Adriano Barlotti

Alcuni risultati nello studio degli spazi affini generalizzati di Sperner

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 35, nº 1 (1965), p. 18-46

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_1_18_0>

ALCUNI RISULTATI NELLO STUDIO DEGLI SPAZI AFFINI GENERALIZZATI DI SPERNER

di Adriano Barlotti (*a Firenze*) *) **)

1\. - È ben noto che in uno spazio grafico o affine le due circostanze:

1) non vale (in generale) il teorema del Desargues;

2) la dimensione è maggiore di due;

si escludono a vicenda.

Recentemente E. Sperner [1]) ha considerato delle strutture geometriche, a cui ha dato il nome di « spazi affini generalizzati » (e che noi nel seguito chiameremo, più brevemente, S-spazi), per le quali invece, quando si interpreti opportunamente l'espressione « dimensione maggiore di due » [2]), possono essere verificate

---

*) Pervenuto in redazione il 28 marzo 1964.
Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « Ulisse Dini » dell'Università di Firenze.
**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

Parte dei risultati ottenuti in questo lavoro sono stati oggetto di una comunicazione effettuata nel corso del « Simposio sulle geometrie finite » tenutosi a Roma nei giorni 8-12 ottobre 1963.

1) Cfr. [8]; si può anche vedere il capitolo VIII del volume [5]. Allo studio di questioni connesse con detti spazi sono dedicati anche i lavori [1], [3], [6] e [9].

2) Nel caso finito questa frase esprime il fatto che in una delle strutture in questione si possono immergere uno o più piani aventi lo stesso « ordine » della struttura stessa.

nello stesso tempo la 1) e la 2). Le strutture in questione, fra le quali rientrano come casi molto particolari gli ordinari spazi affini a un numero qualunque di dimensioni, risultano definite per via assiomatica partendo da un sistema di postulati più debole di quello usato per introdurre gli spazi ordinari.

Il presente lavoro è dedicato allo studio di alcune questioni riguardanti tali strutture; illustriamo brevemente qui di seguito i principali risultati ottenuti.

Dapprima abbiamo introdotto alcuni caratteri numerici mediante i quali sia possibile effettuare una classificazione degli S-spazi.

È noto che si presentano già delle difficoltà quando si voglia definire un numero che giochi lo stesso ruolo che ha la dimensione negli ordinari spazi proiettivi. Una maniera per introdurre questa definizione per gli S-spazi di una vasta classe è stata indicata da Sperner (cfr. [9]). Noi, limitandoci al caso finito, e con l'aggiunta di una semplice condizione che è soddisfatta per tutti gli esempi di S-spazi finiti sinora noti, abbiamo indicato un'altra via che porta a introdurre una nozione di dimensione (n. 2). Abbiamo quindi definito i « caratteri di regolarità » di un S-spazio qualsiasi (n. 3).

L'esame di questi caratteri propone nel caso finito tutta una serie di interessanti questioni. Esaminando alcune di queste siamo giunti a dare, per ogni valore n (> 2) della dimensione, una semplice costruzione per via geometrica di un nuovo modello di S-spazio non desarguesiano, i cui piani sono tutti desarguesiani (n. 4), e a dimostrare che un S-spazio tridimensionale di ordine s da ciascun punto del quale escono più di $s^2 + s - 1$ piani è un ordinario spazio affine a tre dimensioni (n. 5).

Dopo aver richiamato nel n. 6 una costruzione di Sperner ([8], § 3) che porta a una vasta classe di S-spazi, ci siamo soffermati nei successivi nn. 7, 8 e 9 su alcune proprietà di tali S-spazi.

Infine abbiamo esposto due procedimenti mediante i quali si ottengono nuove classi di spazi affini generalizzati.

Il primo di questi (n. 10) consiste in una generalizzazione della costruzione esposta nel n. 6 e porta ad ottenere classi di

S-spazi che, nel caso finito, hanno la dimensione n in corrispondenza ad ogni valore intero (> 3) di n.

Il secondo procedimento (n. 11) si riduce a mostrare come certe semplici strutture geometriche si possano immergere in un S-spazio con un procedimento analogo a quello ben noto usato da M. Hall per provare che ogni struttura di incidenza può essere immersa in un piano proiettivo.

2. - Siano dati due insiemi disgiunti, $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{C}$, i cui elementi chiameremo rispettivamente *punti* e *rette*, e siano assegnate:

I. Una relazione di *incidenza* definita in $\mathfrak{P} \times \mathfrak{C}$. In seguito per esprimere che il punto P è incidente [3]) o no alla retta a impiegheremo talvolta i simboli $P \in a$ e $P \notin a$.

II. Una relazione di *parallelismo* definita in $\mathfrak{C}^2$. Per indicare che la retta a è o non è parallela alla b useremo talvolta rispettivamente i simboli $a \,||\, b$ e $a \nparallel b$.

Supponiamo poi che per le relazioni di incidenza e di parallelismo valgano i seguenti assiomi:

A1. Due punti distinti sono incidenti ad una ed una sola retta.

A2. Ogni retta è incidente ad uno stesso numero cardinale s ($\geqslant 2$) di punti.

A3. Ogni retta è parallela a se stessa. Se la retta a è parallela alla b e la b è parallela alla c, allora anche la c è parallela alla a.

A4. Presi comunque una retta, a, e un punto, P, esiste una e una sola retta passante per P e parallela alla a.

La struttura geometrica $\mathfrak{S} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{C}, \in, ||)$ per cui valgono questi postulati costituisce una *spazio affine generalizzato* nel senso di Sperner, o, come anche diremo più brevemente in seguito, un *S-spazio*. Il cardinale s che dà il numero dei punti incidenti con una retta è chiamato *ordine* dell'S-spazio.

---

[3]) In luogo dell'espressione « P è incidente ad a » adopreremo anche, come è d'uso in geometria, locuzioni analoghe: « P appartiene ad a », « P sta su a », « a passa per P », ecc.

Risulta subito che da ogni punto di un S-spazio, $\mathfrak{S}$, esce un insieme di rette che ha lo stesso cardinale, k. Qualora k sia espresso da un numero finito diremo che $\mathfrak{S}$ è un S-spazio *finito*. Se poi risulta

$$k = \frac{s^n - 1}{s - 1} \tag{1}$$

con n intero $\geqslant 2$, e dove s è l'ordine di $\mathfrak{S}$, l'analogia di comportamento con l'ordinario spazio grafico finito di dimensione n porta a dare la seguente

DEFINIZIONE: *L'intero n che compare nel secondo membro della* (1) *si chiama dimensione dell'S-spazio $\mathfrak{S}$, e l'S-spazio stesso viene detto a dimensione regolare.*

Gli esempi finora noti di S-spazi finiti [4]) sono tutti a dimensione regolare. Resta anzi da vedere se esistono S-spazi finiti non a dimensione regolare.

Nel seguito, quando preciseremo la dimensione di un S-spazio, intenderemo sempre che questo sia a dimensione regolare.

Si riconosce subito che *ogni S-spazio finito avente per dimensione due è un ordinario piano affine.*

Per questo basta osservare che, se $\mathfrak{S}$ ha la dimensione due, due rette, r e r', di $\mathfrak{S}$ che non hanno nessun punto in comune sono parallele [5]); e ciò si vede nel modo seguente. Da un qualunque punto, P, di r' escono le s rette congiungenti P con i punti di r e la parallela per P ad r. Abbiamo così $s + 1$ rette, e poichè la dimensione è due non ne possono uscire altre; la r', essendo l'unica retta che non incontra la r, è necessariamente la parallela.

Si confronti questo risultato con quello ottenuto in [9], § 6, mediante l'aggiunta dell'assioma B5*.

3. - Sia $\mathfrak{S}$ un S-spazio ed $\mathfrak{A}$ un insieme costituito da punti e rette di $\mathfrak{S}$, il quale, quando si considerano fra i suoi elementi l'incidenza e il parallelismo definiti in $\mathfrak{S}$, risulta isomorfo ad un

---

[4]) Cfr. [8], § 3 (e anche [5]); [9] e i seguenti nn. 4 e 11.

[5]) Cfr., p. es., [10], pag. 182.

ordinario spazio affine di dimensione h. Un tale insieme $\mathfrak{A}$ verrà detto un *sottospazio affine completo* di dimensione h di $\mathfrak{S}$ [6]).

Facendo uso di questa nozione mostriamo come per un qualunque S-spazio si possano introdurre dei caratteri, che chiameremo « caratteri di regolarità », i quali si rivelano utili per raffinare la classificazione ottenuta mediante la dimensione, nel caso finito, o per sostituire in qualche modo tale classificazione quando questa, nel caso generale, non esiste.

A tale scopo, fissato un intero $h \geqslant 2$, consideriamo in corrispondenza di ogni punto P di $\mathfrak{S}$ il numero cardinale, r_P, dei sottospazi di $\mathfrak{S}$ aventi dimensione h che passano per P. Sia R_h l'insieme costituito dagli r_P relativi a tutti i punti P di $\mathfrak{S}$ e indichiamo con M_h e m_h rispettivamente l'estremo superiore e l'estremo inferiore di R_h. Questi due numeri cardinali sono i *caratteri di regolarità superiore e inferiore, relativi alla dimensione* h, dell'S-spazio $\mathfrak{S}$.

L'introduzione di questi caratteri pone il problema generale di stabilire, assegnati certi M_h e m_h, se esistono degli S-spazi che possiedono questi caratteri di regolarità e, nel caso affermativo, di riconoscere quali proprietà di tali S-spazi sono legate a quei caratteri.

