Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Aldo Bressan

Una teoria di relatività generale includente, oltre all'elettromagnetismo e alla termodinamica, le equazioni costitutive dei materiali ereditari. Sistemazione assiomatica

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 34 (1964), p. 74-109

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1964__34__74_0>

UNA TEORIA DI RELATIVITÀ GENERALE INCLUDENTE, OLTRE ALL'ELETTROMAGNETISMO E ALLA TERMODINAMICA, LE EQUAZIONI COSTITUTIVE DEI MATERIALI EREDITARI. SISTEMAZIONE ASSIOMATICA.

Memoria *) *di* ALDO BRESSAN (*a Padova*)

1. Introduzione.

In relazione alle equazioni relativistiche gravitazionali, elettromagnetiche e termodinamiche (con inclusione delle equazioni di conduzione termica) stabilisco le equazioni costitutive, ossia le equazioni che danno in corrispondenza al generico elemento materiale ε i valori attuali degli sforzi, dell'energia interna, dei coefficienti di conduzione termica e dei vari coefficienti elettromagnetici in funzione dell'attuale storia termo-magneto-cinematica [1]) di ε.

Preferisco pormi da un punto di vista molto generale considerando deformazioni finite e materiali non semplici [2]) essendo

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca N. 7 del Comitato per la matematica del C.N.R. per l'anno accademico 1962-1963.

[1]) La generalità della suddetta impostazione può apparire sovrabbondante ma essa semplifica la trattazione. Naturalmente indico alcune limitazioni di interesse fisico alla forma di certe equazioni costitutive.

[2]) Dal punto di vista della Fisica classica siano $x^r = x^r\,(y^1, y^2, y^3)$ le equazioni che rappresentano la configurazione attuale del sistema continuo in considerazione su quella φ^* di riferimento. Allora dico di ordine n, v. [3] nota (4), il materiale di cui è costituito l'elemento ε se — supposte cartesiane le coordinate a cui ci si riferisce — gli sforzi dipendono

ciò possibile in base all'uso di estese parti della teoria svolta in [3] e [4].

Pongo in forma relativistica il principio di indifferenza materiale [3]) giovandomi in modo essenziale dell'uso di terne di Fermi.

Basandomi sul detto principio dimostro che in relatività generale il generico sistema di funzionali costitutivi ha una certa forma [nota (3)]. Più precisamente dimostro che esso è costituito da funzionali i cui valori dipendono dalla suaccennata storia termo-magneto-cinematica solo tramite la storia lagrangiana a quella associata.

Considero il problema di Cauchy, in senso generalizzato, relativo alle equazioni termiche, elettromagnetiche [4]) e gravitazionali considerate e mostro le semplificazioni che si hanno usando certe particolari coordinate solidali.

Presuppongo, come ho detto, il lavoro [3] e in particolare i concetti primitivi e gli assiomi (di natura cinematica) ivi stabiliti, considerando in più i concetti primitivi di campo elettrico e campo magnetico e gli assiomi fondamentali involgenti le equazioni costitutive, elettromagnetiche e gravitazionali (tra l'altro il principio di indifferenza materiale). Questi sono sufficienti per dedurre oltre ai teoremi considerati nel presente lavoro anche quasi tutti quelli dimostrati in [3], [4], [5] e [6].

---

dalla configurazione, ed eventualmente dalla sua storia, solo tramite i tensori di componenti $\partial x^r/\partial y^{s_1} \dots \partial y^{s_m}$ $(m = 1, \dots, n)$.

Dirò *semplici* — cfr. [20] p. 214 — i materiali di ordine $n = 1$.

[3]) Il principio di indifferenza materiale — objectivity principle — è stato enunciato in Fisica classica da W. Noll in [20] p. 209; vedi pure [2] n. 8. Tale principio si è dimostrato molto utile nello studio di materiali ereditari fatto nel caso classico. Precisamente grazie ad esso si è dimostrato, tra l'altro, che il generico funzionale costitutivo meccanico (esprimente gli sforzi in funzione della storia cinematica locale) ha una certa forma.

[4]) Come del resto si fa nelle teorie relativistiche di elettromagnetismo di mia conoscenza — v. per es.: [15], [16], [18] e [24] — ammetto che l'unica cessione di energia elettromagnetica alla materia (almeno all'interno dei corpi) sia dovuta alle correnti elettriche di conduzione (calore Joule).

Com'è noto, dalle equazioni gravitazionali segue il 1° principio della termodinamica. Non considero esplicitamente il 2° principio della termodinamica in quanto questo si pone nella presente teoria relativistica praticamente con le stesse parole che in Fisica classica, cfr. [4] n. 19; inoltre le condizioni al contorno sono appena accennate, nè parlo di attrito — cfr. [4] n. 18 — ; tuttavia la rigorosa sistemazione assiomatica della teoria svolta in [3] e nel presente lavoro lascia chiaramente vedere, mi sembra, come ampliare la teoria stessa aggiungendo qualche assioma in conformità di quanto sopra, in modo che, tra l'altro, dal sistema complessivo di assiomi siano deducibili tutti i teoremi considerati in [3], [4] e [5].

Noto che non assumo come concetti primitivi gli sforzi, l'energia interna e i coefficienti termodinamici ed elettromagnetici (dielettricità, permeabilità magnetica e conducibilità elettrica). Ciò è in armonia con l'assiomatizzazione della meccanica particellare classica considerata da P. Painlevé in [22] — vedi pure [28] cap. X —.

* * *

In Fisica classica vi sono ora moderne trattazioni dei materiali ereditari riguardanti il caso puramente meccanico — v. [19], [20] e [21] — magari con qualche cenno di termodinamica — vedi [12] — e basate sul principio di indifferenza materiale [nota (3)].

Per trattare i materiali ereditari semplici [nota (2)] si potrebbe considerare esplicitamente nel caso classico la forma assunta dal suddetto principio in termodinamica ed in elettromagnetismo e trarne come conseguenza un'opportuna forma delle equazioni costitutive che interessano (forma che conviene sia completamente lagrangiana). Per la grande affinità della teoria relativistica svolta in [3] e [4] con l'analogo classico, le equazioni costitutive classiche nella detta forma lagrangiana possono trasportarsi inalterate nella presente teoria relativistica.

Però, non ritengo conveniente operare così se si ha di mira la considerazione di materiali non semplici [nota (2)] o se si desidera anche solamente di chiarire il significato fisico del principio di indifferenza materiale [nota (3)] in relatività; tanto più che tale principio in Fisica classica riflette (o contiene) certe proprietà di isotropia fisica dello spazio (classico) mentre le sezioni spaziali del cronotopo relativistico $\mathcal{U}$ sono in generale (localmente) anisotrope a causa di una anisotropa distribuzione di curvatura in $\mathcal{U}$, rispecchiata attraverso anisotropie del tensore di Riemann.

Per tali motivi ho preferito enunciare *il principio di indifferenza materiale* [n. 8] in forma opportuna e indipendentemente dagli altri assiomi (cinematici e termo-magneto-gravitazionali) e poi dedurre la forma delle equazioni costitutive che interessano (fra l'altro, includendo anche il caso dei materiali non semplici).

