne risulta: $\dfrac{\partial u^*}{\partial x_i} \in \mathring{H}^1_0(\Omega)$ $(i = 1, 2, ..., m)$; ciò unito al risultato precedente dimostra che $u^* \in \mathring{H}^2_0(\Omega)$.

Dimostriamo ora che u^* verifica l'equazione:

$$k \int_\Omega u^* v dx + \int_\Omega \Delta u^* \Delta v dx = \int_\Omega f v dx \qquad \forall v \in \mathring{H}^2_0(\Omega) \, . \tag{4.21}$$

Sia φ una qualunque funzione di $\mathfrak{D}(\Omega)$ e costruiamo la funzione: $\varphi_h(x) = \sum_{M \in \Omega_h} \varphi(M) w_M(x)$. Poichè la φ_h appartiene a V_h, si ha:

$$k \int_\Omega u_h \varphi_h dx + \int_\Omega \Delta_h u_h \Delta_h \varphi_h dx = \int_\Omega f \varphi_h dx \, . \tag{4.22}$$

Scriviamo le seguenti identità:

$$\int_{\Omega} \Delta_h u_h \Delta_h \varphi_h dx = \int_{\Omega} \Delta_h u_h (\Delta_h \varphi_h - \Delta\varphi) dx + \int_{\Omega} \Delta_h u_h \Delta\varphi dx \; ; \tag{4.23}$$

$$\int_{\Omega} u_h \varphi_h dx = \int_{\Omega} u_h(\varphi_h - \varphi) dx + \int_{\Omega} u_h \varphi dx \; ; \tag{4.24}$$

$$\int_{\Omega} f\varphi_h dx = \int_{\Omega} f(\varphi_h - \varphi) dx + \int_{\Omega} f\varphi dx \, . \tag{4.25}$$

Ora, per la definizione di $\varphi_h(x)$ e per una identità messa in evidenza in N. 1, si ha:

$$\Delta_h \varphi_h(x) = \sum_{M \in \Omega_h} \varphi(M) \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{h_i^2} (w_{M-h_i}(x) + w_{M+h_i}(x) - 2w_M(x)) \, . \tag{4.26}$$

Tenuto conto che la $\varphi(x)$ è a supporto compatto in Ω, è ovvio che, per $|h|$ sufficientemente piccolo, i termini del tipo: $\frac{1}{h_i^2} \varphi(N \pm h_i) \cdot w_N(x)$ con $N \in R_h \cap \Omega$ ma $\notin \Omega_h$ sono identicamente nulli e quindi una loro eventuale aggiunta al secondo membro di (4.26) non modifica nulla; aggiungendo allora un opportuno numero di tali termini e ordinando in modo diverso i termini della sommatoria, questo può scriversi così:

$$\Delta_h \varphi_h(x) = \sum_{M \in \Omega_h^*} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{h_i^2} (\varphi(M + h_i) + \varphi(M - h_i) - 2\varphi(M)) w_M(x) \, , \tag{4.27}$$

dove Ω_h^* è l'insieme dei punti $M \in \Omega_h$ e dei punti $M \pm h_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Tenuto presente allora che $\Delta_h\varphi \to \Delta\varphi$ uniformemente in $\overline{\Omega}$ e che $\Delta\varphi$ è uniformemente continua in $\overline{\Omega}$, dalla (4.27) si deduce che $\Delta_h\varphi_h(x)$ converge a $\Delta\varphi$ fortemente in $L^2(\Omega)$.

Quindi:

$$\left|\int_\Omega \Delta_h u_h(\Delta_h\varphi_h - \Delta\varphi)dx\right| \leqslant c\left(\int_\Omega (\Delta_h\varphi_h - \Delta\varphi)dx\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \ ;$$

e in definitiva:

$$\int_\Omega \Delta_h u_{h'_{(n)}} \Delta_h \varphi_{h'_{(n)}} dx \to \int_\Omega \Delta u^* \Delta\varphi dx \ .$$

In modo analogo si avrà:

$$\int_\Omega u_{h'_{(n)}}\varphi_{h'_{(n)}} dx \to \int_\Omega u^*\varphi dx \ ;$$

$$\int_\Omega f\varphi_{h'_{(n)}} dx \to \int_\Omega f\varphi dx \ .$$

Ponendo $h = h'_{(n)}$ e passando al limite per $n \to \infty$ in (4.22) si ottiene:

$$\int_\Omega \Delta u^* \Delta\varphi dx + k\int_\Omega u^*\varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx$$

e poichè ciò è possibile per ogni $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ e $\mathfrak{D}(\Omega)$ è denso in $H_0^2(\Omega)$ si è dimostrata la (4.21) e pertanto $u^* = u$.

Per la unicità poi della soluzione del problema continuo e dal fatto che da ogni successione $\{h_{(n)}\}$ con $|\,h_{(n)}\,| \to 0$, se ne può estrarre una sottosuccessione $\{h'_{(n)}\}$ tale che $u_{h'_n}$ converge debolmente a u, si deduce che o gni successione u_h converge debolmente a u per $|\,h\,| \to 0$.

Per completare la dimostrazione rimane da far vedere che le funzioni u_h, $\nabla_i u_h$, $\nabla_i\nabla_j u_h$ convergono fortemente in $L^2(\Omega)$.

Per le u_h e le $\nabla_i \nabla_j u_h$ si tiene conto di un procedimento di carattere generale tratto da J. Cèa [1].

