

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ADALBERTO ORSATTI

Alcuni gruppi abeliani il cui anello degli endomorfismi è locale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 35, n° 1 (1965), p. 107-115

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_1_107_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

ALCUNI GRUPPI ABELIANI IL CUI ANELLO DEGLI ENDOMORFISMI È LOCALE

*Nota *) di ADALBERTO ORSATTI (a Padova)**)*

INTRODUZIONE. — In questa nota si studiano alcuni aspetti del problema seguente: caratterizzare quei gruppi abeliani il cui anello degli endomorfismi è un anello locale; cioè un anello con unità, non necessariamente commutativo, in cui gli elementi non unitari costituiscono un ideale bilatero, il quale, di conseguenza, contiene ogni altro ideale proprio dell'anello [1].

Si prova facilmente che se un gruppo abeliano G possiede qualche elemento periodico non nullo, l'anello $E(G)$ dei suoi endomorfismi è locale e se e solo se G , per il quale usiamo la notazione additiva, è indecomponibile in somma diretta.

Si verifica poi che, se G è libero da torsione e di rango 1, $E(G)$ è locale se e solo se G è isomorfo al gruppo additivo di un sottoanello locale del corpo dei razionali.

Si prende quindi in esame l'anello degli endomorfismi di un sottogruppo (additivo) puro, S , dell'anello Z_p^* degli interi p -adici. Osservato che $E(S)$ è isomorfo ad un sottoanello di Z_p^* , si prova che, se S ha rango finito, $E(S)$ è un anello locale, mentre se il rango di S non è finito quest'ultima proprietà non è più neces-

*) Pervenuta in redazione il 7 luglio 1964.

Indirizzo dell'A: Seminario matematico, Università, Padova.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

sariamente vera; però esistono sottogruppi puri di Z_p^* per i quali la proprietà vale ed il cui rango può essere prefissato. Di conseguenza, per ogni numero cardinale μ , non superiore alla potenza del continuo, esiste un gruppo abeliano libero da torsione e di rango μ il cui anello degli endomorfismi è un dominio d'integrità locale.

1. – Siano G un gruppo abeliano non nullo ed $E(G)$ l'anello dei suoi endomorfismi. Cominciamo con l'osservare che:

Condizione necessaria affinché $E(G)$ sia un anello locale è che G sia indecomponibile in somma diretta.

Supponiamo $G = H \oplus K$ con H e K sottogruppi propri di G e consideriamo le proiezioni canoniche di G sopra H e K . Si ottengono due endomorfismi di G , non invertibili, la cui somma è l'automorfismo identico. L'ideale da essi generato in $E(G)$ coincide con $E(G)$, il quale pertanto non può essere un anello locale.

Dimostriamo ora la seguente proposizione:

Se G possiede elementi periodici non nulli, $E(G)$ è un anello locale se e solo se G è un p -gruppo ciclico o quasi ciclico.

In questa ipotesi, infatti, per un teorema di KULIKOV [3], G è indecomponibile solo se o è ciclico di ordine p^k (p numero primo, k intero positivo), oppure è un p -gruppo quasi ciclico. Nel primo caso $E(G)$ è isomorfo a Z/p^kZ , dove Z indica l'anello degli interi, nel secondo caso all'anello Z_p^* degli interi p -adici. In entrambi i casi $E(G)$ è un anello locale.

2. – Supponiamo ora che G sia libero da torsione e di rango 1. G è allora, a meno di isomorfismi, un sottogruppo del gruppo additivo Q^+ del corpo Q dei razionali. Pensiamo gli elementi di G come elementi di Q . Non è restrittivo supporre che l'unità di Q appartenga a G , poichè è ben noto che gruppi abeliani isomorfi hanno anelli degli endomorfismi isomorfi. Allora un endomorfismo φ di G si ottiene moltiplicando tutti gli elementi di G per il numero razionale $r = \varphi(1)$. Pertanto $E(G)$ è isomorfo ad un sotto-anello di Q ed il gruppo additivo di $E(G)$ è isomorfo ad un sottogruppo G' di G . Indicando con $T(G')$ e $T(G)$ i tipi,