Tra l'altro, il significato fisico del detto principio in relatività generale viene chiarito mostrando, direi, come potrebbero svolgersi i fenomeni fisici se il principio di indifferenza materiale non valesse ma valessero gli altri assiomi.

La presente teoria relativistica è conforme al seguente

PRINCIPIO DI DETERMINAZIONE DELLE REATTIVITÀ MATERIALI: *Il modo di reagire di un dato elemento materiale ε (modo caratterizzato dallo stato tensionale e dai coefficienti termici ed elettromagnetici) è determinato dalla storia termo-magneto-cinematica di una porzione comunque piccola di materia contenente ε.*

Nel caso puramente meccanico tale principio si riduce al principio di determinazione dello stress — v. [20] p. 209 —. A tali principi sono conformi [5]) la meccanica ereditaria di Volterra e moderne teorie sui materiali ereditari — per es.: [12], [19], [20] e [21].

A quanto mi consta le equazioni costitutive dei materiali ereditari non erano mai state stabilite in relatività generale nemmeno nel caso puramente meccanico [6]). Ciò è naturale in

[5]) Non è conforme a tale principio una certa estensione delle equazioni generali dell'elasticità dovuta a Cisotti — v. [11] 1914.

[6]) Nella meccanica relativistica ereditaria considerata in [14] (1932) non figurano affatto le equazioni costitutive dei materiali ereditari ma si modificano le equazioni gravitazionali di Einstein, $A_{LM} + \chi U_{LM} = 0$, aggiungendo al secondo membro un funzionale del tensore energetico totale U_{LM} in modo che la metrica $ds^2 = g_{LM} dx^L dx^M$ del cronotopo $\mathcal{U}$ in un punto evento E risenta anche di fenomeni che avvengono in altri

quanto sebbene i primi tentativi di costruire una teoria dell'elasticità risalgano al 1911 — v. [17] — e anche in vari testi di relatività si parli di tali tentativi [7]) [**4** nota (2)] tuttavia anche in [29] (1959) si parla di difficoltà del problema di rappresentare adeguatamente la deformazione in relatività generale [**3** nota (7)].

Tale problema è stato superato nel lavoro [27] in corso di stampa riferendosi al caso lineare (legge di Hooke) e puramente meccanico [**3** note (1) e (8), **4** note (3) e (17)], e anche in [3] e [4] mettendosi decisamente da un punto di vista lagrangiano e considerando, tra l'altro, una teoria dell'elasticità per deformazioni finite e a base termodinamica [8]).

* * *

Quanto all'aspetto assiomatico del presente lavoro, come si è sostanzialmente già detto, gli assiomi in esso contenuti assieme

---

punti eventi tramite i valori di U_{LM} in questi. Si fa ciò « innestando nella meccanica relativistica di Einstein i concetti della meccanica ereditaria di Volterra » e riferendosi, in particolare. a [14].

Il legame sforzi-storia della deformazione sembra vada aggiunto a parte. Tra l'altro esso potrebbe presentare effettivamente ereditarietà e, mi sembra, anche non presentarla. In tale ultimo caso, nella teoria in considerazione l'ereditarietà riguarderebbe fenomeni puramente gravitazionali. Del resto, in generale, le equazioni proposte da B. Finzi in [14] costituiscono un analogo relativistico delle equazioni dei sistemi continui con gravitazione quando si sostituisca la legge di attrazione universale di Newton o l'equazione di Poisson con un'equazione ereditaria.

In questo lavoro non tengo conto di ipotetici fenomeni ereditari di gravitazione, analogamente a quanto si fa nelle moderne teorie non relativistiche dei materiali ereditari dove, com'è noto, vengono mantenute invariate le suaccennate leggi di Newton e di Poisson.

Ritengo invece interessante mostrare come sia possibile stabilire una meccanica ereditaria dei continui (trattante il legame sforzi-storia della deformazione e soddisfacente il suddetto principio delle reattività materiali) mantenendo invariate le equazioni gravitazionali originali di Einstein.

[7]) Convengo di indicare per es.: il n.5, la nota (6) e formula (7) appartenenti a [3] ordinatamente con « **3** n. 5 », « **3** nota (6) » e « **3** (7) ».

[8]) In [27] ci si basa essenzialmente sulla derivata del Lie, in [3]

a quelli posti in [3] sono completamente sufficienti per questi lavori e costituiscono inoltre la parte fondamentale degli assiomi relativistici della gravitazione, dell'elettromagnetismo [nota (4)], della termodinamica e della reologia (teoria dei materiali).

Sono stato indotto alla suaccennata sistemazione assiomatica — che va accostata ad una nota assiomatizzazione di P. Painlevé concernente la Meccanica classica — da motivi di rigore. Ho cercato, tra l'altro, di sottolineare la distinzione tra elementi contingenti quali la metrica del cronotopo, il moto della materia, la temperatura ecc., ed elementi assoluti quali le porzioni di materia e i funzionali costituitivi, ossia le equazioni costitutive [9]).

In connessione con quanto sopra la natura assiomatica del presente lavoro e di [3] è simile a quella della trattazione [22] del Painlevé e a quella considerata da A. Signorini nel testo [28], Cap. X per l'evidenza e l'importanza che il nesso causale ha in certe proposizioni condizionali usate in questi lavori [10]).

e [4] sul calcolo dei doppi tensori (in particolare sulle derivate assolute di Bortolotti e Van der Vaerden). Sviluppi di tale calcolo si sono avuti in America con J. L. Ericksen — vedi l'enciclopedia [13] —. Esso è stato applicato alla Meccanica classica, tra l'altro, in [31].

In [3] e [4] si introduce una nuova derivata di doppi tensori (la derivata lagrangiana trasversa) che si impone quando ci si metta da un punto di vista lagrangiano, come si fa in [3], [4] e [5], e si desideri una grande affinità fra le formule relativistiche e le analoghe classiche in riferimenti opportuni. Ciò si realizza, mi sembra, appunto in [3] e [4] e la cosa è vantaggiosa, tra l'altro, nella trattazione relativistica delle onde sonore fatta in [5]. La suddetta affinità è raggiunta almeno parzialmente, anche in [27] — v. 5 nota (6).

[9]) Naturalmente hanno carattere assoluto anche i primi membri delle equazioni fondamentali quali quelle gravitazionali. Questi sono noti in modo completamente esplicito mentre i funzionali costitutivi vengono introdotti con proposizioni esistenziali.

[10]) Si consideri per esempio il ruolo del nesso causale o della *necessità* (*fisica*) nell'Ass. V al n. 6 dove si afferma l'esistenza di certe equazioni (ossia di certi funzionali) da chiamarsi costitutive. Tale nesso apparirebbe ancora più essenziale per esempio qualora ci si addentrasse nelle questioni di unicità inerenti alle dette equazioni costitutive, accennate al n. 7.

* * *

Dal punto di vista logico [11]) l'uso di certe proposizioni condizionali fatto in [22] e in [28] si spiega in modo naturale riferendosi ad una logica modale come quella della possibilità causale di A. Burks — v. [7] — anzi, intendere certe condizionali usate in [22] e [28] Cap. V come implicazioni materiali porta a conseguenze inaccettabili, come si è mostrato in [1] Parte I.