Si scrive la seguente identità (cfr. osserv. 4.1):

$$(4.28) \qquad \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{m} \eta \left(\nabla_i \nabla_j u_h - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \mu(\Delta_h u_h - \Delta u)^2 \right] dx +$$

$$+ k \int_\Omega (u_h - u)^2 dx = a_h^*(u_h, u_h) - 2 \left[\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{m} \eta \nabla_i \nabla_j u_h \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \mu \Delta_h u_h \Delta u \right) dx + k \int_\Omega u_h u dx \right] + a^*(u, u) .$$

Ora, per la convergenza debole sopra dimostrata, risulta:

$$\lim_{|h| \to 0} \left[\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{m} \eta \nabla_i \nabla_j u_h \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \Delta_h u_h \Delta u \right) dx + \right.$$

$$\left. + k \int_\Omega u_h u dx \right] = a^*(u, u) .$$

Si tiene conto poi che:

$$a_h^*(u_h, u_h) = \int_\Omega f u_h dx ;$$

$$a^*(u, u) = \int_\Omega f u dx ;$$

$$\lim_{|h| \to 0} \int_\Omega f u_h dx = \int_\Omega f u dx ;$$

e quindi:

$$\lim_{|h| \to 0} a_h^*(u_h, u_h) = a^*(u, u) .$$

Passando al limite in (4.28) si ottiene:

$$\lim_{|h| \to 0} \left\| \nabla_i \nabla_j u_h - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)} = 0 ;$$

$$\lim_{|h| \to 0} \| u_h - u \|^2_{L^2(\Omega)} = 0 \qquad \text{c.v.d.}$$

Per dimostrare la convergenza forte di $\nabla_i u_h$ $(i = 1, 2, ..., m)$ si può procedere per es. a questo modo.

Per il Lemma 3.1 si ha:

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{\Omega} (\nabla_i u_h)^2 dx = - \int_{\Omega} u_h \Delta_h u_h dx . \tag{4.29}$$

Scriviamo l'ultimo integrale a questo modo:

$$\int_{\Omega} u_h \Delta_h u_h dx = \int_{\Omega} u_h \Delta u dx + \int_{\Omega} u_h (\Delta_h u_h - \Delta u) dx$$

e osserviamo che poichè:

$$\left| \int_{\Omega} u_h (\Delta_h u_h - \Delta u) dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} (u_h)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} (\Delta_h u_h - \Delta u)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

tenuto conto della (4.13) e del fatto che $\Delta_h u_h \to \Delta u$ si ha senz'altro:

$$\lim_{|h| \to 0} \int_{\Omega} u_h \Delta_h u_h dx = \int_{\Omega} u \Delta u dx .$$

Ora poichè $u \in H_0^1(\Omega)$ si ha:

$$\int_{\Omega} u \Delta u dx = - \sum_{i=1}^{m} \int_{\Omega} (D_i u)^2 dx .$$

Passando pertanto al limite in (4.29) si ha:

$$\lim_{|h| \to 0} \sum_{i=1}^{m} \int_{\Omega} (\nabla_i u_h)^2 dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{\Omega} (D_i u)^2 dx \qquad \text{c.v.d.}$$

5. Problema:

2°) $\quad \Delta^2 u + ku = f$ in Ω, $k > 0$; $\Delta u = \dfrac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0$ su Γ.

L'insieme Ω è supposto di classe C^2.

Si introducono le seguenti definizioni:

$$\Omega_h = \{M \mid M \in R_h, \delta_h(M) \cap \Omega \neq \varnothing\} \; ; \tag{5.1}$$

$$V_h = \{v_h \mid v_h = \sum_{M \in \Omega_h} \xi_M w_M(x)\} \; ; \tag{5.2}$$

$$a_h(u_h, v_h) = k \int_\Omega u_h v_h dx + \int_\Omega \Delta_h u_h \Delta_h v_h dx \qquad k > 0 \; .$$

PROBLEMA 5.1. - *Per $f \in L^2(\Omega)$, determinare u_h in V_h tale che:*

$$a_h(u_h, v_h) = \int_\Omega f v_h dx \qquad \forall v_h \in V_h \; . \tag{5.3}$$

TEOREMA 5.1. - *Il problema 5.1 ammette una ed una sola soluzione.*

DIMOSTRAZIONE.

Posto in (5.3) $f = 0$ e $v_h = u_h$ si ricava:

$$k \int_\Omega u_h^2 dx + \int_\Omega (\Delta_h u_h)^2 dx = 0 \; ;$$

cioè, poichè $k > 0$, : $\int_\Omega u_h^2 dx = 0$, $\int_\Omega (\Delta_h u_h)^2 dx = 0$ e quindi $u_h = 0$, $\Delta_h u_h = 0$ in Ω. Come primo risultato si ricava allora che: $\xi_M = 0$ per ogni M tale che $\sigma_h(M) \cap \Omega \neq \varnothing$; tenendo poi conto della definizione di $\Delta_h u_h$ si ricava, per il modo con il quale si è definito Ω_h, $\xi_M = 0$ anche per ogni altro $M \in \Omega_h$.

Il sistema omogeneo associato al sistema derivante da (5.3) ammette perciò l'unica soluzione nulla e quindi il sistema completo ammette una ed una sola soluzione.

Indicate ora con $(u_h)_\Omega$, $(\Delta_h u_h)_\Omega$ le restrizioni a Ω rispettivamente della u_h e della $\Delta_h u_h$, si ha:

TEOREMA 5.2 - *Quando* $|h| \to 0$, $(u_h)_\Omega \to u$, $(\Delta_h u_h)_\Omega \to \Delta u$ *in* $L^2(\Omega)$ *fortemente, u essendo la soluzione del problema continuo.*

DIMOSTRAZIONE.

Procedendo come nella dimostrazione del teor. 4.2, dalla (5.3) si ottengono le limitazioni:

$$
(5.4)\qquad \begin{aligned} &\| (u_h)_\Omega \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c\ ; \\ &\| (\Delta_h u_h)_\Omega \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c\ . \end{aligned}
$$

Da ogni successione $\{h_{(n)}\}$, tale che $|h_{(n)}| \to 0$ per $n \to \infty$, si può quindi estrarre una sottosuccessione $\{h'_{(n)}\}$ tale che: $(u_{h'_{(n)}})_\Omega \to u^*$; $(\Delta_h u_{h'_{(n)}})_\Omega \to w^*$, debolmente in $L^2(\Omega)$ per $n \to \infty$.

Con un procedimento già indicato in teor. 4.2 si può facilmente dimostrare che $w^* = \Delta u^*$ nel senso delle distribuzioni su Ω; basta in questo caso tener conto che, se $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, per $|h|$ sufficientemente piccolo si ha:

$$
\int_\Omega (\Delta_h u_h)_\Omega \varphi dx = \int_\Omega \Delta_h (u_h)_\Omega \varphi dx
$$

e quindi poi sull'integrale al secondo membro si procede come nel luogo citato.