Come casi molto particolari di questo problema consideriamo, nel caso in cui $\mathfrak{S}$ sia finito (e nel quale quindi anche tutti i caratteri di regolarità sono espressi da numeri interi non negativi), le seguenti questioni:

I. *Esistono dei valori,* L_h, *tali che se per l'S-spazio finito,* $\mathfrak{S}$, *avente dimensione maggiore di due, risulta (in corrispondenza a certi valori di* h) $M_h \geqslant L_h$, *allora* $\mathfrak{S}$ *è un ordinario spazio affine?*

II. *Esistono dei valori,* l_h, *tali che se per l'S-spazio finito,* $\mathfrak{S}$, *avente dimensione maggiore di due, risulta (in corrispondenza a certi valori di* h) $m_h \geqslant l_h$, *ne segue che* $\mathfrak{S}$ *è un ordinario spazio affine?*

---

[6]) Nel seguito invece di « sottospazio affine completo di dimensione h di $\mathfrak{S}$ » diremo più brevemente « sottospazio di dimensione h » o « spazio di dimensione h di $\mathfrak{S}$ ».

4. - Nel presente n. vogliamo mostrare che la risposta alla questione I è negativa per $h = 2$, se si aggiunge la condizione che l'ordine, s, dell'S-spazio sia maggiore di due [7]).

Per questo consideriamo uno spazio affine finito, $\mathfrak{A}$, di dimensione maggiore di due e di ordine $s \geqslant 3$. Fissati in $\mathfrak{A}$ un piano α e due punti A e B di α, modifichiamo alcune delle appartenenze di $\mathfrak{A}$ nel seguente modo: se r è una retta di α passante per A (per B) e diversa dalla AB, cancelliamo da r il punto A (il punto B) e aggiungiamo B (A) ad essa. Conserviamo invece inalterate tutte le altre appartenenze. Nella struttura, $\mathfrak{A}'$, così ottenuta chiamiamo parallele due rette che non abbiano subito modificazioni quando esse sono parallele in $\mathfrak{A}$. Qualora invece delle due rette, a e b, di $\mathfrak{A}'$ una (almeno) è stata ottenuta modificando l'appartenenza nel modo sopra indicato, diciamo che a e b sono parallele quando in $\mathfrak{A}$ risultano parallele le rette da cui esse provengono.

Definito così il parallelismo in $\mathfrak{A}'$, si riconosce facilmente che in questa struttura valgono i postulati A1-A4 e quindi $\mathfrak{A}'$ è un S-spazio. Inoltre $\mathfrak{A}'$ non è un ordinario spazio affine. Infatti si prendano in $\mathfrak{A}$ due rette, r ed u, passanti per A e tali che la r appartenga ad α e sia diversa dalla AB, e la u non appartenga ad α, e chiamiamo a e b due rette del piano di r e di u, che siano incidenti e nessuna delle quali passi per A. Le rette a e b sono incidenti anche in $\mathfrak{A}'$, mentre non lo sono più la u e quella, r', in cui si modifica la r. La r' e la u non sono nemmeno parallele, e quindi $\mathfrak{A}'$ non è uno spazio affine [8]).

Se C è un punto della retta AB, diverso da A e da B, tutti i piani di $\mathfrak{A}$ che escono da C sono piani anche per $\mathfrak{A}'$. Ciò basta

---

[7]) La condizione $s \geqslant 3$ è effettivamente necessaria per poter asserire che la risposta alla questione I è negativa almeno nel caso in cui la dimensione di $\mathfrak{S}$ è uguale a tre. Infatti se $\mathfrak{S}$ è tridimensionale e per esso risulta $s = 2$, l'ipotesi che da un punto di $\mathfrak{S}$ escano sette piani porta che $\mathfrak{S}$ è un ordinario spazio affine.

[8]) Ciò segue immediatamente da una ben nota proprietà degli spazi grafici. Cfr., p.es., la 2) in [10] alla pagina 155.

per provare che la risposta alla questione I è negativa nel caso $h = 2$, $s \geqslant 3$.

La struttura $\mathfrak{A}'$ ora costruita fornisce anche un esempio di S-spazio (diverso da un ordinario spazio affine) tale che tutti i piani appartenenti ad esso sono desarguesiani.

5. - Una prima risposta alla questione II è fornita dal seguente teorema:

Se l'S-spazio finito $\mathfrak{S}$ ha per dimensione tre, e inoltre risulta

$$m_2 > s^2 + s - 1 \,, \tag{2}$$

allora esso è un ordinario spazio affine.

L'ipotesi che $\mathfrak{S}$ abbia dimensione tre porta che non può essere

$$m_2 > s^2 + s + 1 \,. \tag{3}$$

Infatti, poichè due rette passanti per uno stesso punto individuano al più un solo piano, e su ogni piano si trovano $\binom{s+1}{2}$ coppie di rette, risulta

$$\binom{s^2+s+1}{2} \geqslant m_2 \binom{s+1}{2}$$

e quindi non può valore la (3).

La (2) si riduce allora a $m_2 = s^2 + s + 1$ oppure a $m_2 = s^2 + s$.

Dimostriamo il teorema nell'ipotesi che valga la prima di queste due uguaglianze. Ci saranno utili per questo i seguenti lemmi.

LEMMA I: *Se risulta*

$$m_2 = s^2 + s + 1 \tag{4}$$

due rette che hanno un punto in comune individuano sempre un piano.

Infatti se così non fosse, dovrebbe risultare

$$\binom{s^2+s+1}{2} > m_2 \binom{s+1}{2}$$

e ciò è in contraddizione con la (4).

LEMMA II: *Se vale la* (4) *due piani che hanno un punto in comune si intersecano secondo una retta.*

Supponiamo che ciò non accada e chiamiamo α e β due piani aventi in comune un solo punto, P. Associando a ciascuna delle $s+1$ rette di α che contengono P ognuna delle rette per P che appartengono a β si ottengono $(s+1)^2$ coppie di rette tali che mai due di queste coppie individuamo uno stesso piano, e ciò, tenuto conto del lemma I, porterebbe alla (3) che invece non può valere.

LEMMA III: *Sempre nell'ipotesi che valga la* (4), *se r ed u sono rette incidenti in un punto, P, e chiamiamo α il piano da esse individuato, le parallele, r' ed u', condotte per P' rispettivamente ad r e ad u individuano un piano α' tale che ogni retta per P' che sia parallela ad una retta di α sta su α' e ogni retta per P che sia parallela ad una retta di α' appartiene ad α.*

La cosa è ovvia se P' appartiene ad α. Supponiamo quindi che P' non stia su α. Detta x una retta di α passante per P ammettiamo che la retta x' parallela ad essa per P' non appartenga ad α'. Il piano β, individuato dalle rette PP' ed x, contiene la x'. Inoltre poichè β ed α' hanno in comune il punto P', essi hanno in comune una retta, $\bar{x}$. L'aver supposto che x' non appartiene ad α' porta che x' non può coincidere con $\bar{x}$ e quindi, poichè x, x' e $\bar{x}$ sono complanari e da P' non possono uscire due parallele alla x, le rette x ed $\bar{x}$ sono incidenti in un punto X. Allora le parallele condotte per X ad r e ad u appartengono ad α e ad α', quindi questi due piani coincidono e P' sta su α. Dall'ipotesi che x' non appartenga ad α' si giunge così ad un assurdo. È immediato poi che viceversa anche le parallele per P alle rette di α' stanno su α. Il lemma risulta quindi provato.

Da quanto abbiamo ora visto segue che possiamo chiamare paralleli due piani, α e α', quando uno di essi contiene due rette che sono parallele a due rette, r ed u, fra loro incidenti del secondo, in quanto il parallelismo di α ed α' non dipende dalla particolare scelta di r e di u. Dunque, se vale la (4), *il parallelismo fra le rette di $\mathfrak{S}$ induce un parallelismo anche fra i piani di questo S-spazio.*

Ampliamo ora $\mathfrak{S}$ introducendo dei nuovi punti e delle nuove rette che chiameremo rispettivamente « punti impropri » e « rette improprie ». Procederemo per questo nel modo seguente. Per l'assioma A3 il parallelismo costituisce una relazione di equivalenza, e quindi fa nascere nell'insieme $\mathfrak{C}$ delle rette una divisione in classi di equivalenza. Associamo a ciascuna di queste classi un punto improprio che viene considerato come incidente a tutte le rette della classe a cui corrisponde e a nessun'altra retta di $\mathfrak{C}$. Osserviamo poi che, per il modo come è stato definito, anche il parallelismo fra i piani è una relazione di equivalenza: ad ogni classe di piani paralleli associamo una retta impropria che risulta incidente ai punti impropri appartenenti alle rette di un qualunque piano della classe e a nessun altro punto. Chiamiamo $\mathfrak{S}^*$ la struttura ottenuta aggiungendo a $\mathfrak{B}$ e a $\mathfrak{C}$ rispettivamente i punti e le rette improprie, e ampliando la relazione di incidenza nel modo stabilito. Si riconosce facilmente che vale il

LEMMA IV: *La struttura $\mathfrak{S}^*$ ottenuta nel modo ora indicato da $\mathfrak{S}$, quando per questo vale la* (4), *è uno spazio grafico irriducibile.*

Infatti in $\mathfrak{S}^*$ valgono le seguenti proprietà:

a) Due punti appartengono ad una e una sola retta.

La verifica è immediata.

b) Scelti comunque tre punti, A, B, C, non allineati ed una retta, r, se la r interseca le rette AB ed AC in punti distinti, essa incontra anche la retta BC.

La dimostrazione si effettua subito distinguendo i vari casi che si presentano in corrispondenza al fatto che alcuni dei tre punti A, B, C possono essere impropri.

