RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ARNO PREDONZAN

Sul quoziente di un anello di polinomi rispetto ad un suo ideale principale non associato ad uno pseudo cono

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 35, nº 1 (1965), p. 148-170

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_1_148_0>

SUL QUOZIENTE DI UN ANELLO DI POLINOMI RISPETTO AD UN SUO IDEALE PRINCIPALE NON ASSOCIATO AD UNO PSEUDO-CONO

Memoria *) *di* ARNO PREDONZAN (*a Trieste*) **)

1. - In un anello di polinomi $k[X_0, X_1, ..., X_r]$, nelle indeterminate $X_0, X_1, ..., X_r$, costruito sopra un corpo commutativo k, si consideri un ideale omogeneo $\mathfrak{A}$, completo ed assolutamente primo [1]). Indicato con k' un arbitrario sopracorpo di k, si consideri poi l'ideale omogeneo $\mathfrak{A}'$, generato da $\mathfrak{A}$ nell'anello di polinomi $k'[X_0, X_1, ..., X_r]$.

Qualora si dicano $\eta_0, \eta_1, ..., \eta_r$ le immagini delle classi delle X_0, $X_1, ..., X_r$ nell'omomorfismo canonico (suriettivo):

$$k'[X_0, X_1, ..., X_r] \rightarrow k'[X_0, X_1, ..., X_r]/\mathfrak{A}' ,$$

può porsi:

$$k'[X_0, X_1, ..., X_r]/\mathfrak{A}' = k'[\eta_0, \eta_1, .., \eta_r] ,$$

donde appare che il quoziente di $k'[X_0, X_1, .., X_r]$ rispetto ad $\mathfrak{A}'$ ha grado di trascendenza $d + 1$ su k', soddisfacente alla

---

*) Pervenuta in Redazione il 21 dicembre 1964.

Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica, Università, Trieste.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematica del Consiglio nazionale delle ricerche, (Gruppo di ricerca n. 33).

[1]) Un ideale $\mathfrak{A}$ di $k[X_0, X_1, ..., X_r]$, di cui sia G un sistema di generatori, dicesi *completo* se appartiene ad $\mathfrak{A}$ ogni polinomio di $k[X_0, X_1,...,X_r]$ che si annulli in tutti gli zeri del sistema G. L'ideale $\mathfrak{A}$ dicesi poi *assolutamente primo* se è primo non solo $\mathfrak{A}$, ma anche ogni ideale $\mathfrak{A}'$ generato da $\mathfrak{A}$ nell'anello di polinomi $k'[X_0, X_1, ..., X_r]$, costruito su un qualunque sopracorpo k' di k.

limitazione:

$$d + 1 \leq r + 1 .$$

In relazione ad un ideale $\mathfrak{A}$, del tipo inizialmente considerato, si presenta il problema di stabilire se esiste un opportuno sopracorpo k' di k, in guisa che si abbia:

$$\eta_i = f_i(v_0, v_1 .., v_d) , \qquad (i = 0, 1, .., r) ,$$

dove $v_0, v_1, ..., v_d$ sono elementi trascendenti su k' ed algebricamente indipendenti, ed $f_i(v_0, v_1, ..., v_d)$ polinomi omogenei, di uno stesso grado m, dell'anello $k'[v_0, v_1, ..., v_d]$.

Il problema suddetto, di carattere algebrico, si traduce in quello, geometrico, di stabilire se, su un opportuno sopracorpo k' di k, risulta unirazionale la k-varietà assoluta V_d, di dimensione d e di un certo ordine n, immersa in uno spazio proiettivo $P_r(K)$, di dimensione r su un sopracorpo algebricamente chiuso K di k, la quale abbia $\mathfrak{A}$ come ideale associato [2]).

Questo problema, di cui sino ad oggi si conoscono solo soluzioni parziali, e che escludono la considerazione di k-varietà V_d di tipo molto particolare, verrà qui affrontato nel caso $d = r - 1$, $n \geq 4$, cioè nel caso in cui V_d sia una k-ipersuperficie assoluta di $P_r(K)$, dell'ordine $n \geq 4$ [3]). Più precisamente nei nn. 9-12, poggiando su diversi risultati ottenuti nei nn. 3-8, si studierà il caso $d = r - 1$, $n = 4$, venendo a dimostrare la proposizione enunciata nel n. 2. Il n. 13 verrà invece riservato ad alcune considerazioni sul caso $d = r - 1$, $n \geq 5$.

Per quanto riguarda una k-ipersuperficie assoluta V_{r-1}, dell'ordine $n = 4$ di $P_r(K)$, la successiva ricerca verrà condotta in modo che:

a) resti provata l'esistenza di un intero r_0 e di una struttura geometrica elementare S tali che, per $r \geq r_0$, ogni V_{r-1}

---

[2]) Ved., ad es., P. Samuel, *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique*, Ergebnisse der Mathematik, Berlin, Springer, 1955.

[3]) Il problema in questione, nel caso $d = r - 1$, $n \leq 3$ è già completamente risolto.

del tipo suddetto, ma che non abbia la struttura S, risulti unirazionale su un sopracorpo k' di k;

b) la struttura S non sia ulteriormente semplificabile in maniera sostanziale;

c) in relazione a quasi ogni sottovarietà lineare bidimensionale P_2 di V_{r-1}, si abbia $k' = k(P_2)$ [4]);

d) il procedimento dimostrativo seguito sia estendibile — salvo un'opportuna generalizzazione della struttura S — al caso $n \geq 5$ [5]).

2. - Sia V_d un k-varietà assoluta di $P_r(K)$, di dimensione d. Sia poi R un insieme, normalmente algebrico su un sopracorpo (algebrico) k_R di k ed assolutamente irriducibile, i cui elementi siano sottovarietà W_m di V_d, aventi tutte una medesima dimensione m, $(0 \leq m \leq d)$; inoltre per ogni punto di V_d passi almeno una W_m di R: un tale insieme R verrà denominato *ricoprimento algebrico assoluto*, o più semplicemente *ricoprimento* di V_d. Se le W_m di R, uscenti da quasi ogni punto di V_d, sono in numero finito ν, si dirà che il ricoprimento R ha indice finito ν; altrimenti si dirà che R ha indice infinito.

Un ricoprimento R di V_d verrà detto *lineare*, quando le W_m risultano, in particolare, sottovarietà lineari P_m di V_d. Lo

---

[4]) Se W_m è una sottovarietà di una k-varietà V_d, con il simbolo $k(W_m)$ si vuol indicare la minima estensione del corpo k sulla quale W_m risulti normalmente algebrica.

[5]) Il problema dell'unirazionalità di una k-ipersuperficie assoluta V_{r-1}, dell'ordine $n = 4$ di $P_r(K)$, è già stato affrontato dall'A. in: *Su una generalizzazione di una proprietà relativa a ipersuperficie quadriche e cubiche*, Rend. del Sem. mat. di Padova, 1961. I risultati ottenuti in tale lavoro, pur soddisfacendo alla condizione a), non soddisfano però alle b), c); e così il procedimento dimostrativo seguito non può estendersi al caso $n \geq 5$, come vuole la condizione d). Nel successivo tentativo fatto dall'A. per soddisfare a quest'ultima condizione — cioè per trovare un procedimento dimostrativo che permettesse di estendere un risultato del tipo a) al caso $n \geq 5$ — si è soprattutto manifestato essenziale il verificarsi della condizione c): ed è appunto dalla ricerca di soddisfacimento di una tale condizione che ha tratto origine il presente lavoro.

stesso ricoprimento lineare R si dirà inoltre *massimale*, se quasi ogni P_m di R non è contenuta propriamente in alcuna sottovarietà lineare P_{m_1} di V_d, $(m < m_1)$.

Una sottovarietà lineare P_m di V_d, per la quale si abbia $m(P_m; V_d) = 1$ [6]), verrà detta *stazionaria* su V_d se, scelti comunque due punti x, y di P_m, semplici su V_d, risulta $P_d^{(x)} = P_d^{(y)}$, avendo indicato con $P_d^{(x)}$ e $P_d^{(y)}$ i due spazi lineari d-dimensionali tangenti a V_d rispettivamente in x ed y.

Un ricoprimento lineare R di V_d verrà detto, pur esso, *stazionario* su V_d, se risulta stazionaria su V_d quasi ogni sottovarietà lineare P_m di R.