A questo punto si è dimostrato che $u^* \in D^0_\Delta(\Omega)$.

Sia ora φ una qualunque funzione $\in C^2(\overline{\Omega})$. Per le ipotesi fatte su Ω è possibile prolungare la φ in tutto R^m in modo che il prolungamento Φ sia una funzione di $C^2(R^m)$ a supporto compatto. Costruita quindi la funzione: $\Phi_h = \sum_{M \in R_h} w_M(x)\Phi(M)$, chiamiamo $(\Phi_h)_\Omega$ la restrizione di Φ_h a Ω e con $(\Delta_h \Phi_h)_\Omega$ la restrizione di $\Delta_h \Phi_h$. Ovviamente la $(\Phi_h)_\Omega$ può anche pensarsi come restrizione a Ω della funzione $\tilde{\Phi}_h = \sum_{M \in \Omega_h} \Phi(M) w_M(x)$ e così pure $(\Delta_h \Phi_h)_\Omega$ coincide, per il modo con il quale si è scelto Ω_h, con la restrizione di $\Delta_h \tilde{\Phi}_h$.

Poichè $\dot{\Phi}_h$ appartiene ovviamente a V_h, si ha:

$$k\int_\Omega u_h\widetilde{\Phi}_h dx + \int_\Omega \triangle_h u_h \triangle_h \widetilde{\Phi}_h dx = \int_\Omega f\widetilde{\Phi}_h dx$$

o anche, per quanto si è precedentemente osservato:

$$k\int_\Omega u_h(\Phi_h)_\Omega dx + \int_\Omega \triangle_h u_h(\triangle_h \Phi_h)_\Omega dx = \int_\Omega f(\Phi_h)_\Omega dx. \tag{5.5}$$

Teniamo allora presente la seguente identità:

$$\int_\Omega \triangle_h u_h(\triangle_h\Phi_h)_\Omega dx = \int_\Omega \triangle_h u_h((\triangle_h\Phi_h)_\Omega - \triangle\varphi)dx + \int_\Omega \triangle_h u_h \triangle\varphi dx\,. \tag{5.6}$$

Ora per le (5.4) si ha:

$$\left|\int_\Omega \triangle_h u_h((\triangle_h\Phi_h)_\Omega - \triangle\varphi(x))dx\right| \leqslant c\left(\int_\Omega ((\triangle_h\Phi_h)_\Omega - \triangle\varphi(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\int_{R^m} (\triangle_h\Phi_h(x) - \triangle\Phi(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}};$$

e d'altra parte:

$$\lim_{|h|\to 0}\int_{R^m} (\triangle_h\Phi_h(x) - \triangle\Phi(x))^2 dx = 0.$$

Infatti:

$$\triangle_h\Phi_h = \sum_{M\in R_h}\Phi(M)\sum_{i=1}^m \frac{1}{h_i^2}(w_{M-h_i}(x) + w_{M+h_i}(x) - 2w_M(x)) =$$

$$= \sum_{M\in R_h}\sum_{i=1}^m \frac{1}{h_i^2}(\Phi(M+h_i) + \Phi(M-h_i) - 2\Phi(M))w_M(x)$$

e quindi: $\Delta_h \Phi_h(x) \to \Delta\Phi(x)$, fortemente in $L^2(R^m)$.

Dalla (5.6) allora ponendo $h = h'_{(n)}$ si ha:

$$\int_\Omega \Delta_h u_{h'_{(n)}} (\Delta_h \Phi_{h'_{(n)}})_\Omega dx \to \int_\Omega \Delta u^* \Delta\varphi dx .$$

In modo analogo si verifica che:

$$\int_\Omega u_{h'_{(n)}} (\Phi_{h'_{(n)}})_\Omega dx \to \int_\Omega u^* \varphi dx ;$$

$$\int_\Omega f (\Phi_{h'_{(n)}})_\Omega dx \to \int_\Omega f\varphi dx .$$

Passando allora al limite in (5.5), dopo aver posto $h = h'_{(n)}$, si ottiene:

$$\int_\Omega \Delta u^* \Delta\varphi dx + k \int_\Omega u^* \varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx \tag{5.7}$$

ed, essendo $\mathcal{C}^2(\Omega)$ denso in $D^0_\Delta(\Omega)$, si conclude che u^* coincide con la soluzione del problema continuo. È ovvio poi che anche qui, per l'unicità della soluzione, ogni successione u_h converge a u. La convergenza forte in $L^2(\Omega)$ di $(u_h)_\Omega$ e di $(\Delta_h u_h)_\Omega$ infine si dimostra col procedimento indicato alla fine della dimostrazione del teor. 4.2.

Osservazione 5.1.

Il problema considerato in questo numero, come pure il problema misto oggetto del successivo N. 7, sono già stati trattati, con un metodo, pur esso di differenze finite, ma diverso da quello qui utilizzato, da J.L. Lions in [3]. Ivi tuttavia è stata ottenuta per la successione di funzioni costanti a tratti approssimanti, unicamente una convergenza debole in $L^2(\Omega)$.

6. Problema:

$$3^o)\qquad \Delta^2 u + ku = f \text{ in } \Omega,\ k \geqslant 0;\ u = \Delta u = 0 \text{ su } \Gamma .$$

Introduciamo qui un'ipotesi più restrittiva su Ω, supponiamo cioè Ω di classe $\mathcal{C}^{3,\lambda}$ [12]). L'introduzione di tale ipotesi sarà nel seguito giustificata.