[3], rispettivamente di G' e di G , si avrà $T(G') \leq T(G)$, l'uguaglianza verificandosi se e solo se G' e G sono isomorfi. Inoltre, a norma di un teorema di REDEI e SZELE [3], un sottogruppo di Q^+ è il gruppo additivo di un sottoanello di Q se e solo se il suo tipo si rappresenta con una sequenza $(h_1, h_2, \dots, h_n, \dots)$, dove h_n è 0 oppure ∞ per ogni n . Perciò, se $(k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)$ è una sequenza che rappresenta $T(G)$, $T(G')$ potrà rappresentarsi con la sequenza ottenuta dalla precedente sostituendo con lo zero ogni numero naturale che vi compare. Segue che l'anello degli endomorfismi del gruppo additivo di un sotto-anello A , con unità, di Q è isomorfo ad A . Ciò premesso possiamo dimostrare la seguente proposizione:

Se G è un gruppo abeliano libero da torsione e di rango 1, $E(G)$ è un anello locale se e solo se G è isomorfo al gruppo additivo di un sotto-anello locale del corpo dei razionali. A ed $E(G)$ sono allora isomorfi.

La sufficienza della condizione e l'ultima parte dell'enunciato sono implicite nelle considerazioni precedenti. Per quanto riguarda la necessità se $E(G)$ è isomorfo a Q allora G è isomorfo a Q^+ e viceversa. Escluso questo caso si verifica che $E(G)$ è isomorfo all'anello Z_p dei razionali, scritti in forma ridotta, il cui denominatore non è divisibile per p , dove p è un certo numero primo. Perciò il tipo $T(G')$ del gruppo additivo G' di $E(G)$ si rappresenterà con la sequenza $(\infty, \infty, \dots, \infty, 0, \infty, \dots)$ dove lo zero occupa il posto di p nella successione crescente dei numeri primi. Dev'essere $T(G') \leq T(G)$ e non può essere $T(G') < T(G)$ poichè G non è isomorfo a Q^+ ; quindi $T(G') = T(G)$ e G è isomorfo a G' .

3. – Siano Z_p^* l'anello degli interi p -adici, P il suo gruppo additivo ed S un sottogruppo puro non nullo di P . Ci proponiamo di studiare l'anello degli endomorfismi di (un gruppo abeliano isomorfo ad) S . Nel seguito supporremo a volte P dotato anche della moltiplicazione che vige in Z_p^* e penseremo S sia come sottogruppo di P , sia come sottoinsieme additivamente chiuso e simmetrizzato di Z_p^* . L'insieme Z dei numeri interi sarà considerato, a seconda dei casi, un sottoanello di Z_p^* oppure

un sottogruppo di P . Ricordiamo che $E(P)$ è isomorfo a Z_p^* : moltiplicando tutti gli elementi di Z_p^* per un suo elemento si ottiene un endomorfismo di P , ed ogni endomorfismo di P si ottiene in questo modo, [3]. P è libero da torsione e Z_p^* è intero, commutativo e locale. Il suo ideale massimale è pZ_p^* .

Il sottogruppo puro S di P contiene certamente elementi che, pensati in Z_p^* , risultano invertibili cioè non divisibili per p , [3]. Infatti scegliamo un elemento non nullo di S e scriviamolo nella forma $p^k\pi$, dove k è un numero intero non negativo e π è invertibile in Z_p^* ; π inoltre, poichè S è puro in P , appartiene ad S . Moltiplicando tutti gli elementi di Z_p^* per π^{-1} si ottiene un automorfismo di P che muta S nel sottogruppo S' di P ; S' è isomorfo ad S , è puro in P e contiene l'unità 1 di Z_p^* . Possiamo quindi supporre che $1 \in S$; allora $Z \subset S$.

