RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

NOBORU ITO

Un teorema sui gruppi transitivi di grado primo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 35, nº 1 (1965), p. 132-133

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_1_132_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UN TEOREMA SUI GRUPPI TRANSITIVI
DI GRADO PRIMO

Nota *) *di* NOBORU ITO (*a Nagoya*)

Siano p, q, r ed s numeri primi dispari, tali che $p = 2q + 1 = 4r + 3 = 8s + 7$. Sia G un gruppo transitivo di permutazioni sopra l'insieme Ω costituito dagli elementi 1, 2, ..., p, non risolubile. In un recente lavoro ([1]: Theorem IX, Theorem VIII) abbiamo dimostrato i seguenti teoremi:

A) G è 8-volte -transitivo.

B) Il gruppo alterno A_p sopra Ω è contenuto in G, se $p - 6$ è un numero primo.

Nella presente nota, dimostriamo in generale il

TEOREMA: *Il gruppo alterno* A_p *è un sottogruppo di* G.

1. - Procediamo per assurdo, supponendo che A_p non sia contenuto in G.

Siano P e Q i massimi sottogruppi di G che tengono fissi rispettivamente gli elementi 1, 2, ..., 7 ed 1, 2, ..., 8. Poichè G è 8-volte -transitivo, per il teorema A), l'indice di Q in P è uguale a $p - 7 = 8s$. Inoltre in base ad un risultato di PARKER-NIKOLAI [4], s deve essere non troppo piccolo, cioè $s > 500$. Dunque ogni s-sottogruppo di Sylow di G è diverso dal sotto-

*) Pervenuta in redazione il 7 ottobre 1964.
Indirizzo dell'A.: Depart. of Math., Nagoya University, Nagoya-Japan.

gruppo identico, è abeliano elementare e fissa esattamente 7 simboli di Ω. Essendo G 8-volte -transitivo, possiamo supporre che un s-sottogruppo di Sylow S di G sia contenuto in P.

Siano $\{1\}$, $\{2\}$, ..., $\{7\}$, L_1, L_2, ..., L_3 le orbite di S sopra Ω. Le orbite L_i ($i = 1, 2, ..,. 8$) hanno allora la lunghezza s.

2. - Sia NsS il normalizzante di S in G. Poichè G è 8-volte -transitivo, NsS è 7-volte -transitivo sopra l'insieme $\{1, 2, ..., 7\}$, per un teorema di WITT [5]. Dunque NsS contiene un elemento T che ha la struttura ciclica (1) (2) (34567)... Allora possiamo supporre che l'ordine di T è una potenza di 5. Dunque T fissa almeno tra fra le orbite L_i ($i = 1, 2, ..., 8$), per esempio, L_1, L_2 ed L_3. Se T fissa tutti i simboli di L_1, L_2 ed L_3, T fissa almeno $3s + 2$ elementi di Ω. Ma allora per un teorema interessante di LUTHER-MANNING ([2], [3]: in particolare [3], Theorem IV) A_p è contenuto in G, tenuto presente che G è 8-volte transitivo. Ciò è una contraddizione alla nostra ipotesi. Dunque T induce una per mutazione non identica sopra almeno uno degli insiemi L_1, L_2 ed L_3, ad es. L_1; tale permutazione indotta indicheremo con T/L_1. Similmente S induce un gruppo di permutazioni sopra L_1, che indicheremo con S/L_1. Allora l'ordine di S/L_1 è uguale ad s. Evidentemente T/L_1 può essere considerato un automorfismo non identico di S/L_1. Ne segue la congruenza $s = 1 \pmod 5$. Ma allora si hanno le relazioni $r = 2s + 1 \equiv 3 \pmod 5$, $q = 2r + 1 \equiv 2 \pmod 5$ e $p = 2q + 1 \equiv 0 \pmod 5$. Ciò è assurdo e il teorema risulta dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

[1] ITO N.: *Transitive permutation groups of degree $p = 2q + 1$, p and q being prime numbres.* Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 165-192.

[2] LUTHER C. F.: *Concerning primitive groups of class u. I.* Amer. J. Math. 55 (1933), 77-101; II, Amer. J. Math. 55(1933), 611-618.

[3] MANNING W. A.: *The degree and class of multiply transitive groups.* III. Trans, Amer Math. Soc. 35 (1933), 585-599.

[4] PARKER E. T. E NIKOLAI P. J.: *A search for analogues of the Mathieu groups.* Math. Comp. 12 (1958), 38-43.

[5] WITT: E.: *Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 12 (1938), 265-264.