Si introducono le seguenti definizioni:

$$\Omega_h = \{M \mid M \in R_h,\ \varrho_h(M) \subset \Omega\}\ ; \tag{6.1}$$

$$V_h = \{v_h \mid v_h = \sum_{M\in\Omega_h} \xi_M\, w_M(x)\}\ ; \tag{6.2}$$

$$\Omega_{\sigma_h} = \bigcup_{M\in\Omega_h} \sigma_h(M)\ ; \tag{6.3}$$

$$a_h(u_h, v_h) = k\int_{\Omega_{\sigma_h}} u_h v_h dx + \int_{\Omega_{\sigma_h}} \Delta_h u_h \Delta_h v_h dx\ . \tag{6.4}$$

Osserviamo ora che lo spazio V_h qui introdotto coincide con lo spazio G_h del n. 3 e pertanto sono validi i due Lemmi dimostrati in quel numero. Osserviamo pure che il Lemma 3.1 può essere scritto a questo modo:

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{\Omega} \nabla_i u_h \nabla_i v_h dx = -\int_{\Omega_{\sigma_h}} u_h \Delta_h v_h dx\ . \tag{6.5}$$

Posto allora $u_h = v_h$, si ha:

$$\sum_{i=1}^{m} \| \nabla_i u_h \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c\, \| u_h \|_{L^2(\Omega_{\sigma_h})}\, \| \Delta_h u_h \|_{L^2(\Omega_{\sigma_h})}\ ; \tag{6.6}$$

e tenuto conto del Lemma 3.2 si ha:

$$\|u_h\|^2_{L^2(\Omega)} = \| u_h \|_{L^2(\Omega_{\sigma_h})} \leqslant c\, \| u_h \|_{L^2(\Omega_{\sigma_h})}\, \| \Delta_h u_h \|_{L^2(\Omega_{\sigma_h})}\ ;$$

---

[12]) Con ciò si intende dire riferendoci alla nota [5]) che la funzione ψ in (I) è di classe $\mathcal{C}^{3,\lambda}(D(x))$.

da cui:

$$\|u_h\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c \, \| \Delta_h u_h \|^2_{L^2(\Omega_{\sigma_h})} \, . \tag{6.7}$$

Sia per $k > 0$ che per $k = 0$ esiste allora una costante $\alpha > 0$ tale che:

$$a_h(u_h, u_h) \geq \alpha \, \| u_h \|^2_{L^2(\Omega)} \, . \tag{6.8}$$

Consideriamo pertanto il problema:

PROBLEMA 6.1. - *Determinare u_h in V_h tale che sia:*

$$a_h(u_h, v_h) = \int_\Omega f v_h dx \tag{6.9}$$

per ogni $v_h \in V_h$.

TEOREMA 6.1 - *Il problema 6.1 ammette una ed una sola soluzione.*

Il teorema è conseguenza immediata, come si può vedere procedendo come in teor. 4.1, della validità della (6.8).

TEOREMA 6.2 - *Quando $|h| \to 0$, $u_h \to u$*

$$\nabla_i u_h \to D_i u \qquad (i = 1, 2, ..., m)$$

fortemente in $L^2(\Omega)$ e inoltre $\lim\limits_{|h| \to 0} \int_{\Omega_{\sigma_h}} (\Delta_h u_h - \Delta u)^2 dx = 0$, u essendo la soluzione del problema continuo.

DIMOSTRAZIONE.

Procedendo come nella dimostrazione del teor. 4.2 si ottengono le seguenti limitazioni:

$$\begin{gathered} \| u_h \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c \, ; \\ \| \Delta_h u_h \|^2_{L^2(\Omega_{\sigma_h})} \leqslant c ; \\ \sum_{i=1}^m \| \nabla_i u_h \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c \, . \end{gathered} \tag{6.10}$$

Da ogni successione $\{h_{(n)}\}$, tale che $|h_{(n)}| \to 0$ per $n \to \infty$, si può allora estrarre una sottosuccessione $\{h'_{(n)}\}$ tale che:

$$
(6.11) \qquad \begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} u_{h'_{(n)}} = u^* \text{ debolmente in } L^2(\Omega); \\ &\lim_{n\to\infty} \nabla_i u_{h'_{(n)}} = \alpha_i \text{ debolmente in } L^2(\Omega) \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned}
$$

Inoltre, poichè il prolungamento a zero fuori di Ω_{σ_h} della funzione $\Delta_h u_h$ è ancora una funzione di $L^2(\Omega)$ che verifica sempre la (6.10), si ha per ogni $\psi \in L^2(\Omega)$:

$$
(6.12) \qquad \lim_{|h'_n|\to 0} \int_{\Omega\sigma_h} \Delta_h u_{h'_n} \psi dx = \int_{\Omega} \omega\psi dx \qquad \text{con } \omega \in L^2(\Omega) .
$$

Col procedimento indicato in teor. 4.2 si dimostra che:

$$
(6.13) \qquad \omega = \Delta u, \ \alpha_i = \frac{\partial u^*}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)
$$

nel senso delle distribuzioni su Ω.

Mediante il procedimento della Ladizenskaja, già richiamato in teor. 4.2, si dimostra poi che $u^* \in H_0^1(\Omega)$ e pertanto si ha:

$$
u^* \in V = \{u \mid u \in D_\Delta^0 (\Omega)\gamma_o u = 0\} .
$$

Per concludere la dimostrazione del teorema rimane allora da mostrare che u^* verifica l'equazione:

$$
(6.14) \qquad k \int_\Omega u^* v dx + \int_\Omega \Delta u^* \Delta v dx = \int_\Omega f v dx \qquad \forall v \in V.
$$

Per fare ciò consideriamo una qualunque funzione φ dello spazio:

$$
\mathcal{V} = \{\varphi \mid \varphi \in C^{3,\lambda}(\overline{\Omega}), \gamma_o \varphi = 0\} .
$$

A partire dalla φ costruiamo poi un vettore $\Phi_h(M)$ definito su $\overline{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h (\Gamma_h = \{M \mid M \in R_h \cap \Omega, M \notin \Omega_h\}$, assumendo come $\Phi_h(M)$ la soluzione del seguente sistema lineare:

$$(6.15) \qquad \begin{cases} \Delta_h \Phi_h(M) = (\Delta\varphi)_M (= \Delta\varphi \text{ calcolata in } M) \text{ per } M \in \Omega_h \\ \Phi_h(M) = 0 \text{ per } M \in \Gamma_h . \end{cases}$$

Tale assunzione è giustificata dal fatto che l'esistenza e l'unicità della soluzione di (6.15) sono assicurate, in quanto (6.15) può pensarsi, come è noto, il sistema ottenuto risolvendo mediante il metodo delle differenze finite il problema di Dirichlet:

$$(6.16) \qquad \begin{cases} \Delta u = \Delta\varphi \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ su } \Gamma . \end{cases}$$

Da tale osservazione si ricava anche che, poichè la soluzione di (6.16) è ovviamente la φ che è supposta dotata di derivate terze continue in $\overline{\Omega}$ e quindi limitate, vale la seguente maggiorazione:

$$(6.17) \qquad | \Phi_h(M) - \varphi(M) | \leqslant c \, | h | ; \qquad \forall\, M \in \overline{\Omega}_h ;$$

con c dipendente dal massimo di $D^3\varphi$ in $\overline{\Omega}$ e indipendente da h.