Sappiamo che P è il completamento topologico di Z nella topologia p -adica, definita assumendo come base di intorni dello zero in Z i sottogruppi p^kZ ($k = 0, 1, 2, \dots$), e che la topologia di cui P è dotato come completamento topologico di Z , atteggiato nel modo suddetto a gruppo topologico di Hausdorff, coincide con la topologia p -adica di P , fornita dalla base di intorni dello zero p^kP . Per cui una successione di elementi di Z è di Cauchy nella topologia p -adica di Z se e solo se converge nella topologia p -adica di P . Sappiamo pure che anche P , con la sua topologia p -adica, è di Hausdorff, [2].

Sia φ un endomorfismo di S . Posto $\varphi(1) = a \in S$, si ha $\varphi(m) = m\varphi(1) = ma$ per ogni $m \in Z$. Sia x un elemento qualunque di S . Risulta $x = \lim x_i$ ($i = 1, 2, \dots$) $x_i \in Z$. Prefissato quindi un numero naturale k e ricordando che $Z \subset S$ si avrà: $x - x_i \in p^kP \cap S$ non appena i superi un conveniente numero naturale i_0 .

Poichè S è puro in P , $p^kP \cap S = p^kS$. Quindi, se $i > i_0$, $x - x_i \in p^kS$, da cui:

$$\varphi(x - x_i) = \varphi(x) - \varphi(x_i) \in \varphi(p^kS) = p^k\varphi(S) \subseteq p^kS \subseteq p^kP.$$

Perciò $\varphi(x) = \lim \varphi(x_i) = \lim ax_i$, poichè $x_i \in Z$. Tenendo presente che i sottogruppi p^kP sono ideali Z_p^* e che P è di Hausdorff, si conclude $\varphi(x) = ax$.

Possiamo così enunciare la proposizione seguente:

Un endomorfismo φ di S è completamente individuato dall'immagine $\varphi(1) = a$ dell'elemento $1 \in S$ e si ottiene moltiplicando in Z_p^* ogni elemento di S per a . Se non è nullo φ è iniettivo atteso che Z_p^* è un dominio d'integrità. Al variare di φ in $E(S)$, a descrive un sottoanello A di Z_p^* . A ed $E(S)$ sono isomorfi.

Pensando S come sottoinsieme di Z_p^* , gli elementi di Z_p^* che appartengono ad A si caratterizzano così:

$$(1) \quad [a \in A] \Leftrightarrow [a \in Z_p^* \ \& \ aS \subseteq S]$$

Se $1 \notin S$ si verifica facilmente che $E(S)$ è ancora isomorfo al sottoanello A di Z_p^* individuato dalla (1) e che i diversi endomorfismi di S sono dati dalle moltiplicazioni per i diversi elementi di A . Diremo che A rappresenta $E(S)$. Sia A^+ il gruppo additivo di A . Allora:

A^+ è un sottogruppo puro di P . L'anello degli endomorfismi di A^+ è rappresentato da A .

Basta dimostrare che:

$$[n \in Z, n \neq 0, x \in Z_p^*, nx \in A] \Rightarrow [x \in A].$$

Ed infatti:

$$\begin{aligned} nx \in A &\Rightarrow nxS \subseteq S \Rightarrow nxs \in S, \quad \forall s \in S \Rightarrow \\ &\Rightarrow xs \in S, \quad \forall s \in S \Rightarrow xS \subseteq S \Rightarrow x \in A. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE. — Considerazioni del tutto analoghe alle precedenti valgono per un sottogruppo T di P , non necessariamente puro, soddisfacente alla condizione:

$$(2) \quad p^k P \cap T = p^k T \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$E(T)$ si rappresenta con un sottoanello B di Z_p^* . Il gruppo additivo di B verifica la condizione (2).

4. — Dato un sottoanello R di Z_p^* , indichiamo con R^+ il suo gruppo additivo. Diciamo che R è puro in Z_p^* se R^+ è puro in P ; intendiamo per rango di R il rango di R^+ . Ovviamente, se R ha rango finito tutti i suoi elementi sono, in Z_p^* , algebrici sopra

Z . Se R è puro in Z_p^* e contiene l'unità 1 di Z_p^* allora, in virtù delle considerazioni del n. 3, l'anello degli endomorfismi di R^+ è isomorfo ad R , anzi R rappresenta $E(R^+)$.