In connessione con ciò, come già in [2] — v. [2] n. 8 — intendo la *possibilità fisica* di una proposizione A come una proprietà naturale, da saggiarsi mediante l'esperienza e non come compatibilità logica di A con gli assiomi della teoria (in quest'ultimo caso non la si potrebbe usare negli assiomi). Ciò naturalmente precisa anche il senso in cui intendo la *necessità* (*fisica*) *di* A (ossia l'impossibilità che A non sussista) e l'*esser* B *necessaria conseguenza di* A (impossibilità che A sussista e B no).

È noto che la logica modale è molto meno sviluppata di quella estensionale, cosicchè in genere quando si fanno teorie assiomatiche, esigenze di rigore inducono generalmente a basarsi su una logica estensionale — cfr. [1] n. 12 p. 117.

In [1] n. 8 ho stabilito appunto un metodo — in parte suggeritomi dall'uso delle « state-descriptions » fatto da R. Carnap in [8] — con cui tradurre in un linguaggio estensionale quelli modali [12]) usati in [22] e [28] Cap. X (tale metodo è applicato in [1],

---

[11]) Le considerazioni svolte nella rimanente parte dell'introduzione sono utili per una migliore comprensione della presente teoria, ma non strettamente necessarie.

[12]) Brevemente, si introduce come insieme dei casi possibili quello delle EUFP-evoluzioni, ossia evoluzioni dell'universo fisicamente possibile [1 nn. 5, 8] poi specificate nei CMP-casi ossia *casi meccanicamente possibili* [1 n. 15].

Indi si considera la trasformazione del concetto (contingente) di *posizione del punto materiale* M *all'istante* t in quello di *posizione di* M *all'istante* t *nell'*EUFP-*evoluzione* η — v. [1] p. 92 — e si trasformano analogamente gli altri concetti contingenti. Quindi ogni proposizione molecolare (ossia non composta con altre proposizioni) A^* è tradotta in una proposizione $A_{(\eta)}$ aperta rispetto ad η. Inoltre « *non* A^* » va tradotta in « *non* $A_{(\eta)}$ » e « A^* *e* B » in « $A_{(\eta)}$ *e* $B_{(\eta)}$ ». Infine « A^* *è* (*fisicamente*) *possibile* », « A^* *è* (*fisicamente*) *necessaria* » e « B^* *è una conse-*

Parte II, nella costruzione di una rigorosa teoria assiomatica di meccanica particellare classica ove si definiscono tra l'altro i concetti di massa e forza).

Il metodo in discorso è senz'altro applicabile (o, se si vuole, esso è immediatamente estendibile) alla presente teoria e ai suaccennati suoi ampliamenti e sviluppi [13]).

2. Preliminari.

Presuppongo il lavoro [3] e in parte anche [4]. In particolare conservo i cinque concetti primitivi [3 nn. 2, 3] di *punto evento,*

---

guenza (fisicamente) necessaria di A^* » si traducono ordinatamente in « *esiste una* EUFP-*evoluzione* η *in cui* $A_{(\eta)}$ *sussiste* », « *in ogni* EUFP-*evoluzione* η $A_{(\eta)}$ *sussiste* » e « *in ogni EUFP-evoluzione* η *o* $A_{(\eta)}$ *non sussiste, oppure sussiste* $B_{(\eta)}$ ».

[13]) I concetti primitivi contingenti di *metrica cronometrica del cronotopo* $\mathfrak{U}$, *sistema ammissibile di coordinate in* $\mathfrak{U}$ *e 4-regione occupata dalla porzione* $\mathfrak{S}$ *di materia* introdotti in **3** nn. 2, 3 subiscono una trasformazione analoga a quella considerata nella nota (12) per il concetto di posizione, ossia essi danno luogo alle seguenti proposizioni prime (da non confondersi con gli assiomi): « $g_{LM}dx^L dx^M$ *è la metrica cronometrica di* $\mathfrak{U}$ *nell'*EUFP-*evoluzione* η », « ψ^L *è un sistema ammissibile di coordinate in* $\mathfrak{U}$ *nell'*EUFP-*evoluzione* η » e « $\mathfrak{R}$ *è la 4-regione occupata dalla porzione* $\mathfrak{S}$ *di materia nell'*EUFP-*evoluzione* η ». Il concetto di punto evento — ossia $\mathfrak{U}$ — resta formalmente inalterato. Però direi che a causa del carattere contingente della metrica cronotopica e della mancanza, in generale, di un sistema privilegiato di coordinate, il concetto di punto evento in relatività differisce assai, dal punto di vista modale (ossia connesso con la possibilità), dal concetto di punto evento nella Fisica classica.

Il suaccennato metodo di traduzione estensionale considerato in [1] è conforme alla cosidetta « tesi di estensionalità » — v. [8] p. 141. Il fatto che ad esempio in [22] e nel testo [28] Cap. X si usi un linguaggio modale fa preferire alla suaccennata traduzione in un linguaggio estensionale una completa teoria (formale) di logica modale su cui basare direttamente i detti lavori scientifici — cfr. [8] p. 142 righe 14-18.

Ritengo utile approfondire un tale linguaggio anche per chiarire alcuni suaccennati aspetti modali del concetto di punto evento. Ciò mi risulta utile anche per chiarire questioni di interesse puramente fisico matematico.

sistema ammissibile di coordinate nel cronotopo o universo $\mathcal{U}$ (insieme di punti eventi), *metrica cronometrica in* $\mathcal{U}$, *porzione di materia* e 4-*regione occupata dalla porzione* $\mathcal{T}$ *di materia* — cfr. nota (13) —.

Si tratta di concetti espressi già piuttosto chiaramente dalle denominazioni per essi qui usate. Inoltre essi sono caratterizzati, direi con precisione, in **3** nn. 2,3 sia dal punto di vista intuitivo — v. in **3** n. 2 le condizioni α), ..., δ) — che assiomatico [**3** Ass. I, II, III]. Ora basta ricordare esplicitamente che, in primo luogo, un sistema ammissibile di coordinate in $\mathcal{U}$ è inteso come una corrispondenza [14]) $x^L = \psi^L(E)$ che muti il generico punto evento E in una quaderna x^L di numeri reali; in secondo luogo la metrica cronometrica coincide con quella $g_{LM}dx^L dx^M$ usualmente detta cronotopica. La suppongo di segnatura — 2, ossia localmente riducibile mediante un cambiamento di coordinate alla forma $\delta'_{LM}dx^L dx^M$ ove, detto δ_{LM} il simbolo di Kronecker, è

$$(1) \qquad \delta'_{lm} = -\delta_{lm}, \qquad \delta'_{OL} = \delta'_{LO} = \delta_{LO} .$$

Sia S_3^* uno spazio astratto, tridimensionale ed euclideo, e φ^* una configurazione della materia in S_3^* nella quale questa occupi il dominio [15]) C^*. Sia (y) un sistema di coordinate in S_3^* e $ds^{*2} = a^*_{\varrho\sigma}dy^\varrho dy^\sigma$ la metrica [16]). Le funzioni

$$(2) \qquad x^L = x^L(t, y^1, y^2, y^3) ,$$

rappresentino il moto $\mathcal{M}$ della materia — cfr. **3** n. 3, Ass. III f) — rispetto (al sistema ammissibile ψ^L, alla configurazione φ^* di

[14]) Tra l'altro, come in [3] e [4] ammetto che gli indici maiuscoli varino da 0 a 3 e quelli minuscoli da 1 a 3.