Infine una k-varietà assoluta V_d di $P_r(K)$ verrà denominata *pseudo-cono*, se ammette un ricoprimento R, d'indice finito $\nu = 1$, di coni W_m (eventualmente riducibili), i cui vertici descrivano una sottovarietà lineare di V_d [7]).

Dopo aver dato queste definizioni, ci proponiamo di dimostrare la seguente proposizione:

Se $r \geq 12$, una qualunque k-ipersuperficie assoluta V_{r-1}, dell'ordine $n = 4$ di $P_r(K)$, che non sia uno pseudo- cono, risulta unirazionale sul corpo $k' = k(P'_2)$, essendo P'_2 un elemento, generico su k_R, di un ricoprimento lineare R di sottovarietà (lineari) bidimensionali della V_{r-1} stessa [8]).

Si osservi che la condizione $r \geq 12$ comporta che per ogni punto della V_{r-1} passi almeno una sottovarietà lineare unidimensionale P_1 della V_{r-1} medesima, e per ogni P_1 passi almeno

---

[6]) Con il simbolo $m(W_m; V_d)$ si indica, di consueto, la molteplicità (assoluta) su una k-varietà V_d di una sua sottovarietà (assoluta) W_m. Ne viene che se $m(W_m; V_d) = 1$, la sottovarietà W_m è (assolutamente) semplice su V_d.

Nel seguito, per molteplicità e, in particolare, per semplicità su V_d di una sottovarietà W_m, intenderemo sempre molteplicità e semplicità assolute.

[7]) Appare ovvio che se la k-varietà V_d è un cono, essa è anche un particolare pseudo-cono.

[8]) La proposizione, ora enunciata, garantisce la validità delle condizioni *a*), *c*), di cui alla fine del n. 1. La validità delle *b*), *d*) apparirà invece dalle successive considerazioni fatte nei nn. 11, 13.

una sottovarietà lineare bidimensionale P_2 [9]): la V_{r-1} possiede perciò almeno un ricoprimento lineare R_1 di rette, ed almeno un ricoprimento lineare R_2 di piani, che sia un sopraricoprimento del ricoprimento R_1.

Nel seguito si farà l'ipotesi che il corpo k, su cui sono normalmente algebriche le V_{r-1} di $P_r(K)$, che si verranno a considerare, abbia caratteristica $p = 0$. Si supporrà inoltre — il che non è affatto restrittivo — che K sia *dominio universale* su k: e perciò ciascuna V_{r-1} sarà dotata di *punto generico* su k; ed ogni ricoprimento R di una tale V_{r-1} sarà dotato di *elemento* (sottovarietà) *generico* su k_R.

3. - Per giungere a dimostrare la proposizione enunciata nel n. 2, cominciamo col provare il seguente

LEMMA I. - *Se una k-ipersuperficie assoluta V_{r-1}, dell'ordine $n = 4$ di $P_r(K)$, $(r \geq 6)$, che non sia un cono, ammette un ricoprimento lineare massimale stazionario R di sottovarietà (lineari) m-dimensionali, con $2 \leq m \leq r - 3$, e se (P'_m, P''_m) è un elemento di $R \times R$, generico su k_R, l'intersezione $P_h = P'_m \cap P''_m$ ha dimensione h soddisfacente alla limitazione $h \leq m - 3$.*

Per un ricoprimento R, del tipo suddetto, non può ovviamente risultare $h = m - 1$ perchè, in tale caso, le sottovarietà lineari P_m di R o passerebbero tutte per uno stesso spazio lineare $(m - 1)$-dimensionale P_{m-1}, ed allora V_{r-1} sarebbe un cono, oppure apparterrebbero tutte ad un medesimo spazio $(m + 1)$-dimensionale P_{m+1}, il che appare assurdo.

Resta perciò solo da escludere l'ulteriore caso $h = m - 2$. Esso comporta il verificarsi di almeno una delle seguenti eventualità [10]):

a) le sottovarietà P_m di R passano per uno stesso spazio P_{m-2};

---

[9]) Ved. B. SEGRE, *Intorno agli S_k che appartengono alle forme generali di dato ordine,* Rend. Acc. naz. dei Lincei, 1948.

[10]) Ved. U. MORIN, *Sui sistemi di S_k a due a due incidenti e sulla generazione proiettiva di alcune varietà algebriche,* Atti dell'Ist. veneto di scienze lettere ed arti, 1942.

b) le sottovarietà P_m di R appartengono ad uno stesso spazio P_{m+2}, $(m+2 \leq r-1)$;

c) le sottovarietà P_m di R proiettano da un P_{m-3}, $(m \geq 3)$, un insieme algebrico assolutamente irriducibile di piani, a due a due incidenti in un punto, di uno spazio P_5, complementare del considerato P_{m-3};

d) le sottovarietà P_m di R intersecano uno spazio fisso P^*_m secondo spazi P_{m-1}.

Le eventualità *a*), *b*), *c*) appaiono subito escluse dalle ipotesi del Lemma. Basta perciò ancora provare che, dalle stesse ipotesi, resta esclusa anche l'eventualità *d*).

A tale scopo si consideri uno spazio P_3, generico sopra $k(P^*_m)$ nel sistema degli spazi lineari tridimensionali di $P_r(K)$ che si appoggiano a P^*_m secondo una retta l (variabile con P_3). Il divisore positivo $V_2 = V_{r-1} \cdot P_3$ di P_3 è una superficie del quarto ordine, assolutamente irriducibile, di cui sia x un punto generico su $k(V_2)$.

Dal punto x esce una sottovarietà lineare stazionaria P_m del ricoprimento R di V_{r-1}, la quale interseca la retta l in un punto y. Ne viene che la retta g, congiungente i due punti x ed y, appartiene a V_2 ed è per la V_2 una retta stazionaria, dal che discende che V_2 è una rigata sviluppabile. Dall'ipotesi che V_{r-1} non sia un cono segue poi facilmente che, in corrispondenza alle specializzazioni di x su $k(V_2)$, il punto y varia su l, e perciò le generatrici (stazionarie) della rigata sviluppabile V_2 si appoggiano tutte alla retta l in un punto y con esse variabile, il che, notoriamente, non può avvenire [11]). Tanto basta perchè resti provata la validità del Lemma I, sopra enunciato.

4. - Dimostreremo ora il seguente

LEMMA II. - *Una k-ipersuperficie assoluta V_{r-1}, dell'ordine $n = 4$ di $P_r(K)$, che non sia un cono di vertice P^*_{r-3}, $(r \geq 3)$, e che ammetta un ricoprimento lineare stazionario R (necessaria-*

---

[11]) Si ricordi che una rigata sviluppabile del quarto ordine, di uno spazio proiettivo tridimensionale, che non sia un cono, è necessariamente il luogo delle tangenti ad una cubica gobba.

mente massimale) di sottovarietà (lineari) P_{r-2}, *è razionale sul corpo* $k(x)$, *con* x *punto generico di* V_{r-1} *su* k.

Dall'ipotesi che V_{r-1} non sia un cono di vertice P^*_{r-3}, e dal fatto che la stessa V_{r-1} ammette un ricoprimento R del tipo suddetto, discende che il ciclo $V_2 = V_{r-1} \cdot P_3$ — intersezione prodotto di V_{r-1} con uno spazio P_3, generico su $k(x)$ nella stella T degli spazi lineari tridimensionali di $P_r(K)$ uscenti da x — è una rigata sviluppabile del quarto ordine, non cono, e perciò luogo delle tangenti ad una cubica gobba Γ.

Se g è la generatrice di V_2 uscente da x, quasi ogni piano P_2 di P_3 per g interseca V_2 secondo un ciclo $V_2 \cdot P_2$, di cui una componente (semplice) è g, e l'altra è una cubica piana assolutamente irriducibile C, per la quale — in quanto risulta $m(\Gamma; V_2) = 2$ — ha molteplicità due l'unico punto in cui il piano P_2 interseca Γ fuori di g: una tale C è perciò razionale su $k(C)$.

Attesa la genericità su $k(x)$ dello spazio P_3 di T, da quanto precede — ed appena si ponga $k_1 = k(g)$ — discende che un piano P_2, supposto ora generico su k_1 nella stella $(r-2)$-dimensionale dei piani di $P_r(K)$ per g, sega pur esso V_{r-1}, oltre che in g, in una cubica piana C, razionale su $k_1(C)$.

Una tale C descrive, in corrispondenza alle specializzazioni di P_2 su k_1, un ricoprimento $(r-2)$-dimensionale R_C di V_{r-1}, razionale su k_1, e d'indice uno, il che permette di affermare — a norma d'una nota condizione d'unirazionalità [12]) — che V_{r-1} è razionale su $k_1 = k(g)$.