Prolunghiamo ora Φ_h e $\Delta_h\Phi_h$ su tutto R^m ponendo:

$$\varphi_h(x) = \sum_{M \in \Omega_h} \Phi_h(M) w_M(x)$$

$$\widetilde{\Delta_h \Phi_h}(x) = \sum_{M \in \Omega_h} \Delta_h \Phi_h(M) w_M(x) .$$

osservando che si può facilmente verificare che su Ω_{σ_h} si ha:

$$\Delta_h \varphi_h(x) = \widetilde{\Delta_h \Phi_h}(x) .$$

Poichè allora ovviamente $\varphi_h(x) \in V_h$ si ha:

$$(6.18) \qquad k \int_{\Omega\sigma_h} u_h \varphi_h dx + \int_{\Omega\sigma_h} \Delta_h u_h \Delta_h \varphi_h dx = \int_{\Omega} f \varphi_h dx .$$

Con il solito ragionamento, per la (6.17) si ha subito che:

$$\int_{\Omega_{\sigma_h}} u_{h'_{(n)}} \varphi_{h'_{(n)}} dx \to \int_{\Omega} u^* \varphi dx$$

$$\int_{\Omega} f \varphi_{h'_{(n)}} dx \to \int_{\Omega} f \varphi dx .$$

Si ha poi:

$$\int_{\Omega_{\sigma_h}} \Delta_h u_{h'_{(n)}} \Delta_h \varphi_{h'_{(n)}} dx = \int_{\Omega_{\sigma_h}} \Delta_h u_{h'_{(n)}} \Delta \varphi dx + \int_{\Omega_{\sigma_h}} \Delta_h u_{h'_{(n)}} (\Delta_h \varphi_{h'_{(n)}} - \Delta \varphi) dx ;$$

ora

$$\int_{\Omega_{\sigma_h}} \Delta_h u_{h'_{(n)}} \Delta \varphi dx \to \int_{\Omega} \Delta u^* \Delta \varphi dx$$

mentre:

$$\left| \int_{\Omega_{\sigma_h}} \Delta_h u_{h'_{(n)}} (\Delta_h \varphi_{h'_{(n)}} - \Delta \varphi) dx \right| \leqslant \left(\int_{\Omega_{\sigma_h}} (\Delta_h u_{h'_{(n)}})^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_{\sigma_h}} (\Delta_h \varphi_{h'_{(n)}} - \Delta \varphi)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

e il secondo membro tende a zero perchè, come abbiamo già osservato, su $\Omega_{\sigma_h} \Delta_h \varphi_{h'_{(n)}}$ coincide con $\widetilde{\Delta_h \Phi_{h'_{(n)}}}$, la quale assume su ogni insieme $\sigma_h(M)$ con $M \in \Omega_h$ il valore $(\Delta\varphi)_M$ e allora basta tener conto che $\Delta\varphi$ è uniformemente continua su $\overline{\Omega}$.

In conclusione, ponendo in (6.18) $h = h'_{(n)}$ e passando al limite, si ottiene:

$$k \int_{\Omega} u^* \varphi dx + \int_{\Omega} \Delta u^* \Delta \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx ; \tag{6.19}$$

e quindi poichè la (6.19) è vera per ogni $\varphi \in \mathcal{V}$, supposto per ora

$\mathcal{V}$ denso in V, sarà pure verificata l'equazione (6.14) e perciò $u^* = u$.

Per quanto riguarda poi il tipo di convergenza per le u_h, $\nabla_i u_h$, $\Delta_h u_h$, basta ripetere ovviamente i ragionamenti già usati nei n. 4 e 5.

Dimostriamo allora che $\mathcal{V}$ è denso in V. La cosa sarebbe già nota, ma credo opportuno riportarne una dimostrazione perchè questa mi da la possibilità di chiarire la ragione per la quale Ω è stato supposto di classe $\mathcal{C}^{3,\lambda}$. A tale riguardo si tenga anche presente che le φ di $\mathcal{V}$ si sono già dovute supporre, per la validità di (6.17), almeno di classe $\mathcal{C}^3(\overline{\Omega})$. Sia pertanto $u \in V$. Allora $\Delta u \in L^2(\Omega)$ e, poichè $\mathcal{C}^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ è denso in $L^2(\Omega)$, esiste una successione di funzioni $\psi_n \in \mathcal{C}^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ tali che: $\lim_{n\to\infty} \| \psi_n - \Delta u \|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Per ogni n fissato si considera allora il problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta \varphi_n = \psi_n \text{ in } \Omega \\ \gamma_0 \varphi_n = 0 \,. \end{cases}$$

Esso ammette soluzione unica, appartenente, nelle ipotesi in cui ci si è posti per Ω e ψ_n, a $\mathcal{C}^{3,\lambda}(\overline{\Omega})$ e questo in base a risultati di regolarizzazione (cfr. ad es. Miranda [1]). Ora, poichè tali risultati sfruttano le maggiorazioni del tipo di Schauder- Caccioppoli (cfr. Miranda [1[pag. 111), si comprende il perchè dell'ipotesi imposta su Ω. Proseguendo la dimostrazione consideriamo la funzione $w = \varphi_n - u$; poichè $\gamma_0 w = 0$ si ha la seguente nota maggiorazione (cfr. Magenes-Stampacchia [1]):

$$\| w \|_{H^2(\Omega)} \leqslant c \, \| \Delta w \|_{L^2(\Omega)} \,;$$

e quindi:

$$\| \varphi_n - u \|_{H^2(\Omega)} \leqslant c \, \| \psi_n - \Delta u \|_{L^2(\Omega)} \,.$$

In definitiva quindi si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \| \varphi_n - u \|_{D^0_\Delta(\Omega)} = 0 \qquad \text{c.v.d.}$$

7. Problema misto:

$$\Delta^2 u + ku = f \text{ in } \Omega,\ k > 0; \qquad u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ su } \Gamma_1,$$

$$\Delta u = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0 \text{ su } \Gamma_2 .$$

L'insieme Ω è supposto di classe C^2.