[15]) Si tratta di una rappresentazione della materia in S_3^*; precisamente, per ogni porzione $\mathcal{T}$ di materia $\varphi^*(\mathcal{T})$ è un dominio di S_3^*. In vista di ammettere spacchi, lacerazioni e mutui scorrimenti, verso la fine di **3** n. 3 si è definita *configurazione* (*in* S_3^*) come una quasi configurazione [**3** Def. 2.1] del tipo di quella considerata in **3** Ass. III.

[16]) Di massima convengo — come in [3], ..., [6] — che gli indici latini si riferiscano al cronotopo $\mathcal{U}$ e quelli greci ad S_3^*.

riferimento e) alla divisione C_1^*, C_2^*, ... di C^* in domini [**3** nota (23)] nel senso che la 4-regione occupata da una qualunque porzione $\mathfrak{S}$ di materia con $\varphi^*(\mathfrak{S})$ interno a qualche C_i^* è descritta dal punto $E = E(x^L)$ di $\mathcal{U}$ [$x^L = \psi^L(E)$] quando, stanti le equazioni (2), t descrive l'asse reale e il punto $P^* = P^*(y)$ — di coordinate y^ϱ nel sistema (y) — descrive il dominio $\varphi^*(\mathfrak{S})$ [nota (15)].

Le (2) soddisfano certe condizioni di regolarità in base a **3** Ass. III. Suppongo ora che esse siano continue ovunque, e a tratti di classe $C^{(n)}$. Sottintenderò l'ipotesi che esse siano di classe $C^{(n)}$ ovunque vengano considerate formule involgenti loro derivate di ordine n.

È utile richiamare alcune grandezze e alcune formule inerenti al moto (2) quali la 4-velocità u^L, il proiettore spaziale $\bar{g}^{LM}$, il gradiente $\alpha^L{}_\varrho$ di deformazione [note (14), (16)], il tensore $C_{\varrho\sigma}$ di Cauchy-Green e quello $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ di deformazione, ossia

$$(3) \qquad u^L = \frac{dx^L}{ds}\,, \qquad \bar{g}^{LM} = g^{LM} - u^L u^M\,, \qquad \alpha^L{}_\varrho = \bar{g}^L{}_A \frac{\partial x^A}{\partial y^\varrho}\,,$$

$$(4) \qquad C_{\varrho\sigma} = a^*_{\varrho\sigma} + 2\varepsilon_{\varrho\sigma} = - g_{LM}\alpha^L{}_\varrho \alpha^M{}_\sigma \qquad (ds^{*2} = a^*_{\varrho\sigma} dy^\varrho dy^\sigma).$$

Al fine di considerare anche materiali di ordine n [nota (2)] con $n > 1$, fissato il punto evento E si consideri in E un riferimento localmente proprio e geodetico, ossia verificante le eguaglianze

$$(5) \qquad g_{LM} = \delta'_{LM}\,, \qquad u^L = \delta^L_0\,, \qquad \left\{ {}^{\,L}_{AB} \right\} = 0\,.$$

Si può fare in (2) un cambiamento del parametro temporale t [**3** n. 4]

$$(6) \qquad t = \bar{t}(\bar{t}, y^1, y^2, y^3)\,,$$

in modo che per $\bar{t} = \bar{t}_E$ l'ipersuperficie

$$(7) \qquad x^L = \bar{x}^L(\bar{t}, y) \equiv x^L[t(\bar{t}, y), y]\,,$$

sia quella S_E per E ivi ortogonale ad u^L e totalmente geodetica, ossia riempita da geodetiche per E. Sia $\tilde{\bar{x}}^L{}_{;\varrho_1 \ldots \varrho_n}$ il doppio tensore, derivato assoluto $(n-1)$-*mo* del doppio tensore $\partial \tilde{\bar{x}}^L / \partial y^{\varrho_1}$ rispetto alla corrispondenza fra C^* ed S_E espressa da (7) per $\bar{t} = \bar{t}_E$ — vedi [13] pag. 811 e **3** n. 12 —.

Si è dimostrato che [17] $\tilde{\bar{x}}^L{}_{;\varrho} = u^L{}_\varrho$ [**3** (122)].

3. Storie cinematiche intrinseche.

Preliminarmente, in armonia con la trattazione classica svolta in [20] p. 205, sia I un insieme arbitrario. Allora si indicherà con I^* la classe delle funzioni con i valori in I e col semiasse reale negativo per dominio.

Se α è una funzione definita sull'asse reale e con i valori in I diciamo *storia della funzione* α *sino all'istante* t la funzione α^t $(\alpha^t \in I^*)$ per cui

$$(8) \qquad \alpha^t(\sigma) = \alpha(t + \sigma) \quad \text{per} \quad \sigma \leqslant 0 \qquad [\text{onde } \alpha^t(0) = \alpha(t)].$$

Identifichiamo per semplicità t col tempo proprio römeriano s, ossia imponiamo alle funzioni (2) la condizione

$$(9) \qquad \frac{ds}{dt} = g_{LM} \frac{\partial x^L}{\partial t} \frac{\partial x^M}{\partial t} = 1 \, .$$

Allora, fissato $P^* = P^*(y)$ nel dominio delle funzioni (2) possiamo pensare la parte spaziale $\tilde{g}^L{}_A \tilde{\bar{x}}^A{}_{;\varrho_1 \ldots \varrho_n}$ della funzione $\tilde{\bar{x}}^L{}_{\varrho_1 \ldots \varrho_n}$ come funzione di t tramite (2). Ciò vale anche per $g_{LM} = g_{LM}(x^L)$ e per $\tilde{g}_{LM}$.

Fissati P^* e t non si può identificare la storia cinematica di ordine n fino all'istante t in P^* con l'insieme delle storie fino

[17]) L'eguaglianza $\tilde{\bar{x}}^L{}_{;\varrho} = u^L{}_\varrho$ è utile in quanto porge per $\tilde{\bar{x}}^L{}_{;\varrho}$ un'espressione tensoriale esplicita $[(3)_3]$ indipendente anche dalla scelta del parametro temporale. Una tale espressione è stata determinata in [3] anche per $\tilde{\bar{x}}^L{}_{;\varrho\sigma}$ [**3** $(136)_2$, **3** (122)].

all'istante t delle $\tilde{g}^L{}_A \tilde{\bar{x}}^A{}_{;\varrho_1 \ldots \varrho_n}$ $(m = 1, \ldots, n)$ e delle g_{LM} intese appunto come funzioni di t tramite (2). Infatti (pensando all'ovvio analogo classico della detta storia) si riconosce che poichè tale insieme (di funzioni) è privo di elementi atti a caratterizzare un sistema di coordinate in $\mathfrak{U}$, la storia cinematica in P^* e t resterebbe indeterminata per un movimento rigido, ossia per la rotazione locale e l'accelerazione locale ad ogni istante (e, se si vuole, anche per la posizione e la velocità finali).