Per concludere come enunciato all'inizio di questo n., basta ancora far vedere che si può scegliere la suddetta generatrice g in guisa che si abbia $k(g) = k(x)$. Ciò appare possibile appena

---

[12]) La condizione d'unirazionalità a cui si fa riferimento, [ved., ad es., A. PREDONZAN, loc. cit. in nota [5])], può così enunciarsi:

Se una k*-varietà assoluta* V_d, *di dimensione* d *di* $P_r(K)$, *ammette un ricoprimento* $(d-m)$*-dimensionale* R, *d'indice finito* $\nu \geq 1$, *di sottovarietà assolute* W_m, *il quale sia unirazionale su* k_R, *e se una* W_m, *generica di* R *su* k_R, *è unirazionale su* $k_R(W_m)$, *allora* V_d *è unirazionale su* k_R. *La stessa* V_d *è poi, in particolare, razionale su* k_R, *se* R *è razionale su* k_R *ed ha indice* $\nu = 1$, *ed inoltre se la* W_m, *generica di* R *su* k_R, *è razionale su* $k_R(W_m)$.

si osservi che da x esce una sola sottovarietà lineare P_{r-2} di V_{r-1} [13]), e perciò tale P_{r-2} è normalmente algebrica sul corpo $k(x)$: basta allora scegliere come generatrice g una retta di P_{r-2} che passi per x e sia pur essa normalmente algebrica su $k(x)$, il che può sempre farsi.

5. - Ci proponiamo ora di provare il seguente

LEMMA III. - *Sia V_{r-1} una k-ipersuperficie assoluta, dell'ordine $n = 4$ di $P_r(K)$, non cono, la quale ammetta (almeno) un ricoprimento lineare di sottovarietà (lineari) bidimensionali, e sia tale che ogni suo ricoprimento lineare sia stazionario. Sia poi R uno, massimale, di questi ricoprimenti, e si dica P'_m un elemento di R, generico su k_R. Si supponga infine che il ciclo $V'_{r-2} = V_{r-1} \cdot P'_{r-1}$, intersezione prodotto di V_{r-1} con l'iperpiano P'_{r-1}, tangente a V_{r-1} in un punto x' di P'_m, semplice su V_{r-1}, sia un'ipersuperficie assoluta del quarto ordine.*

Sotto queste ipotesi, il ciclo del secondo ordine $Q_m = V'_{r-2} \cdot P_{m+1} - - 2P'_m$, dove P_{m+1} è uno spazio lineare, generico su $k(P'_m)$ nella stella degli spazi lineari $(m+1)$-dimensionali di P'_{r-1} uscenti da P'_m, è un cono di vertice P^*_s, con $m - 2 \leq s \leq m - 1$ [14]).

Per dimostrare quanto ora enunciato, basta provare che l'intersezione del considerato Q_m con quasi ogni P_3 di P_{m+1} è una quadrica Q_2, che risulta un cono di vertice un punto o una retta, nel secondo caso Q_2 essendo riducibile in due piani su un sopracorpo (algebrico) di $k(Q_2)$.

Si consideri, a questo scopo, un punto x di una tale Q_2, generico su $k(Q_2)$, e si dica g una retta di Q_2 uscente da x. La g è — per le ipotesi del Lemma — retta stazionaria su V_{r-1}, cioè

---

[13]) Dal punto x di V_{r-1}, generico su k, esce una sola sottovarietà lineare P_{r-2} di V_{r-1} perchè, se così non fosse, la rigata sviluppabile V_2, intersezione di V_{r-1} con quasi ogni P_3 di $P_r(K)$ per x, avrebbe più di una generatrice (stazionaria) uscente da x, il che è manifestamente assurdo.

[14]) Si noti che, dalla stazionarietà di P'_m su V_{r-1}, discende $m(P'_m; V'_{r-2}) = 2$, e perciò il ciclo $V'_{r-2} \cdot P_{m+1}$ ha P'_m come componente lineare di molteplicità due.

l'iperpiano $P^{(x)}_{r-1}$, tangente a V_{r-1} in x, non varia al variare di x su g.

Poichè lo spazio ambiente P_3 della quadrica Q_2 non giace su $P^{(x)}_{r-1}$, (se così fosse $P^{(x)}_{r-1}$ dovrebbe passare per P'_m, il che appare assurdo), il piano tangente a Q_2 in x è l'intersezione $P^{(x)}_{r-1} \cap P_3$, ed esso dunque non varia, al variare di x su g: la retta g è perciò stazionaria su Q_2, donde deriva che Q_2 è un cono o una coppia di piani [15]).

6. - Andiamo infine a constatare la validità del seguente

LEMMA IV. - *Nelle ipotesi del Lemma III, e supposto inoltre $m \leq r - 3$, $r \geq 6$, da ogni punto z di P'_m, semplice su V_{r-1}, esce almeno una retta l giacente su V'_{r-2}, ma non su P'_m.*

Per giungere a questo risultato si consideri, oltre a P'_m, un ulteriore elemento P''_m di R, in guisa che la coppia (P'_m, P''_m) sia elemento di $R \times R$, generico su k_R.

A norma del Lemma I, si ha che $P_h = P'_m \cap P''_m$ ha dimensione h soddisfacente alla limitazione $h \leq m - 3$.

Siano P'_{r-1} e P''_{r-1} gli iperpiani tangenti a V_{r-1}, rispettivamente in x' ed x'', essendo x' ed x'' due punti, semplici su V_{r-1}, appartenenti l'uno a P'_m e l'altro a P''_m. Risulta ovviamente $P'_{r-1} \neq P''_{r-1}$, ed inoltre $P'_m \subset P'_{r-1}$, $P''_m \subset P''_{r-1}$, ma $P'_m \not\subset P''_{r-1}$, $P''_m \not\subset P'_{r-1}$.

Posto $P^*_{m-1} = P'_m \cap P''_{r-1}$, si dica z un punto di P^*_{m-1}, non appartenente a P''_m e semplice su V_{r-1} [16]). Lo spazio $P^{(z)}_{m+1}$, congiungente z con P''_m, non può appartenere, per la massimalità di R, alla $V''_{r-2} = V_{r-1} \cdot P''_{r-1}$; si ha perciò — a norma del Lemma III — che il ciclo del secondo ordine $Q^{(z)}_m = V''_{r-2} \cdot P^{(z)}_{m+1} - 2P''_m$ è un

---

[15]) Il divisore positivo Q_2 di P_3 non può essere dotato di una sola componente lineare di molteplicità due perchè, in tale caso, anche Q_m sarebbe un divisore di P_{m+1} con una sola componente di molteplicità due: P'_{r-1} risulterebbe allora tangente a V_{r-1} in ogni punto di V'_{r-2}, semplice su V_{r-1}, il che è in contrasto con l'ipotesi che V'_{r-2} sia un'iperficie assoluta del quarto ordine.

[16]) Si osservi che quasi ogni punto z di P^*_{m-1} non appartiene a P''_m ed è semplice su V_{r-1}: e ciò a norma della $P'_m \cap P''_m = P_h$, con $h \leq m - 3$, e della genericità su k_R dell'elemento P'_m di R, la quale comporta $m(P'_m; V_{r-1}) = 1$.

cono, passante per z, il cui vertice è uno spazio P_s^*, con s soddisfacente alle limitazioni $m - 2 \leq s \leq m - 1$.

Se $P_s^* \not\subset P'_m$, la retta l congiungente z con un qualunque punto di P_s^*, non appartenente a P'_m, giace su Q''_m, quindi su V_{r-1}, e perciò (per la semplicità di z sopra V_{r-1}) su V'_{r-2}, ma non su P'_m.

Se invece $P_s^* \subset P'_m$ — appena si ponga $P^{(z)}_{h+1} = P^{(z)}_{m+1} \cap P'_m$ (essendo h la dimensione dello spazio $P_h = P'_m \cap P''_m$) — dalla $P_s^* \subset P^{(z)}_{m+1}$ segue $P_s^* \subset P^{(z)}_{h+1}$, e quindi — avuto riguardo alle $h \leq m - 3$, $s \geq m - 2$ — $P_s^* = P^{(z)}_{h+1}$; e poichè $z \in P^{(z)}_{h+1}$, si ha $z \in P_s^*$: z è cioè un punto del vertice del cono $Q^{(z)}_m$, il che basta per affermare che da z esce (almeno) una retta l giacente su V'_{r-2}, ma non su P'_m.