Sia S un sottogruppo puro di P . Pensiamo S immerso in Z_p^* e supponiamo che $1 \in S$: il sottoanello A di Z_p^* che rappresenta $E(S)$ e contenuto in S . Vogliamo osservare che A non coincide necessariamente con S . Infatti, tenuto conto che un sottogruppo H di P si può immergere in un sottogruppo puro avente lo stesso rango di H , supponiamo che S abbia rango finito e che contenga qualche elemento il quale, in Z_p^* , risulti trascendente sopra Z . Allora A è contenuto propriamente in S e, poichè A è puro in S , il rango di A è minore di quello di S .

5. - Ci proponiamo ora di dimostrare che $E(S)$, dove S è un sottogruppo puro di P , è un anello locale se S ha rango finito, mentre può non esserlo se quest'ultima condizione non è verificata. Premettiamo alcuni lemmi.

LEMMA 1. - *Sia R un sottoanello di Z_p^* . Il sottogruppo puro generato da R^+ in P è un sottoanello R^* di Z_p^* . Chiameremo R^* il sottoanello puro generato da R in Z_p^* .*

La verifica è immediata non appena si pensi che

$$[x \in R^*] \Leftrightarrow [n \in Z, n \neq 0, x \in Z_p^*, nx \in R]$$

LEMMA 2. - *Se A è un sottoanello puro e locale di Z_p^* , ogni elemento di A invertibile in Z_p^* è invertibile in A .*

Osserviamo prima che pA è l'ideale massimale di A . Sia infatti x un qualunque elemento di A che scriviamo nella forma $x = s_0 + py$ dove s_0 è un intero soddisfacente alle limitazioni $0 \leq s_0 \leq p - 1$ ed y è un conveniente elemento di Z_p^* . Poichè A è puro e contiene Z , y appartiene ad A . Quindi A/pA è isomorfo al corpo Z/pZ . D'altra parte:

$$pA = pZ_p^* \cap A$$

quindi gli elementi di A non invertibili in A non sono invertibili in Z_p^* . Il lemma è così provato.

Sia S un sottogruppo puro di P . È implicito nelle considerazioni del n.3 che ogni endomorfismo di S si estende, ed in un solo modo, ad un endomorfismo di P . Ciò premesso dimostriamo il

TEOREMA 1. — *Condizione necessaria e sufficiente affinché l'anello degli endomorfismi di un sottogruppo puro S di P sia un anello locale è che ogni endomorfismo di S subordinato da un automorfismo di P sia un automorfismo di S .*

Sia A il sottoanello puro di Z_p^* il quale rappresenta $E(S)$. Dobbiamo dimostrare che A è un anello locale se e solo se ogni elemento di A invertibile in Z_p^* è invertibile in A . La necessità della condizione segue immediatamente dal lemma 2. Quanto alla sufficienza notiamo che, poichè A è puro, abbiamo $A \cap pZ_p^* = pA$. Pertanto l'ideale pA di A è costituito dagli elementi di A non invertibili in A . Quindi A è un anello locale.

Siamo ora in grado di provare il

TEOREMA 2. — *Se S è un sottogruppo puro e di rango finito di P , $E(S)$ è un anello locale.*

Sia φ un endomorfismo di S ; ψ è indotto da un endomorfismo φ di P univocamente individuato da ψ ; supponiamo che φ sia un automorfismo di P . $\varphi(S)$ è contenuto in S , è isomorfo ad S e perciò ha lo stesso rango (finito) di S . Dunque $S/\varphi(S)$ è periodico. D'altra parte $\varphi(S)$ è puro in P quindi in S . Pertanto $S = \varphi(S)$; allora φ subordina un automorfismo di S . Di conseguenza, per il teorema precedente, $E(S)$ è un anello locale.

Osserviamo che la condizione data nel teorema 1 non è banale. Infatti se essa fosse soddisfatta da un qualunque sottogruppo puro di P , ogni sottoanello puro e con unità di Z_p^* (rappresentando l'anello degli endomorfismi del proprio gruppo additivo) dovrebbe essere un anello locale. Questo non è vero, come ora dimostreremo.