Si è dimostrato che il tensore $\tilde{\bar{x}}^L{}_{;\varrho} = \alpha^L{}_\varrho$ ammette la decomposizione

$$(10) \quad \begin{cases} \bar{x}^L{}_{;\varrho} = \alpha^L{}_\varrho = R^L{}_\tau \mathfrak{D}^\tau{}_\varrho\,, \quad \text{con} \quad C_{\varrho\sigma} = \mathfrak{D}_{\varrho\tau}\mathfrak{D}_\varrho{}^\tau\,, \quad \mathfrak{D}_{\varrho\sigma} = \mathfrak{D}_{\sigma\varrho} \quad \text{e} \\ \mathfrak{D}_{\varrho\sigma}\xi^\varrho\xi^\sigma \text{ definita } > 0\,, \end{cases}$$

nel rotore $R^L{}_\varrho$ e nella dilatazione pura $\mathfrak{D}_{\varrho\sigma}$ e che conseguentemente si ha [**3** (29)]

$$(11) \qquad R_{L\varrho}R^L{}_\sigma = - \overset{*}{a}_{\varrho\sigma}\,, \qquad R^L{}_\varrho R^{M\varrho} = - \tilde{g}^{LM}\,, \qquad u_L R^L{}_\varrho = 0\,.$$

Come si è osservato in **3** n. 6 il rotore $R^L{}_\varrho$ in effetti individua non una rotazione ma uno spostamento rigido — precisamente un'isometria — tra S_3^* e lo spazio Σ_3 tangente ad $\mathfrak{U}$ in $E(x^L)$ e ortogonale ad u^L; in particolare $R^L{}_\varrho$ non individua alcun angolo di rotazione.

Però si può parlare di storia della rotazione. Questa è caratterizzata, assieme alla storia dell'accelerazione locale, dalla storia del tensore $u_{L/M}$ pensato come una funzione di t tramite (2).

Per visualizzare quanto precede e anche future considerazioni, in particolare connesse col principio di indifferenza materiale, conviene associare al generico elemento materiale ε e al generico istante t [(2), (9)] — ossia al generico punto evento E occupato da materia — una terna di Fermi. Precisamente sia $\lambda_\varrho^{*(i)}$ una terna ortogonale di versori in S_3^* $[a^{*\varrho\sigma}\lambda^{*(i)}_\varrho\lambda^{*(j)}_\sigma = \delta^{ij}]$ e sia $\lambda_L^{(i)} = R_L{}^\varrho\lambda_\varrho^{*(i)}$ la sua trasformata mediante il rotore $R^L{}_\varrho$ onde [**3** n. 7] la $\lambda^{(i)}_L$ è una terna ortogonale di versori spaziali $[g^{LM}\lambda_L^{(i)}\lambda_M^{(j)} = \delta^{ij},\ \lambda_L^{(i)}u^L = 0]$.

Per ogni $t' < t$ [(9)] sia $f_L^{(i)} = f_L^{(i)}(t', E)$ la terna di Fermi coincidente con la $\lambda^{(i)}{}_L$ per $t' = t$ cosicchè le quattro funzioni $f_L^{(i)}(t', E)$ di t' sono determinate dalle equazioni differenziali del trasporto di Fermi [18]), ossia

$$(12)\quad \frac{Df_L^{(i)}}{Ds} \equiv \frac{\partial f_L^{(i)}}{\partial t'} - \left\{ {}_{LA}^{\,B} \right\} u^A f_B^{(i)} = f_M^{(i)} \frac{Du^M}{Ds} u_L \equiv f_M^{(i)} u^M{}_{/B} u^B u_L \,,$$

e dalle condizioni iniziali $f_L^{(i)}(t, E) = \lambda_L^{(i)}$. Sappiamo — [30] Chap. I, § 4 — che la terna $f_L^{(i)}$ è ortonormale e spaziale $[g^{LM} f_L^{(i)} f_M^{(j)} = f_L^{(i)} u^L = 0]$ perchè tale è la $\lambda_L^{(i)}$.

La terna $f_L^{(i)}$ con l'origine nell'elemento ε in questione è l'analogo relativistico della classica terna (non rotante) di origine in ε e con gli assi di direzione invariabile rispetto al generico spazio inerziale (ossia rispetto alle stelle fisse) — v. [30] p. 14.

Si consideri il generico doppio tensore — v. [13] p. 805 oppure **3** (14) — spaziale [19]) $T^{L_1 \dots L_n}{}_{\varrho_1 \dots \varrho_\nu}$ dipendente da x^L, onde da t e y^ϱ tramite (2). Fissato $E = E(x^L) = E[x^L(t, y)]$, per ogni $t' \leqslant t$ si calcolino le componenti intrinseche

$$(13)\quad T^{(i_1 \dots i_n)}{}_{\varrho_1 \dots \varrho_\nu}(t', E) = T^{L_1 \dots L_n}{}_{\varrho_1 \dots \varrho_\nu}[x^L(t', y)] f_{L_1}^{(i_1)}(t', E) \dots f_{L_n}^{(i_n)}(t', E) \,.$$

Pensate queste come funzioni di t' si denoti la loro storia fino all'istante t come segue [20]):

$$(14)\qquad \{T^{i_1 \dots i_n}{}_{\varrho_1 \dots \varrho_\nu}\}_E = \{T^{i_1 \dots i_n}{}_{\varrho_1 \dots \varrho_\nu}\}_{P^*, t} = (T^{(i_1 \dots i_n)}{}_{\varrho_1 \dots \varrho_\nu})^t \,.$$

La storia di tali componenti può dirsi la ***storia intrinseca del doppio tensore*** $T^{L_1 \dots L_n}{}_{\varrho_1 \dots \varrho_\nu}$ ***in*** E ***(relativa alla terna*** $\lambda^{*(i)}_{\ \varrho}$ ***in*** S_3^****)***.

In connessione con l'elemento materiale ε, detti $\varphi(t')$, $\psi(t')$

---

[18]) Vedi in [30] la definizione (84) di trasporto secondo Fermi a p. 15 e tieni conto di **30** (55) a p. 10 ricordando che il versore tangente alla traiettoria di ε in $\mathcal{V}$ — indicato in [30] con A^i — è u^L.

[19]) Dico che nel doppio tensore $T^{\dots L}{}_{\dots \varrho}$ l'indice L è (*propriamente*) *spaziale* [**3** n. 5] se, stante $(3)_1$, è $T^{\dots L}{}_{\dots \varrho} u_L = 0$. Dico che $T^{\dots L}{}_{\dots \varrho}$ è propriamente spaziale se tali sono tutti i suoi indici latini, v. [10] p. 160.

[20]) Precisamente, in conformità di (8), $(T^{(i_1 \dots i_n}{}_{\varrho_1 \dots \varrho_\nu})^t$ è la funzione reale $\Phi(\sigma)$ definita per $\sigma \leqslant 0$ e tale che, stante (13), $\Phi(\sigma) = T^{(i_1 \dots i_n)}{}_{\varrho_1 \dots \varrho_\nu}(t + \sigma, E)$ per ogni $\sigma \leqslant 0$.

e $\vartheta(t')$ gli angoli di Eulero della terna $\lambda_L^{(i)}(t') = R_L{}^\varrho(t, y)\lambda^{*(i)}_\varrho$ rispetto alla $f_L^{(i)}(t', E)$, le storie φ^t, ψ^t e ϑ^t caratterizzano la storia della rotazione locale. Per le eguaglianze $f_L^{(i)}(t, E) = \lambda_L^{(i)}$ le possibili storie del tipo detto devono soddisfare alle (sole) condizioni — v. $(8)_3$ —

$$\varphi^t(0) + \psi^t(0) = 0\,, \qquad \vartheta^t(0) = 0\,, \tag{15}$$

le quali possono non sussistere nel caso classico.