Per concludere come inizialmente enunciato, basta ancora constatare che i punti di P^*_{m-1} descrivono, in corrispondenza alle specializzazioni di P''_m su k_R, tutta la sottovarietà lineare P'_m: e infatti, se così non fosse, l'intersezione $P^*_{m-1} = P'_m \cap P''_{r-1}$ rimarrebbe fissa per quasi tutte le suddette specializzazioni, e quindi tutti gli iperpiani tangenti a V_{r-1} passerebbero per P^*_{m-1}, il che comporterebbe che V_{r-1} sia un cono.

7. - Poggiando sui Lemmi, di cui ai nn. 3-6, ci proponiamo ora di dimostrare il seguente

TEOREMA. - *Una k-ipersuperficie assoluta, dell'ordine $n = 4$ di $P_r(K)$, ($r \geq 6$), non cono, la quale ammetta almeno un ricoprimento lineare di sottovarietà (lineari) bidimensionali, e sia tale che ogni suo ricoprimento lineare risulti stazionario, è razionale sul corpo $k(x)$, essendo x un punto generico di V_{r-1} su k.*

Indicato con $P^{(x)}_{r-1}$ l'iperpiano tangente a V_{r-1} in x, si consideri il ciclo $V^{(x)}_{r-2} = V_{r-1} \cdot P^{(x)}_{r-1}$, del quarto ordine e di dimensione $r - 2$, intersezione prodotto di V_{r-1} con $P^{(x)}_{r-1}$.

Si faccia, *in primo luogo*, l'ipotesi che $V^{(x)}_{r-2}$ abbia una componente lineare $P^{(x)}_{r-2}$.

Poichè si è supposto (n. 2) che il corpo k sia di caratteristica $p = 0$, la componente $P^{(x)}_{r-2}$ di $V^{(x)}_{r-2}$ varia su V_{r-1} in corrispondenza alle specializzazioni di x su k, e perciò descrive sulla V_{r-1} stessa un ricoprimento lineare, R, di sottovarietà (lineari) $(r - 2)$-dimensionali: se infatti così non fosse, gli iperpiani tangenti a V_{r-1} passerebbero tutti per $P_{r-2}^{(x)}$, il che, per le ipotesi del Teorema, è manifestamente assurdo [17]).

Il ricoprimento R, ultimo considerato, è, per ipotesi, stazionario, donde segue, a norma del Lemma II, la razionalità su $k(x)$ della V_{r-1}, non cono.

Si faccia, *in secondo luogo*, l'ipotesi che il ciclo $V_{r-2}^{(x)}$ abbia una componente (assoluta) $Q_{r-2}^{(x)}$, del secondo ordine, ma sia privo di componenti del primo ordine. Si ha allora $V_{r-2}^{(x)} = Q_{r-2}^{(x)} + \overline{Q}_{r-2}^{(x)}$, con $Q_{r-2}^{(x)} \neq \overline{Q}_{r-2}^{(x)}$; cioè $V_{r-2}^{(x)}$ ha un'ulteriore componente (assoluta) $\overline{Q}_{r-2}^{(x)}$, del secondo ordine [18]): e le due componenti $Q_{r-2}^{(x)}$, $\overline{Q}_{r-2}^{(x)}$ descrivono, in corrispondenza alle specializzazioni di x su k, tutta la k-ipersuperficie V_{r-1}. Ne viene che quasi ogni sottospazio lineare tridimensionale P_3 di $P_r(K)$ interseca V_{r-1} in una superficie assoluta V_2, del quarto ordine, le cui sezioni con i piani tangenti sono coppie di coniche: V_2 è perciò una superficie (di STEINER) dotata di tre rette doppie per un punto triplo. Ne consegue che V_{r-1} è dotata di tre sottovarietà $(r-2)$-dimensionali, doppie su V_{r-1}, che passano per una sottovarietà lineare $(r-3)$-dimensionale $\overline{P}_{r-3}$, tripla su V_{r-1} [19]). Una tale V_{r-1} — ovviamente razionale su k — non soddisfa però alle ipotesi del Teorema, in quanto il suo ricoprimento $\overline{R}$, costituito dalle sottovarietà lineari $P_{m-3} = V_{r-1} \cdot P_{r-2} - 3\overline{P}_{r-3}$, ottenute in corrispondenza ai sottospazi P_{r-2} di $P_r(K)$ che passano

---

[17]) Se $p > 0$, e più precisamente se $p = 2$ o $p = 3$, può avvenire che gli iperpiani tangenti ad una k-ipersuperficie assoluta V_{r-1}, dell'ordine $n = 4$, passino tutti per una medesima sottovarietà lineare P_{r-2} della V_{r-1} stessa. Infatti, ad es., se $p = 2$ ed $r = 2$, le tangenti alla curva di equazione $X_1^3 X_2 - X_0^2(X_1^2 + X_2^2)$ passano tutte per il punto $(1, 0, 0)$; ed analogamente avviene, se $p = 3$ ed $r = 2$, per la curva di equazione $X_1^4 - X_0^3 X_2$.

[18]) È immediato constatare che, per la genericità di x su k, non può verificarsi il caso $V_{r-2}^{(x)} = 2Q_{r-2}^{(x)}$.

[19]) Qualora gli ideali associati alle tre sottovarietà lineari doppie siano (X_{r-1}, X_r), (X_{r-2}, X_r), (X_{r-2}, X_{r-1}), e quindi quello associato alla sottovarietà lineare tripla $\overline{P}_{r-3}$ sia (X_{r-2}, X_{r-1}, X_r), l'equazione di una tale V_{r-1} può scriversi nella forma:

$$a_{r-2}X_{r-1}^2 X_r^2 + a_{r-1}X_{r-2}^2 X_r^2 + a_r X_{r-2}^2 X_{r-1}^2 + \\ + X_{r-2}X_{r-1}X_r(b_0 X_0 + b_1 X_1 + \ldots + b_r X_r) \, .$$

per $\overline{P}_{r-3}$, non può, ovviamente risultare stazionario. Si conclude che l'ipotesi $V^{(x)}_{r-2} = Q^{(x)}_{r-2} + \overline{Q}^{(x)}_{r-2}$ non può verificarsi.

Si faccia, *infine*, l'ipotesi che il ciclo $V^{(x)}_{r-2}$ abbia una sola componente (assoluta) del quarto ordine; $V^{(x)}_{r-2}$ sia cioè un'ipersuperficie del quarto ordine, assolutamente irriducibile.

Indicato con R^* un ricoprimento lineare (stazionario) massimale di V_{r-1}, normalmente algebrico su k_{R^*}, si consideri un elemento (sottovarietà lineare) $P^{(x)}_m$ di R^*, generico su $k_{R^*}(x)$ nell'insieme dei P_m di R^* uscenti da x. Risulta ovviamente, $P^{(x)}_m \subset P^{(x)}_{r-1}$, ed inoltre $m(P^{(x)}_m \,;\, V^{(x)}_{r-2}) = 2$.

Poichè $P^{(x)}_m$ è stazionario su V_{r-1}, esiste un divisore positivo $W^{(x)}_{m-1}$ di $P^{(x)}_m$, dell'ordine tre e di dimensione $m-1$, per cui si ha $m(Supp.(W^{(x)}_{m-1});\ V_{r-1}) \geq 2$, il simbolo $Supp.(W^{(x)}_{m-1})$ stando ad indicare il supporto di $W^{(x)}_{m-1}$; inoltre ogni punto di $P^{(x)}_m$, non appartenente a $Supp.(W^{(x)}_{m-1})$, è semplice su V_{r-1}, (ved. il successivo n. 8).

Sia P_{m+1} uno spazio lineare, generico su $k(P^{(x)}_m)$ nella stella T degli spazi lineari $(m+1)$-dimensionali di $P^{(x)}_{r-1}$ uscenti da $P^{(x)}_m$.

A norma del Lemma III, il ciclo $Q_m = V^{(x)}_{r-2} \cdot P_{m+1} - 2P^{(x)}_m$ è un cono del secondo ordine, di vertice P^*_s, con s soddisfacente alla $m-2 \leq s \leq m-1$.