Si introducono le seguenti definizioni:

$$\Omega_h = \{M \mid M \in R_h,\ \delta_h(M) \cap \Omega \neq \varnothing,\ \delta_h(M) \cap \Gamma_1 = \varnothing\} ; \tag{7.1}$$

$$V_h = \{v_h \mid v_h = \sum_{M \in \Omega_h} \xi_M w_M(x)\} ; \tag{7.2}$$

$$a_h(u_h, v_h) = k \int_\Omega u_h v_h dx + \int_\Omega \Delta_h u_h \Delta_h v_h dx . \tag{7.3}$$

PROBLEMA 7.1 - *Per $f \in L^2(\Omega)$, determinare u_h in V_h tale che:*

$$a_h(u_h, v_h) = \int_\Omega f v_h dx \qquad \forall\, v_h \in V_h . \tag{7.4}$$

TEOREMA 7. 1 - *Il problema* 7.1 *ammette una ed una sola soluzione.*

Per la dimostrazione si veda teor. 5.1.

Chiamate poi $(u_h)_\Omega$, $(\Delta_h u_h)_\Omega$ le restrizioni a Ω di u_h e di $\Delta_h u_h$, si ha:

TEOREMA 7.2 - *Quando* $|h| \to 0$, $(u_h)_\Omega \to u$, $(\Delta_h u_h)_\Omega \to \Delta u$ *in* $L^2(\Omega)$ *fortemente, u essendo la soluzione del problema continuo.*

DIMOSTRAZIONE.

Procedendo come in teor. 4.2 si ottiene

$$\begin{aligned} &\| (u_h)_\Omega \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c ; \\ &\| (\Delta_h u_h)_\Omega \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c . \end{aligned} \tag{7.5}$$

Da ogni successione $\{h_{(n)}\}$, tale che $|h_{(n)}| \to 0$ per $n \to \infty$, si può pertanto estrarre una sottosuccessione $\{h'_{(n)}\}$, tale che: $(u_{h'_{(n)}})_\Omega \to u^*$; $(\Delta_h u_{h'_{(n)}})_\Omega \to \omega$ debolmente in $L^2(\Omega)$ e al solito modo si vede che $\omega = \Delta u^*$, per cui $u^* \in D^0_\Delta(\Omega)$. Introduciamo ora in $C\bar{\Omega}$ un insieme Ω_1 di frontiera $\Gamma_1 \cup \sum$ con $\sum$ in $C\bar{\Omega}$ in modo che $\Omega \cup \Omega_1$ sia ancora di classe C^2. Indichiamo con $\tilde{u}^*$ il prolungamento di u^* in $\Omega \cup \Omega_1$, ottenuto ponendo $\tilde{u}^* = 0$ in Ω_1. Dimostriamo che $\tilde{u}^* \in D^0_\Delta(\Omega \cup \Omega_1)$. Per $|h|$ sufficientemente piccolo, indichiamo con $\tilde{u}_h$ il prolungamento della $(u_h)_\Omega$ in $\Omega \cup \Omega_1$, ottenuto ponendo $\tilde{u}_h = 0$ in Ω_1.

Tenendo conto della definizione di Ω_h, è facile vedere che, per $|h|$ sufficientemente piccolo, la restrizione $(\Delta_h \tilde{u}_h)_{\Omega \cup \Omega_1}$ di $\Delta_h u_h$ *a* $\Omega \cup \Omega_1$ è una funzione $= 0$ in Ω_1 e $= (\Delta_h u_h)_\Omega$ in Ω.

Dalle (7.5) si ha allora:

$$\| (\tilde{u}_h)_{\Omega\cup\Omega_1} \|^2_{L^2(\Omega\cup\Omega_1)} \leqslant c ;$$

$$\| (\Delta_h \tilde{u}_h)_{\Omega\cup\Omega_1} \|^2_{L^2(\Omega\cup\Omega_1)} \leqslant c .$$

Da ogni successione $\{h_{(n)}\}$, con $|h_{(n)}| \to 0$ per $n \to \infty$, si può pertanto estrarre una sottosuccessione $\{h'_{(n)}\}$, tale che $(\tilde{u}_{h'_{(n)}})_{\Omega\cup\Omega_1} \to w^*$, $(\Delta_h \tilde{u}_{h'_{(n)}})_{\Omega\cup\Omega_1} \to \tilde{\omega}^*$ debolmente in $L^2(\Omega \cup \Omega_1)$ e come si è più volte visto $\tilde{\omega}^* = \Delta w^*$. Quindi $w^* \in D^0_\Delta(\Omega \cup \Omega_1)$. Siccome d'altra parte è facile vedere che w^* coincide con $\tilde{u}^*$, si ricava che $u^* \in D^0_\Delta(\Omega \cup \Omega_1)$. Quindi, per noti risultati di regolarizzazione all'interno delle soluzioni delle equazioni ellittiche (cfr. Magenes-Stampacchia [1]), si ha che $\tilde{u}^*$ è localmente di quadrato sommabile insieme alle derivate prime e seconde e pertanto, tenuto conto anche del fatto che u^* è nulla in Ω_1, si ha:

$$\tilde{u}^* \Big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = 0 \qquad \text{e quindi } u^* \Big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u^*}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = 0 .$$