Precisamente, nel caso in cui sia improprio il solo punto A basta osservare che due rette parallele individuano sempre un piano. Ciò è subito visto, infatti dette u e v le due rette parallele e scelti un punto U su u e uno V su v, le rette u e UV per il lemma I individuano un piano affine al quale appartiene anche v come retta per V parallela ad u.

Se A, B e C sono tutti impropri la proprietà è una conseguenza del lemma II applicato ai piani che da un punto proprio P proiettano le rette improprie BC ed r.

Negli altri casi infine basta tener conto del lemma I.

c) Ogni retta contiene $s+1$ (>3) punti.

Constatata la validità delle a), b) e c) il lemma è provato ([9]).

Lo spazio grafico $\mathfrak{S}^*$ è a tre dimensioni, e i punti e le rette impropri costituiscono un suo piano. L'S-spazio $\mathfrak{S}$ si ottiene da $\mathfrak{S}^*$ sopprimendo gli elementi di questo piano (e introducendo corrispondentemente la relazione di parallelismo) e quindi è uno spazio affine. Il teorema è così dimostrato se in luogo della (2) vale la (4).

Rimane da vedere che cosa accade nell'ipotesi che risulti

$$m_2 = s^2 + s \,. \tag{5}$$

Proveremo che questa uguaglianza porta ad un assurdo, e quindi non può sussistere: ciò equivale a completare la dimostrazione del teorema.

Distinguiamo le rette di $\mathfrak{S}$ in due classi, una formata dalle rette, che chiameremo *ordinarie* o *non singolari*, per ciascuna delle quali passano $s+1$ piani, e una costituita dalle rette, che diremo *singolari*, incidenti con meno di $s+1$ piani. L'ipotesi che valga la (5) porta che in $\mathfrak{S}$ esistono delle rette singolari.

Sia r una retta singolare e P un suo punto. Il numero delle rette che escono da P, sono distinte dalla r, e che insieme con la r non individuano un piano, è divisibile per s.

Infatti le rette per P diverse dalla r sono $(s+1)\,s$. Se una di queste è complanare con r, tale piano contiene, oltre r, s di quelle rette. Allora il numero delle rette per P, diverse dalla r, e complanari con la r è multiplo di s, altrettanto quindi accade per le rette uscenti da P e non complanari con r.

Poichè P appartiene alla r che è una retta singolare, da P escono oltre ad r altre rette singolari e queste, per quanto ab-

---

[9]) Si veda, p. es., [10] pagg. 155 e 171.

biamo ora provato, sono almeno s. Vogliamo mostrare che, nell'ipotesi che valga la (5), il numero di tutte le rette singolari che escono da un punto, P, di una retta singolare è precisamente $s+1$.

Per questo supponiamo che dal punto P escano rette singolari. Nella stella di centro P il numero delle coppie costituite da un piano e una retta che si appartengono è allora minore od uguale a:

$$(s^2 - \lambda)(s+1) + (s + \lambda + 1)s\,. \tag{6}$$

D'altra parte il numero di quelle coppie è dato da:

$$m_2(s+1) = s^3 + 2s^2 + s\,, \tag{7}$$

e dal confronto della (6) con la (7) segue $\lambda = 0$. Quindi *se vale la* (5) *da ogni punto di* $\mathfrak{S}$ *da cui esce una retta singolare ne escono esattamente* $s+1$.

Risulta anche che *due rette singolari incidenti non possono mai essere complanari.*

Infatti supponiamo che a e b siano due rette singolari incidenti in P e appartenenti ad un medesimo piano. Per quanto abbiamo ora visto da P escono esattamente $s+1$ rette singolari e s^2 rette ordinarie. Poichè a è singolare per a passano al più s piani di $\mathfrak{S}$, e le s^2 rette ordinarie che escono da P si devono necessariamente distribuire su questi. Ne segue che per a devono passare esattamente s piani e ciascuno di questi deve contenere il massimo, cioè s, delle rette ordinarie che escono da P; e ciò è in contrasto con l'ipotesi che uno dei piani per a possa contenere la retta singolare b.

Per le rette singolari vale poi la proprietà indicata nel seguete lemma.

LEMMA V: *Se a e b sono due rette singolari incidenti in un punto, P, e Q è un punto della retta b distinto da P, le $s+1$ rette singolari uscenti da Q sono le rette che uniscono Q con i punti di a e la parallela per Q alla a.*

Infatti se una delle rette che uniscono Q con i punti della a, o la parallela per Q alla a, fosse una retta ordinaria, questa retta e la b sarebbero complanari e al piano di questa apparterrebbe anche la retta a, mentre a e b essendo due rette singolari incidenti non possono appartenere ad uno stesso piano. Il lemma risulta così provato.

Fissiamo ora una retta singolare, r, ed un suo punto, P, Indichiamo con (P) l'insieme delle rette singolari uscenti da P e con $\mathfrak{T}$ l'insieme dei punti appartenenti alle rette di (P).

Scelta in (P) una retta, h, diversa dalla r, mostriamo ora che *le rette che sono parallele alla r e incidenti ad h, risultano incidenti ad ogni retta di (P) diversa dalla r.*

Infatti scelti un punto H sulla h e una retta k di (P), diversa dalla r, osserviamo prima di tutto che, per il lemma V, la retta r' passante per H e parallela alla r è una retta singolare. Ancora per il lemma V (applicato alle rette incidenti h ed r'), e per il fatto che da P esce una sola parallela alla r', segue allora che la r' e la k sono incidenti.

Indichiamo con $\mathfrak{R}$ l'insieme formato dalle rette singolari incidenti alla r, dalla r e dalle parallele alla r condotte dai punti di $\mathfrak{T}$.

Per l'insieme costituito dai punti di $\mathfrak{T}$ e dalle rette di $\mathfrak{R}$ si riconosce facilmente, facendo uso del lemma V, che valgono le seguenti proprietà:

1) La congiungente due punti di $\mathfrak{T}$ è una retta di $\mathfrak{R}$.

2) Due rette di $\mathfrak{R}$ che non sono parallele si intersecano in un punto di $\mathfrak{T}$.

3) Fissati un punto, A, di $\mathfrak{T}$ e una retta, a, di $\mathfrak{R}$ esiste una ed una sola retta di $\mathfrak{R}$ passante per A e parallela alla a.

Ma allora i punti di $\mathfrak{T}$ e le rette di $\mathfrak{R}$, rispetto all'incidenza e al parallelismo definiti in $\mathfrak{S}$, costituiscono un piano affine completo [10]. Questo risultato è in contraddizione con il fatto che due rette di $\mathfrak{R}$ incidenti essendo singolari, non possono essere complanari. Ne segue quindi che non può valere la (5) e il teorema risulta completamente dimostrato.

6. - In [7], § 3 è stato indicato come si possa ottenere una vasta classe di S-spazi facendo ricorso a una costruzione che si

---

[10]) Cfr., p. es., [10], pag. 182.

ricollega al « metodo delle proiezioni ortogonali » della geometria descrittiva. Poichè nel seguito di questo lavoro avremo più volte occasione di occuparci di essi, riportiamo brevemente in questo n., per comodità del lettore, il procedimento mediante il quale tali S-spazi vengono generati.

Si considerino tre ordinari piani affini, $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, tali che il cardinale dei punti di una retta sia lo stesso per tutti e tre. Scegliamo poi una retta, k_1, in $\mathfrak{A}_1$, una retta, k_2, in $\mathfrak{A}_2$ e, stabilita una corrispondenza biunivoca fra i punti di queste due rette, saldiamo fra loro $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{A}_2$ identificando i punti omologhi delle rette k_1 e k_2. Tali rette vengono così a fondersi in un'unica retta che nel seguito chiameremo semplicemente k. Fissiamo quindi in ciascuno dei piani $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2)$ un fascio $\mathfrak{P}_i$ di rette parallele incidenti alla k. Se Q_i è un punto di $\mathfrak{A}_i$, e p_i è la retta di $\mathfrak{P}_i$ incidente con Q_i, poniamo $Z(Q_i) = p_i \cap k$.

Assumiamo come punti dell'S-spazio $\mathfrak{S}$ che vogliamo costruire le coppie ordinate di punti (Q_1, Q_2), con $Q_i \in \mathfrak{A}_i$, e con la condizione che sia $Z(Q_1) = Z(Q_2)$; nel seguito indicheremo con $\mathfrak{B}$ l'insieme dei punti di $\mathfrak{S}$.

Definiamo ora le rette di $\mathfrak{S}$. Per questo procediamo in due tempi. Chiamiamo retta di prima specie ogni coppia ordinata di rette (g_1, g_2) con $g_i \in \mathfrak{A}_i$, ma $g_i \notin \mathfrak{P}_i$. Sia $\mathfrak{C}^{(1)}$ il sistema di tutte queste rette.

L'incidenza fra i punti di $\mathfrak{B}$ e le rette di $\mathfrak{C}^{(1)}$ è stabilita dalla relazione:

$$(Q_1, Q_2) \in g_1, g_2) \longleftrightarrow Q_1 \in g_1, Q_2 \in g_2 ,$$

mentre il parallelismo nell'insieme $\mathfrak{C}^{(1)}$ si introduce ponendo:

$$(g_1, g_2) \,||\, (h_1, h_2) \longleftrightarrow g_1 \,||\, h_1, g_2 \,||\, h_2 .$$

L'insieme $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}^{(1)}$, con l'incidenza e il parallelismo ora definiti non costituisce ancora un S-spazio, in quando mancano le rette congiungenti due punti (Q_1, Q_2), (Q_1', Q_2') con $Z(Q_i) = Z(Q_i')$. Otterremo queste procedendo nel modo che indichiamo qui di seguito.