Distingueremo due casi, a seconda che si abbia $P^*_s \subset P^{(x)}_m$, oppure $P^*_s \not\subset P^{(x)}_m$.

a) $P^*_s \subset P^{(x)}_m$. — Cominciamo con l'osservare che deve essere $P^*_s \subset Supp.(W^{(x)}_{m-1})$. Se infatti così non fosse, da ogni punto y di Q_m, non appartenente a P^*_s, uscirebbe (almeno) una retta g, giacente su Q_m ed intersecante $P^{(x)}_m$ in un punto z, non situato su $Supp.(W^{(x)}_{m-1})$ e quindi semplice su V_{r-1}. La retta g, per le ipotesi del Teorema, risulterebbe stazionaria su V_{r-1}, e perciò — ove si indichino con $P^{(y)}_{r-1}$ e $P^{(z)}_{r-1}$ gli iperpiani tangenti a V_{r-1} rispettivamente in y e z, e si ricordi che $P^{(x)}_{r-1}$ indica l'iperpiano tangente a V_{r-1} in x — si avrebbe $P^{(y)}_{r-1} = P^{(z)}_{r-1} = P^{(x)}_{r-1}$: l'iperpiano $P^{(x)}_{r-1}$ sarebbe, di conseguenza, tangente a V_{r-1} in ogni punto di $V^{(x)}_{r-2}$, semplice su V_{r-1}, il che comporterebbe $m(Supp.(V^{(x)}_{r-2});\ V_{r-1}) \geq 2$, contro l'ipotesi che $V^{(x)}_{r-2}$ sia un'ipersuperficie assoluta del quarto ordine.

Distingueremo ora due sottocasi del caso a), a seconda che sia $s = m - 1$, oppure $s = m - 2$.

a_1) $s = m - 1$. In questo sottocaso, tenuto conto della $P_s^* \subset Supp. (W_{m-1}^{(x)})$, si vede che P_s^* non può variare su $P_m^{(x)}$, al variare di P_{m+1} nella stella T, dal che segue che $V_{r-2}^{(x)}$ è un cono di vertice P_s^*.

Quasi ogni sottovarietà lineare, $P_m^{(y)}$, di R^* interseca $P_{r-1}^{(x)}$ secondo un spazio lineare $\overline{P}_{m-1} \subset V_{r-2}^{(x)}$.

Se per quasi ciascuno di questi $\overline{P}_{m-1}$ risulta $\overline{P}_{m-1} = P_s^*$, la k-ipersuperficie V_{r-1} è un cono, il che deve escludersi per le ipotesi del Teorema.

Se invece $\overline{P}_{m-1} \neq P_s^*$ — appena si tenga conto che un tale $\overline{P}_{m-1}$ deve appartenere ad un P_m generatore del cono $V_{r-2}^{(x)}$ — deve aversi $\overline{P}_{m-1} \cap P_s^* = P_{m-2}$, e perciò $P_m^{(x)} \cap P_m^{(y)} = P_{m-2}$, in contrasto con quanto stabilito nel Lemma I [20]).

a_2) $s = m - 2$. Nel sottocaso in questione, il vertice P_s^* di Q_m può, al variare di P_{m+1} nella stella T, restare fisso, oppure variare su $P_m^{(x)}$, sempre però soddisfacendo alla $P_s^* \subset Supp. (W_{m-1}^{(x)})$.

Nella prima eventualità, [P_s^* fisso], $V_{r-2}^{(x)}$ è un cono di vertice P_s^*, e quindi luogo di P_{m-1} per P_s^*. E poichè quasi tutti i P_m di R^* intersecano $P_{r-1}^{(x)}$ secondo spazi P_{m-1}, tali P_{m-1} debbono essere spazi generatori del cono $V_{r-2}^{(x)}$, e quindi passare per P_s^*, donde segue che anche V_{r-1} è un cono, il che resta escluso dalle ipotesi del Teorema.

Nella seconda eventualità, [P_s^* variabile su $Supp. (W_{m-1}^{(x)})$], V_{r-1} viene ad essere luogo di P_m stazionari (quelli del ricoprimento massimale R^*), che si appoggiano tutti, secondo un $P_s^* = P_{m-2}^*$, variabile con essi, ad una componente, dell'ordine $n_1 \leq 3$ e multipla su V_{r-1} [21]), del divisore positivo $W_{m-1}^{(x)}$ di $P_m^{(x)}$: ed una tale ipersuperficie del quarto ordine, come è facile constatare, non può esistere [22]).

---

[20]) Si noti che l'ipotesi che $V_{r-2}^{(x)}$ sia un'ipersuperficie del quarto ordine, assolutamente irriducibile, comporta $m \leq r - 3$, come voluto dal Lemma I.

[21]) Si ricordi che $m(Supp. (W_{m-1}^{(x)}); V_{r-1}) \geq 2$.

[22]) Basta, a questo scopo, osservare che sulla componente di $W_{m-1}^{(x)}$, su cui varia P_s^*, devono necessariamente giacere una o più rette. Det

b) $P_s^* \not\subset P_m^{(x)}$. — Posto $Q_{m-1} = Q_m \cdot P_m^{(x)}$, si osservi che deve risultare $Q_{m-1} \subset Supp.\ (W_{m-1}^{(x)})$. Se infatti così non fosse, lo spazio $P_{s+1}^{(y)}$, congiungente P_s^* con un punto y di Q_m, generico su $k(Q_m)$, avrebbe a comune con $P_m^{(x)}$ (almeno) un punto z, semplice su V_{r-1}. Ne verrebbe — per la supposta stazionarietà su V_{r-1} di $P_m^{(x)}$ e di $P_{s+1}^{(y)}$, ed appena si indichino con $P_{r-1}^{(y)}$ e $P_{r-1}^{(z)}$ gli iperpiani tangenti a V_{r-1} rispettivamente in y e z — $P_{r-1}^{(y)} = P_{r-1}^{(z)} = P_{r-1}^{(x)}$: l'iperpiano $P_{r-1}^{(x)}$, tangente a V_{r-1} in x, sarebbe, di conseguenza, tangente a V_{r-1} in ogni punto di $V_{r-2}^{(x)}$, semplice su V_{r-1}, il che comporterebbe $m(Supp.\ (V_{r-2}^{(x)});\ V_{r-1}) \geq 2$, in contrasto con l'ipotesi che $V_{r-2}^{(x)}$ sia un'ipersuperficie assoluta del quarto ordine.

Dalla $Q_{m-1} \subset Supp.\ (W_{m-1}^{(x)})$ discende che il divisore positivo, del secondo ordine, Q_{m-1} di $P_m^{(x)}$ non può variare, al variare di P_{m+1} nella stella T.

Se z è un punto di $P_m^{(x)}$, semplice su V_{r-1}, (e quindi $z \notin Q_{m-1}$), esiste — a norma del Lemma IV — (almeno) una retta l, uscente da z e giacente su $V_{r-2}^{(x)}$, ma non su $P_m^{(x)}$. Lo spazio P'_{m+1}, congiungente $P_m^{(x)}$ con l, non è, per la massimalità del ricoprimento R^*, una sottovarietà lineare di $V_{r-2}^{(x)}$, e perciò $Q'_m = V_{r-2}^{(x)} \cdot P'_{m+1} - 2P_m^{(x)}$ è un divisore, del secondo ordine, di P'_{m+1}. Dovendo, per quanto sopra, Q'_m contenere il già considerato divisore, del secondo ordine, Q_{m-1} di $P_m^{(x)}$, e dovendo inoltre Q'_m passare anche per il punto z di $P_m^{(x)}$, con $z \notin Q_{m-1}$, deve aversi $Q'_m = P_m^{(x)} + P'_m$, essendo P'_m una componente lineare *semplice* di Q'_m, contenente l, $(P'_m \neq P_m^{(x)};\ l \not\subset P_m^{(x)})$, il che comporta $m(l;\ Q'_m) = 1$, e quindi $m(l;\ V_{r-2}^{(x)}) = 1$.

La retta l, semplice su V_{r-1}, appartiene chiaramente ad un ricoprimento lineare di V_{r-1}, ed è quindi, per ipotesi, stazionaria su V_{r-1}. Ne viene che, detto y un punto di l, generico su $k(l)$, si ha $P_{r-1}^{(y)} = P_{r-1}^{(z)} = P_{r-1}^{(x)}$, dove $P_{r-1}^{(y)}$ e $P_{r-1}^{(z)}$ sono gli iperpiani tangenti a V_{r-1}, rispettivamente in y e z, mentre $P_{r-1}^{(x)}$ sta ad indicare, come noto, l'iperpiano tangente a V_{r-1} in x. Dalla

---

ta allora a una di tali rette, ed indicato con P_3 uno spazio lineare tridimensionale di $P_r(K)$ uscente da a, quasi ogni ciclo $V_2 = V_{r-1} \cdot P_3$ viene ad essere una rigata sviluppabile del quarto ordine (non cono), le cui generatrici (singolari) debbono appoggiarsi ad a, il che è assurdo.