Sia ξ un elemento di Z_p^* invertibile in Z_p^* e trascendente sopra Z . L'esistenza di ξ è garantita dal fatto che gli elementi invertibili di Z_p^* formano un insieme avente la potenza del continuo. Indichiamo con $Z[\xi]$ il sottoanello di Z_p^* generato da Z e da ξ , e con A il sottoanello puro generato da $Z[\xi]$ in Z_p^* (lemma 1). Supponiamo per assurdo che A sia un anello locale. Allora A ,

per il lemma 2, deve contenere ξ^{-1} . Esiste quindi un intero non nullo m tale che $m\xi^{-1} \in Z[\xi]$. Cioè:

$$m\xi^{-1} = a_0 + a_1\xi + \dots + a_n\xi^n$$

con gli a numeri interi non tutti nulli. Moltiplicando per ξ^{-1} si ottiene:

$$m = a_0\xi + a_1\xi^2 + \dots + a_n\xi^{n+1}$$

il che è falso poichè ξ è trascendente sopra Z .

6. – Sia \mathfrak{U} un numero cardinale soddisfacente alle limitazioni $\mathfrak{U}_0 \leq \mathfrak{U} \leq \mathfrak{U}_1$ dove \mathfrak{U}_0 indica la potenza del numerabile e \mathfrak{U}_1 quella del continuo. Ricordiamo che P ha rango \mathfrak{U}_1 . Siano poi N un insieme di \mathfrak{U} elementi linearmente indipendenti di P , R il sottoanello generato in Z_p^* da Z e da N , ed A il sottoanello puro generato da R in Z_p^* (lemma 1). Infine indichiamo con D la totalità degli elementi di A invertibili in Z_p^* . D è la porzione complementare, moltiplicativamente chiusa, di A rispetto al suo ideale primo $A \cap pZ_p^*$ (il quale coincide con pA poichè A è puro). Gli elementi del tipo ad^{-1} con $a \in A$ e $d \in D$ formano in Z_p^* un sottoanello A_D che contiene A , e A_D è un anello locale, per le ben note proprietà degli anelli di frazioni [4]. Osserviamo che A_D è puro in Z_p^* . Infatti:

$$\begin{aligned} n \in Z, n \neq 0, x \in Z_p^*, nx \in A_D &\Rightarrow nx = ad^{-1}, \\ a \in A, d \in D &\Rightarrow nxd = a \in A \Rightarrow xd \in A \Rightarrow x \in A_D. \end{aligned}$$

Ciò permette di affermare che A_D rappresenta l'anello degli endomorfismi del suo gruppo additivo. Inoltre A_D ha \mathfrak{U} elementi, al pari di R e di A , quindi ha rango \mathfrak{U} . Tenuto conto del Teorema 2 e del fatto che in P esistono sottogruppi puri di qualunque rango finito, abbiamo il

TEOREMA 3. – *Per ogni numero cardinale μ non superiore alla potenza del continuo, esiste un gruppo abeliano libero da torsione e di rango μ in cui anello degli endomorfismi è integro, commutativo e locale.*

N.B. — Mentre questo lavoro era in corso di stampa, l'autore ha constatato che i risultati del n. 3 erano già stati ottenuti, con metodi diversi, da J. W. Armstrong: *On p -pure Subgroups of the p -Adic Integers*. Cfr.: *Topics on Abelian Groups*, edited by J. M. Irwin and E. A. Walker. Scott, Foresman and Company, 1963.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CARTAN H. and FILENBERG S.: *Homological Algebra*. Princeton University Press, 1956.
- [2] CORNER A.L.S.: *Every countable reduced torsion free ring is an endomorphism ring*. Proc. London Math. Soc. (3) 13 (1963) 687-710.
- [3] FUCHS L.: *Abelian Groups*. Pergamon Press, 1960.
- [4] NORTHCOTT D.G.: *Ideal Theory*. Cambridge University Press, 1953.