Consideriamo per ogni $Z \in k$, l'insieme, $\mathfrak{M}_Z$, formato dai punti

(Q_1, Q_2) di $\mathfrak{B}$ per cui risulta $Z(Q_1) = Z(Q_2) = Z$. Con i punti di ogni $\mathfrak{M}_Z$ definiamo ora delle nuove rette facendo ricorso al piano $\mathfrak{A}_3$. Per questo fissiamo dapprima in $\mathfrak{A}_3$ due diversi fasci, $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$, di rette parallele. Otteniamo così nel piano $\mathfrak{A}_3$ un sistema di riferimento nel quale i punti sono individuati dalla corrispondenza biunivoca che nasce fra essi e le coppie di rette (r_1, r_2) con $r_i \in \mathfrak{R}_i$ quando ad $r_1 \cap r_2$ si associa la coppia (r_1, r_2).

Indichiamo quindi con $\mathfrak{K}_i$ $(i = 1, 2)$ il fascio delle rette di $\mathfrak{A}_i$ che sono parallele a k e stabiliamo due corrispondenze biunivoche, una, φ_1, fra le rette di $\mathfrak{K}_1$ e quelle di $\mathfrak{R}_1$ e una, φ_2, fra le rette di $\mathfrak{K}_2$ e quelle di $\mathfrak{R}_2$.

Fissato un insieme $\mathfrak{M}_Z$ sia (Q_1, Q_2) un suo punto e diciamo q_1 e q_2 le rette di $\mathfrak{K}_1$ e $\mathfrak{K}_2$ che passano rispettivamente per Q_1 e Q_2. Se al punto (Q_1, Q_2) associamo il punto $(q_1\varphi_1, q_2\varphi_2)$ di $\mathfrak{A}_3$, nasce una corrispondenza biunivoca, $\Phi_Z{}^{-1}$, fra i punti di $\mathfrak{M}_Z$ e quelli di $\mathfrak{A}_3$. Sia ora a una retta di $\mathfrak{A}_3$: l'insieme, $a\Phi_Z$, dei punti di $\mathfrak{M}_Z$ che sono omologhi, nella Φ_Z, dei punti di a costituisce per definizione una retta di $\mathfrak{M}_Z$. L'insieme, $\mathfrak{C}^{(2)}$, di tutte queste rette, in relazione a tutti i diversi insiemi $\mathfrak{M}_Z$, è l'insieme delle rette di seconda specie di $\mathfrak{S}$.

L'incidenza di un punto $\mathfrak{B}$ con una retta di $\mathfrak{C}^{(2)}$ è definita in modo ovvio come inclusione. La relazione di parallelismo nell'insieme delle rette di $\mathfrak{C}^{(2)}$ viene introdotta ponendo:

$$g\Phi_Z \,||\, h\Phi_{Z'} \longleftrightarrow g \,||\, h \,.$$

Nella struttura formata dall'insieme $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}^{(1)} \cup \mathfrak{C}^{(2)}$ e dalle relazioni di incidenza e di parallelismo sopra definite si riconosce che valgono senza eccezione gli assiomi A1-A4 del n. 2; essa è quindi un S-spazio, $\mathfrak{S}$. Se uno almeno dei tre piani $\mathfrak{A}_i$ è non desarguesiano, tale è certamente anche l'S-spazio ora costruito.

7. - È subito visto che ciascuno degli S-spazi ottenuti con il procedimento indicato nel n. precedente ha, nel caso finito, dimensione tre secondo la definizione introdotta nel n. 2. Si riconosce anche facilmente che per gli S-spazi di essa è, sempre

nel caso finito

$$m_2 \geqslant 2s + 1 \,. \tag{8}$$

Infatti sia $\mathfrak{S}$ un tale S-spazio e indichiamo con (P_1, P_2) un suo punto. Fissiamo una retta, a_1, di $\mathfrak{A}_1$ per P_1 e non appartenente a $\mathfrak{P}_1$, e consideriamo l'insieme dei punti (Q_1, Q_2) di $\mathfrak{S}$ con $Q_1 \in a_1$. Si riconosce subito che questi formano un piano isomorfo ad $\mathfrak{A}_2$ [11]). Di tali piani se ne ottengono s, cioè tanti quante sono le rette per P_1 non appartenenti a $\mathfrak{P}_1$. Altri s piani, isomorfi ad $\mathfrak{A}_1$, si ottengono scambiando nella costruzione ora indicata le veci degli elementi di $\mathfrak{A}_1$ con quelli di $\mathfrak{A}_2$. Infine vi è il piano, isomorfo ad $\mathfrak{A}_3$, costituito dai punti (Q_1, Q_2) con $Z(Q_1) = Z(P_1)$. Per ogni punto di $\mathfrak{S}$ passano quindi almeno $2s + 1$ piani.

Se il cardinale s non è finito le considerazioni svolte provano che per ogni punto (P_1, P_2) di $\mathfrak{S}$ passano infiniti piani isomorfi ad $\mathfrak{A}_2$ e infiniti isomorfi ad $\mathfrak{A}_1$, che si ottengono rispettivamente in corrispondenza alle rette di $\mathfrak{A}_1$ per P_1 e non appartenenti a $\mathfrak{P}_1$, e alle rette di $\mathfrak{A}_2$ per P_2 e non di $\mathfrak{P}_2$.

Domandiamoci ora cosa accade se vi è almeno un punto per il quale, oltre ai piani del tipo indicato, passi un ulteriore piano α [12]).

Poichè dai postulati segue subito che per tre punti non allineati dell'S-spazio passa al più un piano, se (P_1, P_2) e (Q_1, Q_2) sono due punti diversi di α, risulta necessariamente $P_1 \neq Q_1$ e $P_2 \neq Q_2$. Infatti se fosse ad esempio $P_1 = Q_1$, per i punti (P_1, P_2), (Q_1, Q_2) e per un terzo punto di α, non allineato con questi due, passerebbe uno dei piani sopra indicati, e α coinciderebbe con questo, contro l'ipotesi.

Per la proprietà ora rilevata segue allora che dall'esistenza di α si deduce che esiste una corrispondenza biunivoca, σ, fra i punti di $\mathfrak{A}_1$ e di $\mathfrak{A}_2$. Poichè σ conserva gli allineamenti è un

---

[11]) Precisamente l'isomorfismo è quello che a (P_1, P_2) fa corrispondere P_2 e alla retta (a_1, r_2) fa corrispondere r_2.

[12]) Ciò corrisponde, nel caso finito, a supporre $M_2 > 2s + 1$.

isomorfismo fra questi due piani, e possiamo aggiungere che:

a) se $p_1 \in \mathfrak{P}_1$, $p_2 \in \mathfrak{P}_2$ e $p_1 \cap p_2 \in k$, allora $p_1\sigma = p_2$;

b) se (P_1, P_2), (Q_1, Q_2) e (R_1, R_2) appartengono ad α e $Z(P_1) = Z(Q_1) = Z(R_1)$, i trasformati di questi tre punti nella $\Phi_Z{}^{-1}$ sono allineati in $\mathfrak{A}_3$.

Viceversa se fra $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{A}_2$ esiste un isomorfismo σ per cui valgano la a) e la b), ad esso è associato un piano α_σ: precisamente quello costituito dai punti (Q_1, Q_2) con $Q_2 = Q_1\sigma$ e dalle rette (r_1, r_2) con $r_2 = r_1\sigma$. Il piano α_σ è isomorfo ad $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{A}_2$.

8. - Un S-spazio del tipo considerato nel n. 6 contiene quindi al più tre piani non isomorfi. È possibile apportare una piccola modifica alla sua costruzione in modo da ottenere S-spazi, aventi nel caso finito tre dimensioni, che contengano un maggior numero di piani non isomorfi. Per questo basta osservare che il piano $\mathfrak{A}_3$, di cui ci si serve per definire le rette di seconda specie, opera in modo indipendente su ciascun insieme $\mathfrak{M}_Z$. Consideriamo allora, nel caso finito, un insieme di s piani proiettivi (a due a due, o anche solo in parte, non isomorfi), $\mathfrak{A}'_i$ $(i = 1, \ldots, s)$, di ordine $s + 1$, e saldiamoli lungo una retta, z. Sopprimendo z e i suoi punti i piani $\mathfrak{A}'_i$ divengono dei piani affini $\mathfrak{A}''_i$. Due rette appartenenti ai piani $\mathfrak{A}''_i$ le diremo parallele quando si sono ottenute da due rette dei piani $\mathfrak{A}'_i$ sopprimendo lo «stesso» punto di z. Stabilendo una corrispondenza biunivoca, ϱ, fra i punti, Z, di k e i piani $\mathfrak{A}''_i$ e applicando, per definire le rette di seconda specie in $\mathfrak{M}_Z$, la Φ_Z (n. 6) ad ogni coppia di elementi Z, $\mathfrak{A}''_i$ corrispondentisi nella ϱ si ottiene ancora un S-spazio tridimensionale per cui vale la (8). Se fra gli $\mathfrak{A}''_i$ si trovano piani non isomorfi fra loro e con $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{A}_2$, l'S-spazio costruito viene a contenere più di tre piani non isomorfi.

Naturalmente un'osservazione analoga si può effettuare per il caso in cui l'S-spazio non è finito.

Le considerazioni svolte suggeriscono per ogni S-spazio, $\mathfrak{S}$, di fermare l'attenzione su due nuovi caratteri numerici dati dai due interi che indicano rispettivamente il numero dei piani non isomorfi di $\mathfrak{S}$ e il massimo numero di piani non isomorfi che passano per un medesimo punto di $\mathfrak{S}$.