$P^{(y)}_{r-1} = P^{(x)}_{r-1}$ deriva $m(l;\, V^{(x)}_{r-2}) \geq 2$, il che appare in contrasto con la $m(l;\, V^{(x)}_{r-2}) = 1$. Tanto basta per concludere come affermato all'inizio di questo n. 7.

8. - Sia V_{r-1} una k-ipersuperficie, dell'ordine $n = 4$ di $P_r(K)$, dotata di un ricoprimento lineare R di sottovarietà (lineari) m-dimensionali, $(m \geq 1)$, normalmente algebrico su un sopracorpo (algebrico) k_R di k. Sia poi P'_m un elemento di R, generico su k_R.

Indicato con P_{m+1} uno spazio lineare, generico su $k(P'_m)$ nella stella Δ dei sottospazi lineari $(m+1)$-dimensionali di $P_r(K)$ uscenti da P'_m, si consideri il ciclo, del terzo ordine e di dimensione m:

$$V_m = V_{r-1} \cdot P_{m+1} - P'_m \, .$$

L'intersezione prodotto

$$W_{m-1} = V_m \cdot P'_m$$

è un divisore positivo, del terzo ordine, di P'_m, che, al variare di P_{m+1} nella stella Δ, descrive un sistema lineare Ω_d, di una certa dimensione $d \geq 0$ [23]).

---

[23]) Basta infatti osservare che se $(X_{m+1}, \ldots, X_r)$ è l'ideale di P'_m, l'equazione di V_{r-1} può scriversi nella forma:

$$\sum_{i=m+}^{1r} X_i f_i^{(3)}(X_0, X_1, \ldots, X_m) + F(X_0, X_1, \ldots, X_r) \, ,$$

dove $f_i^{(3)}(X_0, X_1, \ldots, X_m)$ sono polinomi omogenei, del terzo grado, dell'anello $k[X_0, X_1, \ldots, X_m]$, mentre $F(X_0, X_1, \ldots, X_r)$ è un polinomio omogeneo, del quarto grado, dell'anello $k[X_0, X_1, \ldots, X_r]$, i cui termini sono tutti del secondo grado almeno nel complesso delle indeterminate $X_{m+1}, \ldots, X_r$.

Se $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_r$ sono elementi di K, trascendenti su $k(P'_m)$ e algebricamente indipendenti, l'ideale del sopra considerato P_{m+1} può assumere la forma

$$(\lambda_{m+1} X_{m+2} - \lambda_{m+2} X_{m+1}, \ldots, \lambda_{m+1} X_r - \lambda_r X_{m+1}) \, ,$$

e perciò l'equazione di W_{m-1}, nello spazio P'_m, diviene:

$$\sum_{i=m+1}^{r} \lambda_i f_i^{(3)}(X_0, X_1, \ldots, X_m) \, ,$$

il che basta per concludere che W_{m-1} descrive, su P'_m, un sistema lineare Ω_d.

È facile constatare che *la sottovarietà lineare* P'_m *risulta stazionaria su* V_{r-1} *se, e solo se,* $d = 0$ [24]), nel quale caso il divisore positivo W_{m-1}, del terzo ordine, di P'_m, resta fisso al variare di P_{m+1} nella stella Δ. Ne segue — appena si osservi che *un punto di* P'_m *è multiplo su* V_{r-1} *se, e solo se, esso è base per il sistema lineare* Ω_d — che *condizione necessaria e sufficiente perchè* P'_m *sia sottovarietà lineare stazionaria su* V_{r-1} *è che si abbia* $m(Supp.(W_{m-1}); V_{r-1}) \geq 2$, *ed inoltre risulti* $m(z; V_{r-1}) = 1$ *per ogni punto* z *di* P_m, *non appartenente a* $Supp.(W_{m-1})$.

9. - Si consideri ora una k-ipersuperficie assoluta, dell'ordine $n = 4$ di $P_r(K)$, che soddisfi alle condizioni indicate nella proposizione enunciata nel n. 2 [25]).

Dalla $r \geq 12$ discende (n. 2) che per ogni punto di V_{r-1} passa (almeno) una retta su essa giacente, e per ogni retta (almeno) un piano. Esiste perciò su V_{r-1} (almeno) un ricoprimento lineare, R, di sottovarietà (lineari) bidimensionali.

Se una tale V_{r-1} ammette solo ricoprimenti lineari stazionari, essa risulta — a norma del Teorema del n. 7 — razionale su $k(x)$, con x punto generico di V_{r-1} su k; la stessa V_{r-1} risulta quindi razionale, e perciò unirazionale, anche sul corpo $k' = k(P'_2)$ dove P'_2 è un elemento, generico su k_R, di un qualunque ricoprimento lineare, R, di sottovarietà (lineari) bidimensionali.

Da ciò segue che, per poter concludere come enunciato nel n. 2, basta ancora considerare il caso che V_{r-1} ammetta (almeno) un ricoprimento lineare non stazionario di sottovarietà (lineari) unidimensionali, e di conseguenza anche (almeno) un ricoprimento lineare non stazionario di sottovarietà (lineari) bidimensionali. Quest'ultimo ricoprimento verrà, pur esso, indi-

---

[24]) Ciò deriva dal fatto che se V_{r-1} ha l'equazione indicata nella nota [23]), l'iperpiano tangente alla V_{r-1} stessa in un suo punto semplice $z = (z_0, z_1 \ldots, z_m, 0, \ldots 0)$, comunque scelto su P'_m, ha l'equazione:

$$\sum_{i=m+1}^{r} X_i f_i^{(3)}(z_0, z_1, \ldots, z_m) .$$

[25]) Sia cioè $r \geq 12$, e la V_{r-1} non sia uno pseudo-cono.

cato con R, ed il simbolo P'_2 starà a rappresentare un elemento generico di R su k_R.

Sia ora Δ la stella dei sottospazi lineari tridimensionali di $P_r(K)$, che passano per P'_2, e si consideri il ciclo, del terzo ordine e di dimensione due:

$$V_2 = V_{r-1} \cdot P_3 - P'_2 ,$$

dove P_3 è un elemento di Δ, generico su $k(P'_2)$.

Per quanto stabilito nel n. 8, il ciclo

$$W_1 = V_2 \cdot P'_2$$

è un divisore positivo, del terzo ordine, di P'_2, che, al variare di P_3 nella stella Δ, descrive su P'_2 un sistema lineare Ω_d, la cui dimensione d — per l'ipotesi di non stazionarietà di R, e per quanto affermato alla fine del n. 8 — soddisfa alla limitazione $d \geq 1$.

Nei successivi nn. 10-12 dimostreremo l'unirazionalità su $k(P'_2)$ della considerata V_{r-1}. Resterà così provata la proposizione enunciata nel n. 2.

Distingueremo tre casi, a seconda che il ciclo V_2, del terzo ordine, abbia tre componenti lineari semplici [26]), oppure sia un cono del terzo ordine, assolutamente irriducibile, o infine risulti una superficie assolutamente irriducibile, sempre del terzo ordine, che non sia un cono.

10. - Nel caso che il ciclo $V_2 = V_{r-1} \cdot P_3 - P'_2$, di cui al n. 9, abbia tre componenti lineari semplici, risultano lineari (e quindi rette) le componenti del divisore positivo W_1, del terzo ordine,

---

[26]) Il ciclo V_2 non può avere una componente lineare semplice ed una di molteplicità due, oppure due componenti, l'una lineare e l'altra del secondo ordine, perchè ciò comporterebbe la riducibilità di V_{r-1} su un sopracorpo (algebrico) k_1 di k. Inoltre V_2 non può avere una sola componente lineare di molteplicità tre perchè, in tale caso, ogni P_3 della stella Δ risulterebbe tangente a V_{r-1} in ciascun punto, semplice su V_{r-1}, in cui incontra la V_{r-1} stessa: e ciò appare manifestamente assurdo.

di P_2'. Il sistema lineare Ω_d, di dimensione $d \geq 1$, è perciò riducibile.