Introdotta l'accelerazione propria $a^L = u^L{}_{/M}u^M$, stanti le convenzioni (13) e (14) dirò *storia cinematica* (*intrinseca*) *in* E *d'ordine* n *o di ordine* ∞, il complesso delle storie (intrinseche)

$$\{ a^{(i)} \}_E\,, \qquad \{\bar{\tilde{x}}^{(i)}{}_{;\varrho_1 \dots \varrho_m}\}_{r^*, t} \qquad (a^L = u^L{}_{/M}u^M), \tag{16}$$

per $m = 1, \dots, n$ e rispettivamente per $m = 1, 2, \dots$.

Nel cronotopo $\mathcal{V}$ la metrica dipende dai fenomeni che si svolgono in $\mathcal{V}$, quindi gli stessi punti eventi dipendono, in certo senso, dalla contingenza dei fatti. Perciò, a differenza di quanto comunemente si fa in Fisica classica, nella presente teoria non presupporrò di poter determinare, ad esempio, un istante, una posizione o una velocità di traslazione di un elemento materiale ε in modo assoluto (ossia prescindendo dalla contingenza dei fatti). Si può però dare in tal modo l'accelerazione propria a^L e la velocità angolare $\omega_{LM} = (u_{B/A} - u_{A/B})\bar{g}^A{}_L\bar{g}^B{}_M$. Basta darne le componenti intrinseche $a^{(i)}$ e $\omega^{(i,m)}$ rispetto alla terna $\lambda^{(i)}{}_L = R_L{}^\varrho\lambda^{*(i)}_\varrho$. L'orientazione intrinseca di a^L e ω_{LM}, ossia quella rispetto alla materia, è nota appena siano note le quantità $a^{(i}$ e $\omega^{(i,m)}$ e la terna $\lambda^{*(i)}_\varrho$ (non dipendente dalla contingenza dei fatti).

La storia cinematica di ordine n è espressa da (1) in modo assoluto nel senso testè chiarito. Va detto che nemmeno per $n = 1$ le storie (16) sono arbitrarie funzioni reali definite sul semiasse reale negativo. Infatti vale la decomposizione $(10)_{1,2}$ di $\bar{\tilde{x}}^L{}_\varrho$ per ogni $t' \leqslant t$ e per $t' = t$ è $f_L^{(i)}(t', E) = \lambda_L^{(i)} = R_L{}^\varrho\lambda^{*(i)}_\varrho$. Allora per $t' = t$ in base a **3** (32) si ha $R^{(i)}_\sigma = \lambda^{*(i)}_\sigma$ onde per (10) in $\sigma \equiv t' - t = 0$ la storia $\{\bar{\bar{x}}^{(i)}{}_{;\varrho}\}_E$ soddisfa la limitazione corrispondente alla condizione

$$(17) \qquad \bar{\bar{x}}^{(i)}{}_{;\varrho} = R^{(i)}_{\tau}\mathfrak{D}^{\tau}{}_{\varrho} = \lambda^{*(i)}_{\tau}\mathfrak{D}^{\tau}{}_{\varrho} \qquad \text{per} \qquad \sigma \equiv t' - t = 0 \ .$$

Tale limitazione, naturalmente non considerata nella corrispondente teoria classica [20], equivale alle (15) ossia riflette il fatto che nella presente teoria non si dà la rotazione locale ad un dato istante in modo assoluto.

4. Assioma di regolarità su j, E_L e H_L. Storie termo-magneto-cinematiche.

Ai tre concetti primitivi di *punto evento, porzione di materia* e *4-dominio occupato (in $\mathcal{U}$) da una porzione di materia* aggiungo i seguenti quattro dei quali i primi due sono essenzialmente legati alla materia. Tali concetti sono precisamente relazioni che conviene esporre nella forma di proposizioni *prime* (da non confondersi con gli assiomi) tanto più che nel seguito sarà utile riferirsi ad esse appunto come alle proposizioni 1), ..., 4). Esse sono:

1) *T è la temperatura assoluta nel punto-evento E (occupato da materia)*;

2) *j è la densità (propria) di carica elettrica* (in U.E.A., *per cm*^{3}) *nel punto-evento E (occupato da materia)* — intendo precisamente che jdC è la carica elettrica contenuta nella regione tridimensionale dC ortogonale alla velocità u^L della materia in E, rispetto ad un osservatore solidale con questa —;

3) *E_L rappresenta nel sistema ammissibile ψ^L di coordinate in $\mathcal{U}$ il campo elettrico misurato in E da un osservatore di 4-velocità* [21]) *w^L*;

[21]) Riguardo al significato fisico del campo elettrico E_l nei corpi conviene rifarsi ad esperienze ben note nel caso classico, possibili almeno in linea di principio e aventi senso (a causa del loro carattere locale) anche in relatività generale. Precisamente pongo ora in forma opportuna alcune considerazioni svolte in [26] pag. 125 per materiali isotropi

4) *H_L rappresenta nel sistema ammissibile ψ^L il campo magnetico misurato in E da un osservatore di 4-velocità* [22]) w^L.

Enuncio ora il seguente assioma [23]) di esistenza ove sono stabilite proprietà di regolarità.

---

ma valide pure per quelli anisotropi, modificandole affinchè le esperienze in esse indicate per determinare il campo elettrico E_l e l'induzione elettrica D_l divengano indipendenti dalla conoscenza del vettore di polarizzazione $P_l = (D_l - E_l)/4\pi$.

Limitandosi al caso statico, per maggiore concretezza, fissiamo ad arbitrio un asse ξ per il punto P^* in cui si voglion conoscere E_l (e D_l). Asportiamo dal detto corpo della materia in modo da formarvi una cavità cilindrica infinitesima (vuota) con P^* per centro e ξ per asse di rivoluzione. L'altezza h di tale cavità sia infinitesima d'ordine superiore alla base σ.

Si tenga ora conto che nel vuoto è $D_l = E_l$ e inoltre attraverso le superfici di discontinuità del tensore dielettrico η_{lh} la componente tangenziale $E_l^{(t)}$ di E_l e quella normale $D_l^{(t)}$ di D_l sono continue.

Si determini il campo elettrico $\tilde{E}_l = \tilde{E}_l(\xi)$ nella cavità (precisamente in P^*) misurando l'accelerazione di una particella di prova inizialmente in P^* con velocità nulla, la detta particella essendo dotata di massa e carica elettrica note e piccolissime.

Per la piccolezza della cavità il campo elettrico nell'elemento del corpo situato nell'intersezione dell'asse ξ con la base superiore della cavità, coincide a meno di infinitesimi col campo elettrico esistente in P^* nel caso che la cavità non ci sia; l'analogo vale per l'induzione elettrica.