9. - La classe di S-spazi generati con la costruzione indicata nel n. 6 contiene una sottoclasse i cui elementi sono isomorfi agli S-spazi ottenuti in [1].

Prima di provare ciò ricordiamo brevemente il procedimento usato per giungere a questi ultimi. Scelti in un qualunque piano proiettivo π un punto, H, e tre rette distinte, h, f e t, incidenti con esso, definiamo prima di tutto i punti e le rette dell'S-spazio che vogliamo costruire.

Un punto dell'S-spazio è una coppia di rette di π che siano incidenti su h, distinte da h e non passanti per H. Le rette dell'S-spazio sono di due diverse specie: una retta di prima specie è costituita da una coppia di punti di π non appartenenti ad h; una retta di seconda specie è una coppia (T_r, R), di punti di π per cui risulti $T_r \in h$, $T_r \neq H$ e $R \neq H$. Per indicare un punto, una retta di prima specie e una retta di seconda specie dell'S-spazio useremo rispettivamente le scritture:

$$A \sim (t_A, f_A)\,, \quad r \sim (T_r, F_r)\,, \quad r \sim (T_r, R)\,.$$

Dobbiamo ora stabilire le relazioni di appartenenza e di parallelismo. Queste sono definite, in funzione degli elementi di π, come segue:

Il punto $A \sim (t_A, f_A)$ appartiene alla retta di prima specie $r \sim (T_r, F_r)$ quando è $T_r \in t_A$, $F_r \in f_A$.

Il punto $A \sim (t_A, f_A)$ appartiene alla retta di seconda specie $r \sim (T_r, R)$ quando risulta $T_r = h \cap t_A$ e i punti R, $t \cap t_A$ e $f \cap f_A$ sono allineati.

Due rette di prima specie, $r \sim (T_r, F_r)$ e $u \sim (T_u, F_u)$, sono parallele quando le rette HT_r e HF_r coincidono rispettivamente con HT_u e HF_u.

Infine due rette di seconda specie, $r \sim (T_r, R)$ e $u \sim (T_u, U)$ sono parallele quando coincidono le rette HR e HU.

La struttura geometrica a cui si giunge collegando nel modo ora indicato i punti e le rette prima definiti soddisfa i postulati A1-A4 e quindi è un S-spazio, $\mathfrak{S}'$.

Mostriamo ora come si pervenga ad un S-spazio isomorfo ad $\mathfrak{S}'$ con il procedimento del n. 6.

Per prima cosa prendiamo i piani $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ e $\mathfrak{A}_3$, che servono come fondamento a tutta la costruzione, in modo che siano isomorfi al piano affine che si ottiene sopprimendo dal piano π il punto H e le rette del fascio di centro H, e trasformando per dualità la struttura, π^*, cosi ottenuta.

Consideriamo adesso una dualità, λ_1, fra π^* ed $\mathfrak{A}_1$, e diciamo $\mathfrak{P}_1$ il fascio di rette parallele di $\mathfrak{A}_1$ che corrispondono in λ_1 ai punti (diversi da H) della retta h di π. Fissiamo quindi in $\mathfrak{A}_1$ una retta, k_1, che sia l'omologa in λ_1 di un punto ($\neq H$) della retta t del piano π.

Sia poi λ_2 una dualità fra π^* ed $\mathfrak{A}_2$, indichiamo con $\mathfrak{P}_2$ il fascio di rette parallele di $\mathfrak{A}_2$ che corrispondono nella λ_2 ai punti (diversi da H) della retta h di π, e fissiamo in $\mathfrak{A}_2$ una retta, k_2, che corrisponda nella λ_2 a un punto di π appartenente alla f (e diverso da H). Saldiamo ora $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{A}_2$ nel modo seguente. Stabiliamo una corrispondenza biunivoca fra i punti di k_1 e quelli di k_2 assumendo come omologhi punti che si ottengano trasformando rispettivamente nella λ_1 e nella λ_2 rette di π^* (appartenenti ai fasci di centri $k_1\lambda_1^{-1}$ e $k_2\lambda_2^{-1}$), che si intersecano sulla h. Identificando ogni due punti di k_1 e k_2 che si corrispondono in tale modo otteniamo la retta k (cfr. n. 6).

Consideriamo infine una dualità, λ_3, fra π^* e $\mathfrak{A}_3$, e diciamo $\mathfrak{R}_1$ e $\mathfrak{R}_2$ i due fasci di rette parallele di $\mathfrak{A}_3$ che si ottengono trasformando nella λ_3 i punti di π^* che appartengono rispettivamente alle rette t e f di π.

Indichiamo quindi con $\mathfrak{K}_i$ $(i = 1, 2)$ il fascio di rette di $\mathfrak{A}_i$ costituito da tutte le parallele alla k. Associamo nella φ_1 (cfr. n. 6) una retta r_1 di $\mathfrak{R}_1$ e una k_1 di $\mathfrak{K}_1$ quando si ottengano trasformando uno stesso punto della t nella λ_3 e nella λ_1; analogamente le rette r_2 e k_2 di $\mathfrak{R}_2$ e $\mathfrak{K}_2$ che si corrispondono nella φ_2 sono quelle a cui si giunge trasformando uno stesso punto della f nella λ_3 e nella λ_2.

Si vede ora facilmente che applicando la costruzione indicata nel n. 6 a partire dai piani $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ nei quali siano fissati gli elementi $\mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{R}_i$, $\mathfrak{K}_i$ nel modo indicato, si ottiene un S-spazio, $\mathfrak{S}$, isomorfo a quello, $\mathfrak{S}'$, a cui si giunge, a partire da π, con il procedimento sopra riportato.

Infatti consideriamo la corrispondenza che al punto $P \sim$ $\sim (t_P, f_P)$, alla retta di prima specie $r \sim (T_r, F_r)$ e alla retta di seconda specie $r \sim (T_r, R)$ di $\mathfrak{S}'$ associa in $\mathfrak{S}$ rispettivamente il punto $(t_P\lambda_1, f_P\lambda_2)$ [13]), la retta di prima specie $(T_r\lambda_1, F_r\lambda_2)$ e la retta di seconda specie $R\lambda_3\Phi_Z$, formata da tutti i punti di $\mathfrak{M}_Z$ [dove $Z = Z(a\lambda_1)$, avendo indicato con a una qualunque retta di π^* passante per T_r $(\in h)$] che costituiscono l'immagine della retta $R\lambda_3$ di $\mathfrak{A}_3$. Questa corrispondenza conserva l'appartenenza e il parallelismo, e ciò prova il nostro asserto.

Il risultato stabilito riflette il legame che intercede nel caso desarguesiano fra i due metodi di rappresentazione delle proiezioni centrali e delle proiezioni ortogonali [14]).

10. - Il procedimento esposto nel n. 6 per costruire una classe di S-spazi che nel caso finito hanno dimensione tre può essere generalizzato in modo da ottenere una classe di S-spazi che nel caso finito hanno dimensione n, con n intero qualsiasi maggiore di tre [15]).

Scegliamo per questo $\frac{n(n-1)}{2}$ piani affini, tali che il cardinale s [16]) dei punti di una retta sia lo stesso per tutti i piani.

Indicati $n-1$ di tali piani con $\mathfrak{A}_i^{(1)}$ $(i = 1, ..., n-1)$, fissiamo su ciascuno di questi una retta, e sia k_i quella scelta su $\mathfrak{A}_i^{(1)}$. Stabilita per ogni k_i $(i \neq 1)$ una corrispondenza biunivoca fra i punti di k_i e quelli di k_1, saldiamo fra loro i punti $\mathfrak{A}_i^{(1)}$ identificando i punti corrispondenti di k_1 e di k_i $(i = 2, ..., n-1)$. La retta $k_1 = k_2 = ... = k_{n-1}$ verrà in seguito indicata sempli-

---

13) Si noti che per il modo come sono stati saldati fra loro $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{A}_2$, alla circostanza $t_P \cap f_P \in h$ corrisponde la relazione $Z(t_P\lambda_1) = Z(f_P\lambda_2)$.

14) Cfr., p. es., [2].

15) In occasione della comunicazione di questo risultato effettuata durante il « Simposio sulle geometrie finite » (cfr. **)), il Prof. Sperner ci ha informato di aver ottenuto una generalizzazione analoga con un procedimento diverso da quello qui seguito.

16) Non espresso necessariamente da un numero finito.

cemente con k. Due piani $\mathfrak{A}_i^{(1)}$ e $\mathfrak{A}_j^{(1)}$ $(i \neq j)$ all'infuori della retta k e dei suoi punti non hanno alcun elemento in comune.

Fissiamo poi in ogni piano $\mathfrak{A}_i^{(1)}$ $(i = 1, \dots, n-1)$ un fascio $\mathfrak{P}_i$, di rette parallele secanti la retta k. Se Q_i è un punto di $\mathfrak{A}_i^{(1)}$ incidente con la retta $p_i \in \mathfrak{P}_i$, poniamo $Z(Q_i) = p_i \cap k$.

Prendiamo come punti dello spazio, $\mathfrak{S}$, che vogliamo costruire le $(n-1)$-ple ordinate $(Q_1, \dots, Q_{n-1})$ di punti per cui è $Q_i \in \mathfrak{A}_i^{(1)}$ e $Z(Q_1) = Z(Q_2) = \dots = Z(Q_{n-1})$. Indicheremo in seguito con $\mathfrak{B}$ l'insieme dei punti di $\mathfrak{S}$.

Definiamo ora le rette di $\mathfrak{S}$. Un primo sistema, $\mathfrak{C}^{(1)}$, di rette di $\mathfrak{S}$, che chiameremo *rette di prima specie*, è costituito dalle $(n-1)$-ple ordinate di rette $(g_1, \dots, g_{n-1})$ con $g_i \in \mathfrak{A}_i^{(1)}$, $g_i \notin \mathfrak{P}_i$.