Non può avvenire che W_1 abbia una sola componente lineare, di molteplicità tre, perchè allora questa — a norma di un classico Teorema di BERTINI — sarebbe base, e quindi fissa per Ω_d, il che comporterebbe $d = 0$, in contrasta con la $d \geq 1$. Il divisore W_1 non può neppure avere una componente lineare di molteplicità due, necessariamente — per lo stesso Teorema — fissa per Ω_d, e l'altra — in virtù della $d \geq 1$ — variabile su P_2', perchè ciò implicherebbe la riducibilità di V_{r-1} su un sopracorpo (algebrico) k_1 di k. Si conclude che il divisore W_1 è dotato di tre (distinte) componenti linerari semplici: e di queste nessuna può essere retta base per Ω_d, perchè anche tale eventualità implicherebbe la riducibilità di V_{r-1}.

In definitiva, W_1 è dotato di tre componenti lineari semplici, tutte variabili su P_2'. Esse allora — per quanto stabilito da un altro Teorema di BERTINI — debbono variare in un fascio (di rette), di sostegno un punto O di P_2'. Ne discende che tutte e tre le componenti lineari di V_2 passano per O, per il che V_{r-1} è un cono, in contrasto con l'ipotesi che non sia uno pseudocono. Il caso che il ciclo V_2 abbia tre componenti lineari semplici non può pertanto verificarsi.

11. - Si consideri ora il caso che il ciclo $V_2 = V_{r-1} \cdot P_3 - P_2'$, di cui al n. 9, sia un cono del terzo ordine, assolutamente irriducibile. Qui distingueremo due eventualità, a seconda che il vertice O di V_2 appartenga, o meno, a P_2'.

Nella prima eventualità, ($O \in P_2'$), il sistema lineare Ω_d è riducibile, e le componenti di W_1 sono tutte lineari (rette). Non può avvenire che W_1 abbia una sola componente (lineare) di molteplicità tre, perchè ciò comporterebbe (ved. n. 10) $d = 0$. Il divisore W_1 è dunque dotato di almeno due componenti lineari, che si incontrano nel vertice O di V_2; e poichè il punto O è multiplo per W_1, esso appartiene alla varietà base del sistema Ω_d. Può allora accadere che o il punto O resti fisso su P_2', al variare di W_1 nel sistema Ω_d; oppure O vari su P_2', descrivendo una retta (base e quindi fissa per Ω_d). Se O resta fisso su P_2', V_{r-1} è un cono;

se invece O descrive una retta su P'_2, V_{r-1} è uno pseudo-cono [27]). L'eventualità $O \in P'_2$ resta perciò esclusa per le ipotesi iniziali del n. 9.

Nella seconda delle eventuatlità, ($O \notin P'_2$), di cui all'inizio di questo n., il ciclo $V_2 = V_{r-1} \cdot P_3 - P'_2$ è dotato, fuori di P'_2, di un punto O per cui risulta $m(O;\ V_2) = 3$. Ne consegue — avuto riguardo alla genericità su $k(P'_2)$ dello spazio P_3 della stella Δ — che esiste su V_{r-1} una sottovarietà lineare tripla, razionalmente determinabile su k; da qui la razionalità di V_{r-1} su k, e quindi l'unirazionalità della stessa V_{r-1} su $k' = k(P'_2)$.

12. — Andiamo infine a considerare il caso che il ciclo $V_2 = V_{r-1} \cdot P_3 - P'_2$, di cui al n. 9, sia una superficie del terzo ordine, assolutamente irriducibile, non cono. Una tale V_2 è normalmente algebrica sul corpo $k'(V_2)$, avendo posto $k' = k(P'_2)$.

Qualora V_2 sia rigata (non cono), e quindi dotata di una retta doppia, essa risulta, notoriamente, razionale su $k'(V_2)$. Ne discende — a norma della condizione di unirazionalità enunciata nella nota [12]), ed appena si osservi che, al variare di P_3 nella

---

[27]) Si osservi che, in quest'ultimo caso, V_{r-1}, oltre che ammettere un ricoprimento, d'indice uno, di coni cubici V_2, i cui vertici P_0 descrivono una retta P_1 di P'_2, ammette anche un ricoprimento, d'indice uno, di coni cubici V_m, i cui vertici P_{m-2} descrivono un P_{m-1} di P'_m, avendo indicato con P'_m una sottovarietà lineare contenente P'_2, ed appartenente ad un ricoprimento lineare massimale di V_{r-1}.

Un esempio di pseudo-cono, di tipo siffatto, si ottiene nel seguente modo.

In uno spazio proiettivo $P_r(K)$, di dimensione $r = 2m + 1$, si considerino due sottospazi P^*_m, P^*_{m+1}, intersecantisi in un solo punto x. Si introduca poi una proiettività φ tra l'insieme dei P_{m-1} di P^*_m e quello dei P_{m+1} di $P_r(K)$ per P^*_m. Sia infine U_m un cono di P^*_{m+1}, passante per x, ed ottenuto proiettando da un P_{m-2}, non contenente x, una cubica piana assolutamente irriducibile e priva di punti doppi; un tale cono, ovviamente di genere uno, sia inoltre soggetto all'ulteriore condizione che il luogo delle immagini, nella proiettività φ, dei P_{m-1} di P^*_m che passano per x, intersechi P^*_{m+1} secondo il $P^{(x)}_m$ tangente ad U_m in x.

La coppia degli spazi P'_m, P''_m, che congiungono un P_{m-1} di P^*_m rispettivamente con i due punti x', x'' in cui il $P_{m+1} = \varphi(P_{m-1})$ incontra stella Δ (n. 9), la V_2 descrive un ricoprimento di V_{r-2}, razionale su k' e d'indice $\nu = 1$ — la razionalità, e quindi l'unirazionalità di V_{r-1} su $k' = k(P_2')$. Ad analogo risultato si può giungere se V_2 è dotata di un solo punto doppio.

Per concludere come enunciato nel n. 2, andiamo infine a considerare l'eventualità che V_2 non sia una superficie rigata [28]).

Giova premettere il seguente

LEMMA V. - *Sia Γ una curva piana, assolutamente irriducibile, giacente su una k^*-superficie assoluta F ,del terzo ordine e non rigata, di uno spazio proiettivo P_3, di dimensione tre su un sopracorpo algebricamente chiuso di k. Si ha allora che, in relazione a quasi ogni punto x di Γ, la superficie F è unirazionale su $k^*(x)$, a meno che Γ sia una retta stazionaria su F per la quale si abbia $F \cdot P_2^{(x)} = 3\Gamma$, dove $P_2^{(x)}$ sta ad indicare il piano tangente ad F in x.*

Per dimostrare questo Lemma basta osservare che se Γ non è una retta, dall'ipotesi che F non sia rigata discende che $F \cdot P_2^{(x)}$ è una cubica piana $C^{(x)}$, assolutamente irriducibile, avente x come punto doppio, e perciò razionale su $k^*(x)$. Detto y un punto generico di $C^{(x)}$ su $k^*(x)$, ed indicato con $P_2^{(y)}$ il piano tangente ad F in y, l'intersezione $F \cdot P_2^{(y)}$ è, pur essa, una cubica piana $C^{(y)}$, assolutamente irriducibile, avente y come punto doppio, e perciò razionale su $k^*(x)(y)$. In corrispondenza alle specializzazioni di y su $k^*(x)$, la $C^{(y)}$ descrive un ricoprimento di F, razionale su $k^*(x)$ e d'indice finito, dal che segue — a norma della condizione enunciata nella nota [12]) — l'unirazionalità di F su $k^*(x)$.

U_m fuori di x, descrive, al variare di P_{m-1} in P_m^*, uno pseudo-cono V_{r-1}, del tipo suddetto. È infatti facile constatare direttamente che ogni P_{m+1} di $P_r(K)$ che passi per P_m' (o per P_m'') interseca V_{r-1} in un ciclo, del quarto ordine, di cui una componente è P_m', mentre l'altra è un cono cubico di genere uno, il cui vertice è un P_{m-2}, contenuto nel $P_{m-1} = P_m' \cap P_m^*$, e che descrive il P_{m-1} stesso al variare del prima considerato P_{m+1} per P_m'.

Questo esempio viene a confermare che la struttura geometrica elementare S di pseudo-cono soddisfa alla condizione b), di cui al n. 1.

[28]) Nel successivo ragionamento resterà anche compresa l'eventualità, per ultimo considerata, che la V_2, non rigata, abbia un solo punto doppio.

Analogo ragionamento può condursi nel caso che Γ sia una retta non stazionaria su F, salvo la sostituzione della cubica $C^{(x)}$ con la retta Γ, e della cubica $C^{(y)}$ con la componente del secondo ordine di $F \cdot P_2^{(y)}$, ovviamente razionale su $k^*(x)(y)$.