In base a quanto precede è $\tilde{E}_l^{(t)} = E_l^{(t)}$ e $\tilde{E}_l^{(n)} = D_l^{(n)}$. Dunque la detta esperienza ci fa conoscere la componente di E_l normale a ξ e quella di D_l parallela a ξ. Allora facendo variare ξ si può dunque determinare E_l (e anche D_l).

[22]) Volendo applicare il metodo di estensionalizzazione [nota (12)] introdotto in [1], le proposizioni (prime) 1), ..., 4) vanno modificate come si è fatto per il concetto di *posizione* [nota (12)] oppure quelli di *metrica cronometrica, di sistema ammissibile di coordinate in* $\mathfrak{U}$ e di *4-regione occupata in* $\mathfrak{U}$, ossia mediante l'aggiunta della frase « nell'EUFP-evoluzione η ».

[23]) Mi limito a mettere i seguenti assiomi in nota perchè, nei presenti argomenti non si usa elencare assiomi di tale tipo in quanto son ritenuti come ovvi o magari come impliciti nell'elenco dei concetti primitivi figuranti negli assiomi in discorso.

Assioma I*: *Ciascuna delle proposizioni* 1) *e* 2) *implica che E sia un punto-evento appartenente al 4-dominio occupato da tutta la materia. Inoltre da esse segue che T e rispettivamente j sono numeri reali.*

Assioma 4: *Sia $C^* = C^*(\varphi^*)$ il dominio in S_3^* occupato dalla materia $\overline{\mathcal{T}}$* [**3** Def. 3.1, **1** nota (25)] *e ψ^L un sistema ammissibile di coordinate* [**3** n. 2]. *Allora si possono trovare una divisione C_1^*, C_2^*, ... di $C^* = C^*(\varphi^*)$ in domini e quattro funzioni reali*

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} T &= T(x) = T(x^0, \dots, x^3)\,, \qquad j = j(x)\,, \\ E_L &= E_L(x)\,, \qquad H^L = H^L(x)\,, \end{aligned}\right.$$

verificanti le seguenti condizioni:

a) nell'interno del 4-dominio C_i, trasformato di C_i^* mediante le funzioni (2) *rappresentanti il moto della materia (rispetto a φ^*, ψ^L e C_1^*, C_2^*, ...), le funzioni $T(x)$ e $j(x)$ sono uniformemente continue e $T(x)$ è di classe C^2; inoltre ivi T e j hanno i significati fisici espressi dalle proposizioni* 1) *e* 2).

a) Le funzioni $E_L = E_L(x)$ e $H_L = H_L(x)$ sono di classe [24]) *(C^0, C^1) e hanno i significati fisici espressi dalle proposizioni* 3) *e* 4) *per $w^L = \delta^L{}_0$ ossia rispetto ad un osservatore solidale col sistema ψ^L di coordinate.*

Per snellire alcuni prossimi enunciati, riguardo a condizioni di regolarità che in essi devono intervenire, conviene porre la seguente definizione:

Definizione 4.1: *Dirò che le funzioni reali ψ^L, $x^L = x^L(t, y^1, y^2, y^3)$* [(2)], *le $g_{LM} = g_{LM}(x)$ e le* (18) *rappresentano (rispetto a φ^* e alla divisione C_1^*, C_2^*, ... di $C^* = C^*(\varphi)$ in domini) l'attuale processo termo-magneto-cinematico se valgono le seguenti condizioni:*

a) ψ^L è un sistema ammissibile di coordinate nel cronotopo $\mathcal{U}$.

Assioma II*: *Ciascuna delle proposizioni* 3) *e* 4) *implica che E sia un punto-evento, che φ^* sia un sistema ammissibile di coordinate in $\mathcal{U}$ e che in E sia $g_{LM}w^L w^M = 1$ ove $g_{LM}dx^L dx^M$ è la metrica cronometrica. Inoltre la proposizione* 3) implica (*che E_0, ..., E_3 siano numeri reali con*) $E_L w^L = 0$ *e la* 4) *che sia $H_L w^L = 0$.*

Assioma III*: *Dati ad arbitrio il punto evento E e il versore w^L esiste al più un vettore E_L verificante la condizione* 3) *e uno H_L verificante la* 4).

[24]) Una funzione si dice di classe (C^r, C^s) se è continua ovunque assieme alle sue derivate di ordine $\leq r$ e a tratti lo è assieme a quelle di ordine $\leq s$.

b) Rispetto a ψ^L *la metrica* $ds^2 = g_{LM}dx^L dx^M$ *è la metrica cronometrica in* $\mathfrak{U}$ [**3** n. 2].

c) Le funzioni $x^L = x^L\ (t, y^1, y^2, y^3)$ *rappresentano (rispetto a* φ^*, ψ^L *e* C_1^*, C_2^*, ... *il moto della materia* — cfr. **3** n. 2 Ass. II *f*) — *cosicchè, tra l'altro, esse sono definite per t qualunque e per* $P^* = P^*(y)$ *interno a un qualunque dominio* C_i^* $(i = 1, 2, ...)$.

d) Le funzioni $T = T(x)$ e $j = j(x)$ *soddisfano* (9) — *ossia è* $t \equiv s$, *beninteso lungo le linee orarie.*

e) Le funzioni $T = T(x)$ *e* $j = j(x)$ *sono uniformemente continue nell'interno del trasformato* C_i *di* C_i^* *mediante le funzioni* (2); *le* $E_L = E_L(x)$ ed $H_L = H_L(x)$ *sono di classe* (C^0, C^1) [nota (24)] *e assieme alle prime due hanno i significati fisici espressi dalle precedenti proposizioni* 1), ..., 4).

5. Su una equivalenza di storie termo-magneto-cinematiche. Storie lagrangiane a queste associate.

Riprese le funzioni considerate nella Def. 4.1, si fissi t e $P^* = P^*(y)$ con P^* interno a qualche C_i^* e inoltre, stante (2), sia $E = E\ [x(t, y)]$.

Riprese, in relazione a P^*, la terna $\lambda^{*(i)}_{\varrho}$ in S_3^* e le terne $\lambda_L^{(i)}(t)$ e $f_L^{(i)}(t', E)$, stante (2), si aggiungano alle posizioni (18) le

$$T(t') = T[x(t', y^\sigma)]\ , \qquad j = j[x(t', y^\sigma)]\ , \tag{19}$$

$$\begin{cases} E^{(i)}(t') = E^L[x(t', y^\sigma)]f_L^{(i)}(t', E)\ , \\ H^{(i)}(t') = H^L[x(t', y^\sigma)]f^{(i)}(t', E)\ . \end{cases} \tag{20}$$

DEFINIZIONE 5.1: *Le funzioni* ψ^L, $g_{LM} = g_{LM}(x)$, *le* (2) *e le* (18) *rappresentino l'attuale processo termo-magneto-cinematico (rispetto a* φ^* *e alla divisione* C_1^*, C_2^*, ...). $P^* = P^*(y)$ *sia interno a qualche* C_i^* *e il punto evento E corrisponda a* P^* *e t mediante* (2). *Allora per* $n < +\infty$ *si dirà (attuale) storia termo-magneto-cinematica in E (o in* P^* *e t) d'ordine* ν *(rispetto alla considerata terna* $\lambda^{*(i)}_{\varrho}$ *in* S_3^* *e al sistema* ψ^L *di coordinate in* $\mathfrak{U}$) *l'insieme delle funzioni — definite mediante la relazione funzionale* (8) —

$$\begin{cases} (a^{(i)})^t\ , \quad (\bar{\bar{x}}^{(i)}_{\varrho_1})^t\ , \quad \dots\ , \quad (\bar{\bar{x}}^{(i)}_{\varrho_1 \dots \varrho_n})^t\ , \quad T^t\ , \\ \qquad j^t\ , \quad (E^{(i)})^t\ , \quad (H^{(i)})^t \end{cases} \tag{21}$$

ove $a^{(i)}, \dots, H^{(i)}$ *hanno i significati sopra considerati* [25]) [(16), (19), (20)].