Per dimostrare infine che u^* coincide con u, soluzione del problema continuo, basta procedere in modo analogo a quanto si è fatto in teor. 5.2 Si assume cioè una qualsiasi funzione $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$, con $\varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ su Γ_1 e la si prolunga in $\Phi \in C^2(R^m)$

e a supporto compatto. Si costruisce poi la funzione $\Phi_h = \sum_{M \in \Omega_h} \Phi(M) w_M(x)$ e, siccome $\Phi_h \in V_h$, si ha:

$$k \int_\Omega u_h \Phi_h dx + \int_\Omega \Delta_h u_h \Delta_h \Phi_h dx = \int_\Omega f \Phi_h dx \,, \tag{7.6}$$

dalla quale posto $h = h'_{(n)}$ e passando al limite si ha:

$$k \int_\Omega u^* \varphi dx + \int_\Omega \Delta u^* \Delta \varphi dx = \int_\Omega f \varphi dx$$

e, poichè lo spazio delle $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ con $\varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ su Γ_1 è ovviamente denso in V, che è appunto l'aderenza di tale spazio in $D^0_\Delta(\Omega)$, si ha senz'altro $u^* = u$.

Per la dimostrazione infine della convergenza forte in $L^2(\Omega)$ di $(u_h)_\Omega$ e di $(\Delta_h u_h)_\Omega$ si ragiona in modo analogo a quanto si è fatto per i casi precedenti.

8. Proprietà delle matrici dei problemi approssimati.

Si è già osservato che l'approssimazione delle soluzioni secondo il metodo esposto si riduce, come in generale per tutti i metodi alle differenze finite, alla risoluzione di sistemi di equazioni lineari algebriche. Per la risoluzione di tali sistemi, come è noto, più che i metodi diretti sono di particolare utilità i metodi iterativi, sia perchè sono generalmente di più semplice programmazione, sia perchè permettono di risolvere anche con macchine calcolatrici con potenza di memoria non elevata, sistemi d'ordine sufficientemente alto. È pure noto che uno dei metodi iterativi più semplici dal punto di vista della programmazione è il metodo di Gauss-Seidel, detto anche delle successive sostituzioni [13]).

---

[13]) Per questo metodo e in generale per i metodi iterativi si veda ad es. R.S. Varga [1].

Se la matrice A del sistema è simmetrica, notoriamente, una condizione sufficiente perchè il metodo di Gauss-Seidel converga è che A sia definita positiva.

Ora la risoluzione numerica di molti problemi ellittici conduce appunto, come si può vedere in J. Céa [1], a sistemi le cui matrici godono di tale proprietà.

Seguendo il metodo di J. Céa mostriamo che ciò è vero anche per i problemi qui trattati.

Fissiamo l'attenzione ad es. sul sistema derivante dal problema approssimato di Dirichlet (cfr. N. 4 § 2); essendo tutto ciò che si dirà valido anche per gli altri problemi.

La matrice relativa a tale sistema è:

$$A_h = \| a_h(w_P(x), w_M(x) \| \qquad P, M \text{ variabili in } \Omega_h.$$

Essa è ovviamente simmetrica perchè: $a_h(w_P, w_M) = a_h(w_M, w_P)$.

D'altra parte, se u_h e v_h sono funzioni di V_h, esse sono del tipo: $u_h = \sum_{M\in\Omega_h} \xi_M w_M$; $v_h = \sum_{P\in\Omega_h} \eta_P w_P$ e quindi sono individuate dai due vettori $\{\xi_M\}$ e $\{\eta_P\}$ dello spazio vettoriale $C^{N(h)}$, dove con $N(h)$ si è indicato il numero dei punti di Ω_h. Con (u_h, v_h) indichiamo il prodotto scalare in $C^{N(h)}$ di u_h e di v_h, cioè poniamo: $(u_h, v_h) = \sum_{M\in\Omega_h} \xi_M \eta_M$.

Si ha allora evidentemente:

$$a_h(u_h, v_h) = (A_h u_h, v_h) .$$

Essendo poi $N(h)$ un numero finito le due norme: $\| u_h \|_{V_h} = \| u_h \|_{L^2(\Omega)} + \| \Delta_h u_h \|_{L^2(\Omega)}$ e $\| u_h \| = (\sum_{M\in\Omega_h} (\xi_M)^2)^{\frac{1}{2}}$ sono equivalenti.

Dalla disuguaglianza: $|a_h(u_h, u_h)| \geq \alpha \| u_h \|^2_{V_h}$, $\alpha > 0$, valida per ogni $u_h \in V_h$ si ricava allora:

$$|(A_h u_h, u_h)| \geq \beta \|u_h\|^2 \qquad \beta > 0 ,$$

La matrice è quindi ellittica ed, essendo pure simmetrica. si può allora dimostrare (cfr. J. Céa [1]) che necessariamente essa è definita positiva.

Appendice.

Per saggiare la bontà del metodo esposto, si è risolto numericamente il seguente problema:

$$\Delta^2 u = 1 \text{ in } \Omega; \; u = \Delta u = 0 \text{ su } \Gamma;$$

essendo Ω il cerchio di centro l'origine del sistema di riferimento e di raggio $= 1$. Esso ammette, come è subito verificato, la soluzione esatta:

$$u = \frac{1}{64}\left[(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) + 3\right].$$

Il problema considerato è, nell'esposizione precedente, di tipo 3° e la sua trattazione è stata fatta in N. 2 § 1 e N. 6 § 2.

Introdotta pertanto nel piano (x, y) una reticolazione, si deve prendere in considerazione l'insieme di punti: $\Omega_h = \{M \mid M \in R_h, \varrho_h(M) \subset \Omega\}$, costruire poi la matrice:

$$A_h = \left\| \int_{\Omega\sigma_h} \Delta_h w_M \, \Delta_h w_P \, dx \right\|$$

con M, P che variano in Ω_h e quindi infine risolvere il sistema:

$$A_h X = B_h$$

essendo B_h il vettore: $\{ \int_\Omega w_M dx \}$, di componenti quindi in questo caso tutte uguali a $h_1 . h_2$.

Per l'esecuzione effettiva di tali operazioni ho avuto a disposizione il Calcolatore Elea 6001 Olivetti con 20.000 posizioni di memoria, in dotazione al « Centro Calcoli Numerici » dell'Università di Pavia.