Se invece Γ è una retta stazionaria su F — essendo esclusa dalle ipotesi l'eventualità $F \cdot P_2^{(x)} = 3\Gamma$ — deve aversi $F \cdot P_2^{(x)} = = 2\Gamma + \Gamma_1$, essendo Γ_1 una retta, distinta da Γ. Se Γ_1 è non stazionaria su F, si può ripetere per Γ_1 il ragionamento ultimo indicato in relazione a Γ. Se infine Γ_1 è stazionaria su F, il punto $\Gamma \cap \Gamma_1$, definito sul corpo $k^*(x)$, è doppio su F, donde la razionalità di F su $k^*(x)$. Il Lemma V resta così provato.

Riconsideriamo ora la superficie del terzo ordine, non rigata, $V_2 = V_{r-1} \cdot P_3 - P_2'$. Essa descrive, in corrispondenza alle specializzazioni di P_3 su $k' = k(P_2')$, cioè al variare di P_3 nella stella Δ, (n. 9), un ricoprimento R' di V_{r-1}, razionale su k' e d'indice uno. Il divisore $W_1 = V_2 \cdot P_2'$ descrive invece su P_2' un sistema lineare Ω_d, di dimensione $d \geq 1$.

Sia l una retta, comunque scelta su P_2', purchè normalmente algebrica, e quindi razionale, su k', ed inoltre tale da incontrare W_1 in un numero finito di punti su essa variabili in corrispondenza alle specializzazioni di W_1 su k': l non sia cioè una (eventuale) componente fissa di ogni elemento di Ω_d, nè intersechi W_1 solo negli (eventuali) punti base di Ω_d.

Gli elementi di Ω_d che passano per un punto x di l, generico su k', costituiscono un sistema lineare $\Omega_{d-1}^{(x)}$ su P_2', di dimensione $d - 1 \geq 0$: e un elemento generico $W_1^{(x)}$ di $\Omega_{d-1}^{(x)}$ su $k'(x)$, è anche generico di Ω_d su k'. Ne viene che gli elementi di R' che passano per $W_1^{(x)}$ costituiscono un insieme $\Pi^{(x)}$, unirazionale su $k'(x)$: e un elemento generico $V_2^{(x)}$ di $\Pi^{(x)}$ su $k'(x)$, è anche generico di R' su k'.

Quanto ora visto ci permette di affermare che l'elemento $V_2^{(x)}$, generico di R' su k', determina razionalmente un suo punto: quello x. Si ha cioè $k'(V_2^{(x)})(x) = k'(V_2^{(x)})$: e questa proprietà, valida per x, vale anche — in virtù dell'arbitrarietà della scelta di l su P_2' — per quasi ogni punto di quella componente $\Gamma^{(x)}$ di $W_1^{(x)}$ che passa per x.

Si faccia ora l'ipotesi che $\Gamma^{(x)}$ non sia una retta stazionaria su $V_2^{(x)}$, per la quale si abbia $V_2^{(x)} \cdot P_2^{(x)} = 3\Gamma^{(x)}$, dove $P_2^{(x)}$ è il piano tangente a $V_2^{(x)}$ in x. Ne discende — appena si ricordi il Lemma V, dimostrato in questo n. — l'unirazionalità di $V_2^{(x)}$ su $k'(V_2^{(x)})(x) = k'(V_2^{(x)})$, e quindi — in virtù della condizione d'unirazionalità enunciata nella nota [12]) — l'unirazionalità di V_{r-1} su $k' = k(P_2')$.

Qualora invece $\Gamma^{(x)}$ sia una retta stazionaria su $V_2^{(x)}$, per la quale si abbia $V_2^{(x)} \cdot P_2^{(x)} = 3\Gamma^{(x)}$, il sistema lineare Ω_d è riducibile, e su $\Gamma^{(x)}$ vi sono due punti x', x'', tali che $m(x'; V_2^{(x)}) = 2$, $m(x''; V_2^{(x)}) = 2$, potendo, in particolare, risultare anche $x' = x''$ [29]).

Se $x' = x''$, oppure se uno dei due punti x', x'' è razionalmente determinabile su k', $V_2^{(x)}$ è razionale su $k'(V_2^{(x)})$, e quindi — sempre per la condizione enunciata nella nota [12]) — V_{r-1} è unirazionale su $k' = k(P_2')$.

Se invece $x' \neq x''$, e nessuno dei due punti x', x'' è razionalmente determinabile su k', gli elementi di Ω_d hanno tutti una componente fissa Γ, del secondo ordine, eventualmente riducibile in due componenti lineari Γ', Γ'', sulla quale variano x', x'', $(x', x'' \in \Gamma; x' \in \Gamma', x'' \in \Gamma'')$. Per una tale Γ si ha poi — tenuto anche conto di quanto stabilito nel n. 8 — $m(\Gamma; V_{r-1}) = 2$. Ne discende che V_{r-1} è dotata di una sottovarietà doppia non lineare, eventualmente riducibile in due sottovarietà lineari, la quale è intersecata da quasi ogni P_2 del ricoprimento R secondo una conica, eventualmente riducibile in due rette distinte: ed una tale V_{r-1}, dell'ordine $n = 4$, non può, notoriamente, esistere nelle nostre ipotesi [30]). La proposizione enunciata nel n. 2 resta così completamente stabilita.

---

[29]) Queste considerazioni valgono anche nel caso che $\Gamma^{(x)}$ sia una retta stazionaria su $V_2^{(x)}$, per la quale si abbia $V_2^{(x)} \cdot P_2^{(x)} = 2\Gamma^{(x)} + \Gamma_1^{(x)}$, con $\Gamma_1^{(x)}$ ulteriore componente lineare di $V_2^{(x)} \cdot P_2^{(x)}$.

[30]) Si noti che se P_2', anzichè elemento generico di R su k_R, è una sua particolare specializzazione, per la quale — sempre nell'ipotesi $V_2^{(x)} \cdot P_2^{(x)} = 3\Gamma^{(x)}$ — si abbia $x' \neq x''$, con nessuno dei due punti x', x'' razionalmente determinabile su k', si può sempre trovare, in un'estensione quadratica k_1' di k', un punto x_1 di Γ, in relazione al quale la $V_2^{(x)}$ risulti — a norma del Lemma V — unirazionale su $k_1'(V_2^{(x)})$. Ne discende — in virtù della condizione enunciata nella nota [12]) — l'unirazionalità di V_{r-1} sul corpo k_1', estensione quadratica di $k' = k(P_2')$.

13. - Una proposizione, analoga a quella del n. 2, può dimostrarsi anche per una k-ipersuperficie assoluta V_{r-1}, dell'ordine $n = 5$ di $P_r(K)$: basta sostituire alla condizione $r \geq 12$ una più restrittiva $r \geq r_0$ (con r_0 intero opportuno), ed alla struttura geometrica elementare di pseudo-cono quella, S, di luogo d'un sistema assolutamente irriducibile, d'indice uno, di spazi lineari P_h, di dimensione $h \geq 1$.

Più precisamente si può provare — dopo aver dimostrato alcuni Lemmi del tipo di quelli dei nn. 3-6 — la validità di un Teorema analogo a quello del n. 7. Ripetute quindi le considerazioni del n. 8, si può applicare ad una V_{r-1}, dell'ordine $n = 5$, il procedimento dimostrativo seguito nei nn. 9-12, salvo la sostituzione della sottovarietà lineare P'_2, considerata nel n. 9, con una sottovarietà, sempre lineare, P'_m, di dimensione m opportuna, $(m > 2)$. Si dovrà inoltre sostituire alla retta l, introdotta nel n. 12, un conveniente sistema, razionale su $k' = k(P'_m)$, di spazi lineari bidimensionali. Ed in un tale procedimento dimostrativo, la funzione del Lemma V, nel quale si considera il caso $n = 3$, dovrà ovviamente venir assunta dalla proposizione del n. 2, relativa al caso $n = 4$.

Con procedimento induttivo rispetto ad n — già in effetti applicato per passare dal caso $n = 4$ a quello $n = 5$ — si può poi tentare la dimostrazione di una proposizione, del tipo di quella del n. 2, per una k-ipersuperficie assoluta V_{r-1} di $P_r(K)$, dell'ordine n arbitrario. A questo scopo dovrà però, quasi certamente, sostituirsi alla struttura S, sopra considerata, una struttura geometrica di natura più complessa, la cui caratterizzazione resta, per ora, indeterminata.