L'incidenza fra i punti di $\mathfrak{B}$ e le rette di $\mathfrak{C}^{(1)}$è stabilita dalla relazione:

$$(Q_1, \dots, Q_{n-1}) \in (g_1, \dots, g_{n-1}) \longleftrightarrow Q_1 \in g_1, \dots, Q_{n-1} \in g_{n-1} ,$$

mentre il parallelismo fra due rette di $\mathfrak{C}^{(1)}$ è definito ponendo:

$$(g_1 \dots, g_{n-1}) \parallel (h_1, \dots, h_{n-1}) \longleftrightarrow g_1 \parallel h_1, \dots, g_{n-1} \parallel h_{n-1} .$$

Si riconosce facilmente che per le rette di $\mathfrak{C}^{(1)}$ sono soddisfatti gli assiomi A2, A3, A4. Inoltre ogni coppia di punti distinti

$$(9) \qquad (Q_1, \dots, Q_{n-1}) , \quad (P_1, \dots, P_{n-1})$$

di $\mathfrak{B}$, per cui sia $Z(Q_i) \neq Z(P_i)$, individua una e una sola retta di $\mathfrak{C}^{(1)}$.

Mancano però in $\mathfrak{S}$ le congiungenti i due punti (9) quando sia $Z(Q_i) = Z(P_i)$. Otterremo queste definendo gli insiemi, $\mathfrak{C}^{(j)}$ $(j = 2, \dots, n-1)$, delle *rette di specie* j di $\mathfrak{S}$. Per ogni punto $Z \in k$ consideriamo l'insieme $\mathfrak{M}_Z$ costituito dai punti $(Q_1, \dots, Q_{n-1})$ di $\mathfrak{B}$ per cui risulta $Z(Q_i) = Z$. Con i punti di ogni $\mathfrak{M}_Z$ definiamo ora degli ulteriori sistemi di rette utilizzando i restanti piani affini scelti inizialmente.

Cominciamo col definire le *rette di seconda specie*. Consideriamo per questo altri $n-2$ dei piani scelti, e siano $\mathfrak{A}_i^{(2)}$

$(i = 2, ..., n-1)$. In $\mathfrak{A}_i^{(2)}$ fissiamo due diversi fasci, $\mathfrak{R}_1^{(2,i)}$ e $\mathfrak{R}_2^{(2,i)}$, di rette parallele. In tal modo resta stabilito in $\mathfrak{A}_i^{(2)}$ un sistema di riferimento nel quale ogni punto è individuato dalla coppia di rette di $\mathfrak{R}_1^{(2,i)}$ e $\mathfrak{R}_2^{(2,i)}$ che si intersecano in esso. Indichiamo poi con $\mathfrak{K}_x$ l'insieme delle rette di $\mathfrak{A}_x^{(1)}$ $(x = 1, ..., n-1)$ parallele a k. Poichè la potenza degli insiemi $\mathfrak{K}_i$, $\mathfrak{R}_1^{(2,i)}$ e $\mathfrak{R}_2^{(2,i)}$ risulta sempre uguale al cardinale s, è possibile stabilire per ogni valore di i due corrispondenze biunivoche, una, $\varphi_1^{(2,i)}$, fra le rette di $\mathfrak{K}_1$ e quelle di $\mathfrak{R}_1^{(2,i)}$, e una, $\varphi_2^{(2,i)}$, fra le rette di $\mathfrak{K}_i$ e quelle di $\mathfrak{R}_2^{(2,i)}$.

Ad ogni punto $(Q_1, ..., Q_{n-1})$ di $\mathfrak{M}_Z$ possiamo allora associare $n-2$ punti, uno su ciascun piano $\mathfrak{A}_i^{(2)}$, nel modo seguente. Mandata per Q_x $(x = 1, ..., n-1)$ la parallela, q_x, a k, il punto di $\mathfrak{A}_i^{(2)}$ che facciamo corrispondere a $(Q_1, ..., Q_{n-1})$ è:

$$Q_{2,i} = q_1\varphi_1^{(2,i)} \cap q_x\varphi_2^{(2,i)} ;$$

la retta q_1 la chiameremo l' « ascissa » di $Q_{2,i}$.

È subito visto che, fissato $\mathfrak{M}_Z$, la corrispondenza così ottenuta fra i punti di $\mathfrak{M}_Z$ e le $(n-2)$-ple costituite da punti $Q_{2,i}$ aventi la stessa ascissa è biunivoca. Consideriamo allora un qualunque insieme di $n-2$ rette, $g_{2,i}$, con $g_{2,i} \in \mathfrak{A}_1^{(2)}$; ma $g_{2,i} \notin \mathfrak{R}_1^{(2,i)}$. In corrispondenza di ciascuno di questi insiemi otteniamo una retta di seconda specie di $\mathfrak{M}_Z$ considerando l'insieme di tutti i punti di $\mathfrak{M}_Z$ per i cui omologhi, $Q_{2,i}$, in $\mathfrak{A}_i^{(2)}$ risulta $Q_{2,i} \in g_{2,i}$. L'insieme di tutte queste rette, in corrispondenza a tutti i diversi $\mathfrak{M}_Z$ con $Z \in k$, costituisce l'insieme, $\mathfrak{C}^{(2)}$, delle rette di seconda specie di $\mathfrak{S}$.

L'incidenza dei punti con queste nuove rette è definita ovviamente come inclusione. Due rette della seconda specie le diciamo parallele quando provengono da due $(n-2)$-ple, $(g_{2,2}, ..., g_{2,n-1})$, $(h_{2,2}, ..., h_{2,n-1})$, per cui sia $g_{2,i} \parallel h_{2,i}$.

Le rette di seconda specie soddisfano ai postulati A2, A3, A4, e ora anche le coppie di punti (9) distinti per cui risulti $Z(P_i) = Z(Q_i)$ ammettono una e una sola congiungente a meno che non sia $P_1 = Q_1$.

Supponiamo infine che per i punti (9) si abbia

$$P_1 = Q_1, ..., \quad P_{j-2} = Q_{j-2}, \quad P_{j-1} \neq Q_{j-1} \qquad (j < n)$$

e mostriamo come si definisca anche in questo caso una congiungente. A tale scopo consideriamo, fra quelli che ancora restano degli $\frac{n(n-1)}{2}$ piani inizialmente scelti, $n-j$ piani $\mathfrak{A}_i^{(j)}$ $(i = j, \dots, n-1)$. Analogamente a quanto abbiamo già fatto sopra per i piani $\mathfrak{A}_i^{(2)}$, fissiamo in ciascuno di questi nuovi piani due diversi sistemi, $\mathfrak{R}_1^{(j,i)}$ e $\mathfrak{R}_2^{(j,i)}$, di rette parallele in modo da fissare in $\mathfrak{A}_i^{(j)}$ un sistema di riferimento. Stabiliamo poi, per ogni i, due corrispondenze biunivoche, una, $\varphi_1^{(j,i)}$, fra le rette di $\mathfrak{K}_{j-1}$ e quelle di $\mathfrak{R}_1^{(j,i)}$, e una, $\varphi_2^{(j,i)}$, fra le rette di $\mathfrak{K}_i$ e quelle di $\mathfrak{R}_2^{(j,i)}$. Ad ogni punto $(Q_1, \dots, Q_{n-1})$ di $\mathfrak{M}_Z$ facciamo corrispondere $n-j$ punti, uno su ciascun piano $\mathfrak{A}_i^{(j)}$. Precisamente, mandata per Q_x $(x \geqslant j-1)$ la parallela q_x a k, a $(Q_1, \dots, Q_{n-1})$ associamo su $\mathfrak{A}_i^{(j)}$ il punto

$$Q_{j,i} = q_{j-1}\varphi_1^{(j,i)} \cap q_i\varphi_2^{(j,i)};$$

la retta q_{j-1} costituisce l'« ascissa » di $Q_{j,i}$.

Fissati $\mathfrak{M}_Z$, $Q_1, \dots, Q_{j-2}$, la corrispondenza così ottenuta fra i punti $(P_1, \dots, P_{n-1})$ di $\mathfrak{M}_Z$ per cui è $P_1 = Q_1, \dots, P_{j-2} = Q_{j-2}$ e le $(n-j)$-ple di punti $Q_{j,i}$, prese in modo che in una medesima $(n-j)$-pla tutti i punti abbiano la stessa ascissa, è biunivoca. Consideriamo allora un qualunque insieme $(g_{j,j}, \dots, g_{j,n-1})$ di $n-j$ rette $g_{j,i}$, con $g_{j,i} \in \mathfrak{A}_i^{(j)}$ e, se $n-j \geqslant 2$, $g_{j,i} \notin \mathfrak{R}_1^{(j,i)}$. L'immagine inversa, nella corrispondenza ora stabilita, dell'insieme formato da tutte le $(n-j)$-ple di punti $(Q_{j,j}, \dots, Q_{j,n-1})$, per cui risulta $Q_{j,i} \in g_{j,i}$ e che inoltre sono tali che i punti di una medesima $(n-j)$-pla hanno la stessa ascissa, costituisce una *retta di specie* j di $\mathfrak{S}$. L'insieme, $\mathfrak{C}^{(j)}$, di tutte le rette di specie j $(j > 2)$ si ottiene in corrispondenza di tutte le possibili scelte di $Z \in k$ e di $Q_1, \dots, Q_{j-2}$ con $Z(Q_1) = \dots = Z(Q_{j-2}) = Z$.