Il programma complessivo, che, pur essendo stato studiato in vista solo della risoluzione di questo particolare problema, può essere con qualche variazione facilmente generalizzato, consta di tre sottoprogrammi compilati separatamente e cioè: un sottoprogramma che costruisce l'insieme Ω_h ,un sottoprogramma che crea i coefficienti della matrice A_h e infine un sottoprogramma di risoluzione del sistema che prevede l'utilizzazione sia di metodi diretti che iterativi.

Può avere interesse aggiungere che il programma è stato tradotto nel linguaggio simbolico « Fortran ».

Per una esatta valutazione dei risultati ottenuti e qui riportati, va osservato che, anche se, con il Calcolatore suddetto, il programma non ha alcuna limitazione per quanto riguarda il numero di punti di Ω_h, cioè il passo h, per il fatto che alla non elevata potenza di memoria supplisce la possibilità di utilizzare le unità a nastro, nella pratica la utilizzazione di quest'ultime riesce disagevole quando il numero di punti di Ω_h è grande, in quanto aumenta in modo assai notevole il tempo di macchina.

Si comprende pertanto il motivo per cui qui si è considerato un numero di punti ancora relativamente basso. In ragione di ciò la precisione dei risultati ottenuti va valutata in quanto puramente di carattere indicativo.

Con un passo h (per semplicità ho preso $h_1 = h_2 = h$) uguale a $\frac{1}{8}$, l'insieme Ω_h si compone di 145 punti. Il sistema lineare ottenuto è stato risolto con un metodo iterativo e precisamente con il metodo di Gauss-Seidel.

Tenendo conto di evidenti simmetrie per la soluzione u, peraltro ritrovate anche per la soluzione approssimata u_h, riportiamo qui di seguito solamente i valori distinti delle due soluzioni calcolate nei punti di Ω_h.

Coordinate dei punti	Soluzione esatta	Soluzione approssimata
(0,0)	0,046874997	0,047053244
(1/8,0)	0,045902248	0,046491194
(1/4,0)	0,043029781	0,044324840
(3/8,0)	0,038394925	0,039752932
(1/2,0)	0,032226560	0,032419774
(5/8,0)	0,024845121	0,022701027
(3/4,0)	0,016662597	0,011565099
(1/8,1/8)	0,044937129	0,045875736
(1/8,1/4)	0,042087551	0,043429829
(1/8,3/8)	0,037490841	0,038486441
(1/8,1/2)	0,031375882	0,030857546
(1/8,5/8)	0,024063109	0,021171989
(1/8,3/4)	0,015964508	0,010579216
(1/4,1/4)	0,039306638	0,040221995
(1/4,3/8)	0,034824369	0,034531454
(1/4,1/2)	0,028869627	0,026539588
(1/4,5/8)	0,021762847	0,017273118
(1/4,3/4)	0,013916016	0,008139974
(3/8,3/8)	0,030532835	0,028072372
(3/8,1/2)	0,024845121	0,019801025
(3/8,5/8)	0,018081664	0,011275518
(3/8,3/4)	0,010654450	0,004291699
(1/2,1/2)	0,019531250	0,011783222
(1/2,5/8)	0,013248444	0,004513206

BIBLIOGRAFIA

CEA J.: [1] *Approximation variationelle des problèmes aux limites.* Ann. Inst. Fourier 14, 2 pp. 345-444 (1964).

CEA J.: [2] *Sur l'approximation des problèmes aux limites.* C.R. Acad. Sci. Paris. t. 254, pp. 1729-1731 e 2919-2921 (1962), et 255 pp. 442-444 (1962).

COLLATZ L.: [1] *The numerical treatment of differential equations.* Springer Berlin 1960.

FICHERA G.: [1] *Risultati concernenti la risoluzione delle equazioni funzionali lineari dovuti all'Istituto Nazionale per le applicazioni del*

Calcolo. Memoria dell'Accademia Nazionale dei Lincei (Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali) serie VIII vol. III, sezione I fasc. I, Roma, 1950.

FORSYTHE-WASOW: [1] *Finite difference methods for Partial Differential Equations*. Applied Mathematics Series. Ed. by I.S. Sokolnikoff.

KANTOROVICH L.V., KRYLOV I.: [1] *Approximate methods of Higher Analysis*. P. NoordHolf LDT - Groningen - The Netherlands (1958).

LADIZENSKAJA O.A.: [1] *Il problema misto per le equazioni iperboliche*. (in russo) Gosudarst.v Izdat. Tehn - Teor. Lit., Moscow (1953).

LADIZENSKAJA O.A.: [2] *Il metodo delle differenze finite nella teoria delle equazioni a derivate parziali* (in russo). Uspehi Mat. Nauk. 12, 123-148 (1957). Traduzione in inglese su: Amer. Math. Soc. Transl. (2) (20) (1962), pp. 77-104.

LIONS J.L.: [1] *Méthodes d'approximation numérique des problèmes aux limites de la physique mathématique*. tome I, II. Istitut B. Pascal, Paris (1962).

LIONS J.L.: [2] *Problèmes aux limites en théorie des distributions*. Acta Math. 94 pp. 13-153 (1955).

LIONS J.L.: [3] *Sur l'approximations des solutions de certains problèmes aux limites*. Rend. Sem. Mat. Padova (1962).

LIONS J.L., MAGENES E.: [1] *Problèmes aux limites non homogènes*. (II). Ann. Inst. Fourier 11 (1961) pp. 137-178.

LIONS J.L., MAGENES E.: [2] *Problemi ai limiti non omogenei* (III). Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa XV (1961), pp. 39-101.

MAGENES E., STAMPACCHIA G.: [1] *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa III 12 (1958), pp. 247-367.

MIRANDA C.: [1] *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*. Springer Berlin 1955.

PRODI G.: [1] *Tracce di funzioni con derivate di ordine* 1.... Rend. Sem. Mat. Padova vol. 28 (1958).

TIMOSHENKO S., GOODIER J. N.: [1] *Theory of Elasticity*. Mc Graw Hill Book Company, Inc. 1951.

VARGA R.S.: [1] *Matrix iterative analysis*. Prentice Hall (1963).