L'incidenza dei punti di $\mathfrak{B}$ con le rette di $\mathfrak{C}^{(j)}$ e il parallelismo fra le rette di $\mathfrak{C}^{(j)}$ si definiscono come nel caso $j = 2$.

Gli elementi dell'insieme:

$$\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}^{(1)} \cup \dots \cup \mathfrak{C}^{(n-1)}$$

con l'incidenza e il parallelismo sopra definiti soddisfano, senza eccezione [17]), ai postulati A1-A4 e quindi costituiscono un S-spazio $\mathfrak{S}$. Se s è finito da ogni punto di $\mathfrak{S}$ escono s^{n-j} rette di $\mathfrak{C}^{(j)}$, per $j = 1, \dots, n-2$, e $s+1$ rette di $\mathfrak{C}^{(n-1)}$. Il numero totale delle rette uscenti da un qualunque punto è allora

$$\frac{s^n - 1}{s - 1}$$

e quindi $\mathfrak{S}$ ha la dimensione n.

La costruzione data potrebbe essere « complicata », con procedimento analogo a quello indicato nel n. 8 per il caso $n = 3$, in modo da ottenere un S-spazio più generale.

Vediamo ora che cosa si può dire a proposito dei caratteri di regolarità inferiore dell'S-spazio $\mathfrak{S}$ ora costruito.

Si riconosce che è:

$$m_2 \geqslant \sum_{i=2}^{n} (i-1) s^{i-2} . \tag{10}$$

Infatti, scelto un punto di $\mathfrak{S}$, $P \sim (P_1, \dots, P_{n-1})$, cerchiamo di determinare quanti sono i piani che passano per esso. Cominciamo col ricercare i piani per P che non appartengono all'insieme $\mathfrak{M}_Z$, avendo posto $Z = Z(P_1)$.

Di tali piani ne esistono almeno $(n-1)s^{n-2}$. Per riconoscere ciò fissiamo $n-2$ rette, a_i $(i = 1, \dots, h-1, h+1, \dots, n-1)$, soddisfacenti alle condizioni $P_i \in a_i$, $a_i \notin \mathfrak{P}_i$ $(i \neq h)$. L'insieme di tutti i punti $Q \sim (Q_1, \dots, Q_{n-1})$ per cui risulta $Q_i \in a_i$ $(i \neq h)$ costituisce un piano isomorfo ad $\mathfrak{A}_h^{(1)}$. E in corrispondenza a tutte le possibili scelte delle $(n-2)$-ple di rette a_i soddisfacenti alle condizioni sopra dette, si ottengono proprio $(n-1)s^{n-2}$ piani.

Se in $\mathfrak{S}$ esiste un altro piano, α, per P, e i cui punti non appartengano tutti ad $\mathfrak{M}_Z$, si riconosce, con considerazioni del

---

[17]) Si osservi che attraverso il piano $\mathfrak{A}^{(n-1)}$ si giunge a definire non solo la congiungente di due punti (9) nell'ipotesi $j = n-1$, ma anche (in corrispondenza alle rette $g_{n-1,n-1}$ di $\mathfrak{R}^{(n-1,n-1)}$) la congiungente di due punti per cui risulti $P_1 = Q_1, \dots, P_{n-2} = Q_{n-2}$, $P_{n-1} \neq Q_{n-1}$.

tipo di quelle già svolte nel n. 7, che due almeno dei piani $\mathfrak{A}_h^{(1)}$ si corrispondono in un particolare isomorfismo e che α è isomorfo a questi.

Per questo, posto $Q^x \sim (Q_1^x, \ldots, Q_{n-1}^x)$, cominciamo col dimostrare che *se* Q^1, Q^2, Q^3 *sono tre punti non allineati di* α, *e se* Q_i^1, Q_i^2 Q_i^3 *sono allineati, la retta di questi contiene il punto* Q_i^x *corrispondente ad ogni altro punto* Q^x *del piano* α.

Intanto i tre punti $Z(Q_i^1)$, $Z(Q_i^2)$, $Z(Q_i^3)$ non possono essere tutti coincidenti, perchè altrimenti ne seguirebbe subito che tutti i punti di α appartengono ad $\mathfrak{M}_Z$; possiamo allora supporre, senza ledere la generalità, che sia $Z(Q_i^x) \neq Z(Q_i^1)$. Le rette Q^1Q^x e Q^2Q^3, essendo complanari, risultano o parallele o incidenti. Se sono parallele ed è $Z(Q_i^2) = Z(Q_i^3)$ ne segue $Z(Q_i^x) = Z(Q_i^1)$, contro l'ipotesi; se invece è $Z(Q_i^2) \neq Z(Q_i^3)$ segue che Q_i^x appartiene alla retta $Q_i^1Q_i^2Q_i^3$. Supponiamo allora che le rette Q^1Q^x e Q^2Q^3 siano incidenti in un punto, Q^4, di α. È allora $Q_i^4 \in Q_i^2Q_i^3$, e quindi o $Q_i^x \in Q_i^2Q_i^3$ oppure $Q_i^4 = Q_i^1$. In quest'ultimo caso però seguirebbe ancora $Q_i^1 = Q_i^x$ contro l'ipotesi. È così provato l'asserto.

Dalla proprietà ora dimostrata segue subito che se esistono su α due punti Q_i^x e Q_i^y con $Q_i^x = Q_i^y$, tutti i punti Q di α hanno il corrispondente Q_i su una stessa retta: precisamente se non tutti i punti di α appartengono ad $\mathfrak{M}_Z$, e $R \in \alpha$, con $Z(R_i) \neq Z(Q_i^x)$, si tratta della retta $Q_i^xR_i$.

Se per tutti i punti, Q, di α, in corrispondenza di ciascun valore di i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, uno solo eccettuato, risulta che i Q_i sono allineati, il piano α è uno degli $(n-1)s^{n-2}$ incontrati sopra.

Supponiamo quindi che esista un piano α per i cui punti, Q, risulti che nè tutti i Q_i, nè tutti i Q_j $(1 \leqslant i \neq j \leqslant n-1)$ sono su una stessa retta. Segue allora che per nessuna coppia, Q^h, Q^k, di punti di α può risultare $Q_i^h = Q_i^k$ oppure $Q_j^h = Q_j^k$. Allora se facciamo corrispondere, al variare di Q in α, i punti Q_i e Q_j, i piani $\mathfrak{A}_i^{(1)}$ e $\mathfrak{A}_j^{(1)}$ sono in corrispondenza biunivoca, e poichè è immediato che questa corrispondenza conserva gli allineamenti, ne segue che i piani $\mathfrak{A}_i^{(1)}$ e $\mathfrak{A}_j^{(1)}$ si corrispondono in un isomorfismo per il quale valgono proprietà analoghe alla *a*) e alla *b*) del n. 7. Quindi se fra nessuna coppia di piani $\mathfrak{A}^{(1)}$ esiste un tale isomorfismo, i piani per P e non appartenenti ad $\mathfrak{M}_Z$ sono proprio $(n-1)s^{n-2}$.

Determiniamo ora il numero dei piani che passano per P, e per tutti i punti dei quali risulta $Q_1 = P_1$, $Q_2 = P_2$, ..., $Q_{j-2} = P_{j-2}$, mentre esiste su essi almeno un punto tale che $Q_{j-1} \neq P_{j-1}$. Sia α un piano di questo tipo. Se $j \leqslant n-2$, facendo ricorso ai punti $Q_{j,i}$ che corrispondono sui piani $\mathfrak{A}_i^{(j)}$ ai punti di α, si può sviluppare un ragionamento analogo a quello ora effettuato e si riconosce che per P passano almeno $(n-j)s^{n-j-1}$ piani del tipo indicato. Se ve ne passa un numero maggiore due almeno dei piani $\mathfrak{A}_i^{(j)}$ sono legati da un isomorfismo che presenta particolarità analoghe a quello di cui sopra. Qualora invece sia $j = n-1$, si riconosce subito che per P passa un solo piano isomorfo ad $\mathfrak{A}^{(n-1)}$.

Concludendo, vale la (10) e, se i piani, $\mathfrak{A}^{(j)}$, che intervengono nella costruzione di $\mathfrak{S}$ non si corrispondono negli isomorfismi sopra indicati, nella (10) vale il segno uguale.

Inoltre se, per ogni valore di j, fra i piani $\mathfrak{A}^{(j)}$ se ne trova al più uno solo desarguesiano, risulta ovviamente che per $h > 2$ è $m_h = 0$.

11. - Sia $\mathfrak{S}$ un qualunque S-spazio tale che il numero dei punti di ciascuna sua retta sia finito (e risulti precisamente eguale ad s), e indichiamo con $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{C}$ gli insiemi costituiti rispettivamente dai punti e dalle rette di $\mathfrak{S}$.

Consideriamo poi un sottoinsieme $\mathfrak{B}'$ di $\mathfrak{B}$ e uno $\mathfrak{C}'$ di $\mathfrak{C}$. Per gli elementi di $\mathfrak{B}' \cup \mathfrak{C}'$ conserviamo le relazioni di incidenza e di parallelismo ($||$) definite in $\mathfrak{S}$. L'insieme $\mathfrak{B}' \cup \mathfrak{C}'$ viene così a costituire una struttura per cui valgono le seguenti proprietà:

*a*1) Dati due punti esiste al più una retta incidente con entrambi.

*a*2) Ogni retta è incidente con al più s punti.

*a*3) Se $a \,||\, b$ e $b \,||\, c$ allora risulta $c \,||\, a$. Per ogni retta a è $a \,||\, a$.

*a*4) Dati un punto, P, e una retta, r, per P passa al più una parallela ad r.

Consideriamo in generale due insiemi finiti, $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{R}$, privi di elementi a comune, chiamiamo punti gli elementi di $\mathfrak{P}$ e rette quelli di $\mathfrak{R}$. Siano poi definite una relazione di incidenza, I, in $\mathfrak{P} \times \mathfrak{R}$ e una relazione di parallelismo, $||$, in $\mathfrak{R}^2$.

Se per la struttura costituita dagli elementi di $\mathfrak{P} \cup \mathfrak{R}$, collegati dalle due relazioni, I e $||$, valgono le proposizioni $a1$-$a4$ elencate sopra, la struttura stessa verrà chiamata una *S-struttura affine*. In questa ogni retta di $\mathfrak{R}$ è incidente con un numero finito ($\leqslant s$) di punti; se vi è una retta incidente con h punti, mentre nessuna retta di $\mathfrak{R}$ è incidente con $h + 1$ punti, diremo che la S-struttura ha *ordine h.*

Come abbiamo osservato sopra, ogni sottoinsieme di un S-spazio, $\mathfrak{S}$, di ordine s, quando si conservino fra i suoi elementi le relazioni di incidenza e parallelismo definite in $\mathfrak{S}$, è una S-struttura affine di ordine $h \leqslant s$. Viceversa ogni S-struttura affine di ordine h può essere immersa in un S-spazio di ordine $s \geqslant h$. Basta per questo usare il procedimento che illustreremo qui di seguito e che è analogo a quello impiegato da M. Hall per mostrare che ogni struttura di incidenza può essere immersa in un piano proiettivo (cfr. [4] o anche [7]).

Sia $\mathfrak{A}$ una S-struttura affine di ordine h ($\leqslant s$) e indichiamo con $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{R}$ rispettivamente gli insiemi dei suoi punti e delle sue rette. Consideriamo le S-strutture affini definite induttivamente nel seguente modo:

$$A_0 = \mathfrak{A};$$

A_{n+1} si ottiene da A_n effettuando nell'ordine le seguenti aggiunzioni simboliche e accompagnando eventualmente queste con alcune delle identificazioni e modificazioni indicate qui di seguito in c) e d):

a) consideriamo un insieme, $\mathfrak{J}$, di raggruppamenti formati con i punti di $\mathfrak{P}$ e tali che:

in nessun raggruppamento esista una coppia di punti incidenti ad una stessa retta;

ogni coppia di punti di $\mathfrak{P}$ che non siano incidenti con una stessa retta appartenga ad uno ed un solo raggruppamento di $\mathfrak{J}$;

ogni raggruppamento consti di un numero di punti maggiore di uno e minore od uguale ad s.

Se la struttura A_n non è già essa stessa un S-spazio, esiste certamente almeno un insieme $\mathfrak{J}$ di raggruppamenti che soddisfano a queste condizioni. Si tratta precisamente dell'insieme $\mathfrak{J}$ costituito da tutte le coppie di punti di A_n che non hanno già in A_n una retta congiungente.

Fissato l'insieme $\mathfrak{J}$, per ogni raggruppamento di $\mathfrak{J}$ aggiungiamo una retta incidente con i soli punti del raggruppamento in questione, e indichiamo con $A_n^{(1)}$ l'S-struttura che si ottiene unendo agli elementi di A_n le rette ottenute in questo modo. Nell'insieme delle rette così ampliato si estende in modo ovvio la relazione di parallelismo stabilendo che ciascuna delle nuove rette è parallela a se stessa.

b) Su ogni retta di $A_n^{(1)}$ che contenga k ($< s$) punti aggiungiamo $s - k$ punti. Chiamiamo $A_n^{(2)}$ questa nuova S-struttura.

c) Scelti in $A_n^{(2)}$ degli insiemi di punti tali che in ciascun insieme non vi siano nè due punti appartenenti ad una medesima retta, nè due punti per i quali passino due rette parallele, identifichiamo in un unico punto tutti gli elementi di un medesimo di tali insiemi: si giunge così alla S-struttura $A_n^{(3)}$.

d) Se r e u sono due rette di $A_n^{(3)}$ tali che nessun punto di una qualunque parallela all'una sia incidente con una parallela all'altra, si può variare la relazione di parallelismo stabilendo che le rette r, u, le parallele ad r e le parallele ad u siano tutte parallele fra loro. Si ottiene così $A_n^{(4)}$.

e) Sia r una retta di $A_n^{(4)}$ e indichiamo con $\{r\}$ il sistema di tutte le rette di $A_n^{(4)}$ che sono parallele alla r. Per ogni coppia, P, $\{r\}$, di $A_n^{(4)}$ costituita da un sistema $\{r\}$ e da un punto P tale che non esista una retta per P parallela alla r, aggiungiamo una retta incidente con P e parallela a tutte le rette di $\{r\}$. Tale retta risulta per ora incidente solo con P, e nei confronti di essa la relazione di parallelismo viene naturalmente estesa in modo che continui a valere la $a3$. Si giunge così infine alla struttura A_{n+1}.

Ciascuna delle S-strutture affini che si ottengono in questo modo diremo che costituisce un'*estensione* (di ordine s) di $\mathfrak{A}$.

Se in a) ogni raggruppamento consta sempre esattamente di due punti, e inoltre non si effettuano nè l'identificazione di cui in c), nè la variazione di cui in d), le estensioni che si ottegono saranno dette *libere*.

Consideriamo ora la successione di S-strutture affini:

$$A_0 = \mathfrak{A}\,,\ A_1\,,\ \dots,\ A_n\,,\ \dots$$

ciascuna delle quali contiene la precedente. Proveremo qui di seguito che nella struttura:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{A}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

valgono gli assiomi A1-A4 di Sperner (cfr. n. 2), per cui $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ costituisce un S-spazio che si chiamerà un'estensione spaziale di ordine s di $\mathfrak{A}$.

La validità di A1 si riconosce come segue. Siano P e Q due punti distinti di $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$. Se P e Q appartengono ad $\mathfrak{A}$, ed esiste in $\mathfrak{A}$ una retta, PQ, incidente a P e Q, per il modo in cui sono state definite le successive estensioni di $\mathfrak{A}$ è ovvio che la retta incidente a P e Q esiste ed è unica anche in $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$. Qualora invece non si verifichi la circonstanza ora ammessa, si potrà determinare un valore minimo di n in corrispondenza al quale risulta che P e Q appartengono ad A_n. Il procedimento seguito per passare da A_n ad A_{n+1} porta che in A_{n+1}, e quindi anche in $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$, esiste (ed è unica) la retta congiungente P e Q. In ogni caso vale quindi A1.

Sia ora r una qualsiasi retta di $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$. Esiste un valore minimo n, per cui $r \in A_n$. Per l'aggiunzione simbolica effettuata in b) segue che la retta r nella struttura A_{n+1}, e quindi anche in $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$, è incidente con s punti. Ciò prova A2.

Poichè per la $\mathfrak{A}$ sussiste la $a3$, e per il modo come sono definite le strutture A_n, segue che in $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ è verificato anche il postulato A3.

Consideriamo infine un punto, P, ed una retta, r, di $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$. Se P ed r appartengono ad $\mathfrak{A}$ e in $\mathfrak{A}$ esiste una parallela ad r per P è ovvio che in $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ vale A4. Nel caso invece che ciò non accada esiste un valore minimo n, in corrispondenza del quale P ed r appartengono ad A_n. Allora se per P non passa una retta parallela ad r, in virtù dell'aggiunzione simbolica di cui in e), in A_{n+1}, e quindi anche in $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ esiste una retta che passa per P ed è parallela alla r, e questa risulta unica. Anche A4 vale cioè in ogni caso, e resta così provato che $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ è effettivamente un S-spazio.

Con la costruzione ora indicata si ottengono subito S-spazi per i quali risulta $M_2 = 0$ (cfr. n. 3). Basta per questo effettuare l'estensione libera di una S-struttura che non contenga nessun piano affine completo.

La costruzione indicata continua a valere se l'intero s invece di essere una costante, varia, al crescere di n, percorrendo una successione monotona crescente. Per esempio, nel passare da A_n ad A_{n+1}, si può imporre che, per $n > h$, risulti $s = n$. In tal modo si immerge l'S-struttura $\mathfrak{A}$ in un S spazio in cui il cardinale s è infinito.

BIBLIOGRAFIA

[1] Barlotti A.: *Una costruzione di una classe di spazi affini generalizzati*. Bollettino U.M.I., (3), 17, pp. 182-187, 1962.

[2] Campedelli L.: *Una visione sintetica proiettiva dei metodi descrittivi*. Periodico di Mat., (4), 24, pp. 10-19, 1946.

[3] Curzio M: *Una generalizzazione degli spazi di E. Sperner*. Liguori, Napoli, 1962.

[4] Hall M.: *Projective Planes*. Trans. Amer. Math. Soc., 54, pp. 229-277, 1943.

[5] Lombardo Radice L. e Dicuonzo V.: *Nuovi indirizzi algebrici nella fondazione della geometria*. Roma, 1963.

[6] Permutti R.: *Sugli spazi affini generalizzati di E. Sperner*. Ricerche di Mat., XI, pp. 95-102, 1962.

[7] Pickert G.: *Projective Ebenen*. Berlin, 1955.

[8] Sperner E.: *Affine Raume mit schwacher Inzidenz und zugehörige algebraische Strukturen*. J. fur reine u. angew. Math., 204, pp. 205-215, 1960.

[9] Sperner E.: *On non desarguesian geometries*. In corso di stampa.

[10] Zappa G.: *Reticoli e geometrie finite*. Lezioni raccolte da G. Zacher, Napoli, Liguori, 1952.