Convengo che la storia di ordine $\nu = \infty$ *si formi riunendo tutte le dette storie d'ordine* n *comunque elevato.*

DEFINIZIONE 5.2: *Dirò ammissibile storia termo-magneto-cinematica equivalente alla* (21) *ogni insieme di funzioni avente la forma*

$$
(22) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha^{(i)})^t, \quad (\omega_{hi}\tilde{x}^{(i)}{}_{\varrho_1})^t, \quad \dots, \quad (\omega_{hi}\tilde{\tilde{x}}^{(i)}{}_{\varrho_1\dots\varrho_n})^t \quad T^t, \\ \qquad j^t, \quad (\omega_{hi}E^{(i)})^t, \quad (\omega_{hi}H^{(i)})^t \end{array} \right.
$$

dove $(\alpha^{(i)})^t$ *è una storia (reale)* [n. 3] *arbitraria* $(i = 1, 2, 3)$ *e* $\| \omega_{hi}(t') \|$ *è una arbitraria matrice ortogonale, funzione regolare di* t' $(t' \leqslant t)$ *e tale che* [26])

$$
(23) \qquad \omega_{hi}(t) = \delta_{hi}
$$

$$
\left(\sum_{i=1}^{3} \omega_{hi}(t')\omega_{ki}(t') = \delta_{hk} \text{ per } t' \leqslant t \right).
$$

L'estensione al caso $\nu = +\infty$ *è ovvia.*

Ogni storia termo-magneto-cinematica contiene una storia cinematica (intrinseca) dello stesso ordine che dirò ad essa ***associata***. Dunque è chiaro cosa intendere per equivalenza di due storie cinematiche di ordine ν.

Conviene introdurre i corrispondenti lagrangiani $\tilde{C}_{\sigma\varrho_1\dots\varrho_n}$ [**3** (123)$_2$], E^*_σ e H^*_σ di $\tilde{\tilde{x}}^L{}_{\varrho_1\dots\varrho_n}$, E_L ed H_L. Riferendosi alle componenti intrinseche rispetto alla terna $\lambda^{(i)}_L = R_L{}^\varrho \lambda^{*(i)}_\varrho$, in base a

---

[25]) Le grandezze $a^{(i)}, \dots, H^{(i)}$ sono pensate come funzioni di t'. Per non introdurre ulteriori simboli uso $a^{(i)}, \dots, H^{(i)}$ anche per esprimere i suaccennati legami funzionali.

[26]) Si noti che in certo senso le storie (21) e (22) differiscono per il moto rigido caratterizzato dall'accelerazione intrinseca $\alpha^{(i)}(t') - a^{(i)}(t')$ e dalla rotazione $\omega_{hi}(t')$ $(t' \leqslant t)$.

3 $(34)_2$ e alle analoghe per doppi tensori a più indici si ha

$$(24)\qquad \tilde{C}_{\sigma\varrho_1\ldots\varrho_m} = -\,\alpha_{L\sigma}\bar{\bar{x}}^L{}_{\varrho_1\ldots\varrho_m} = -\,\alpha_{(i)\sigma}\bar{\lambda}^{(i)}_L\lambda^{(j)L}\bar{\bar{x}}_{(j)\varrho_1\ldots\varrho_m} = \\ = \delta_{ij}\bar{\bar{x}}^{(i)}_\sigma\bar{\bar{x}}^{(j)}_{\varrho_1\ldots\varrho_m}\,,$$

$$(25)\qquad E^*_\sigma = \alpha^L{}_\sigma E_L = \delta_{ij}\bar{\bar{x}}^{(i)}_\sigma E^{(j)}\,,\qquad H^*_\sigma = \alpha^L{}_\sigma H_L = \delta_{ij}\bar{\bar{x}}^{(i)}H^{(j)}\,.$$

DEFINIZIONE 5.3: *Fissati* $P^* = P^*(y)$ *e* t, *considerata la storia termo-magneto-cinematica* (21) *e pensate le quantità* $\tilde{C}_{\sigma\varrho_1\ldots\varrho_m}$, E^*_σ e H^*_σ [(24), (25)] *come funzioni di* t' *definite per* $t' \leqslant t$ (*e supposto* $\lambda^{*(i)}_\varrho = \delta^\varrho_i$ *in* P^*) *dirò che l'insieme*

$$(26)\qquad (\tilde{C}_{\sigma\varrho_1})^t\,,\ \ldots\,,\quad (\tilde{C}_{\sigma\varrho_1\ldots\varrho_n})^t\,,\quad T^t\,,\quad j^t\,,\quad (E^*_\sigma)^t\,,\quad (H^*_\sigma)^t$$

di funzioni di $\sigma = t' - t$ [(8)] *costituisce la storia* (*termo-magneto-cinematica*) *lagrangiana* (*relativa a* P^* *e* t) *associata alla storia* (21).

TEOREMA 5.1: *Due ammissibili storie termo-magneto-cinematiche qualsiasi sono equivalenti* [Def. 5.2] *se e solo se coincidono le storie lagrangiane* [(26)] *ad esse associate.*

Infatti si considerino le storie (21) e (22), magari con $t = 0$.

Come è facile riconoscere in base a $(23)_2$, per ogni $t' \leqslant t$ i valori di $\tilde{C}_{\sigma\varrho_1\ldots\varrho_n}$, E^*_σ *e* H^*_σ *forniti da* (24) *e* (25) *mediante* $\bar{\bar{x}}^{(i)}_\sigma$ *e* $\bar{\bar{x}}^{(j)}{}_{\varrho_1\ldots\varrho_n}$ *non mutano sostituendo tali quantità con* $\omega^i{}_h\bar{\bar{x}}^{(h)}{}_\sigma$ e $\omega^i{}_h\bar{\bar{x}}^{(h)}{}_{\varrho_1\ldots\varrho_n}$ $[\omega_{hi} = \omega^h{}_i]$. Dunque la storia lagrangiana (26) è associata sia alla storia (21) che alla (22).

Viceversa consideriamo ora, magari per $t = 0$, accanto alla (21) la storia termo-magneto-cinematica

$$(\overline{21})\qquad (\alpha^{(i)})^t\,,\quad (\bar{x}^{(i)}_{\varrho_1})^t\,,\ \ldots\,,\quad (\bar{x}^{(i)}_{\varrho_1\ldots\varrho_n})^t\,,\quad (\overline{T})^t\,,\quad (\bar{j})^t\,,\quad (\overline{E}^{(i)})^t\,,\quad (\overline{H}^{(i)})^t\,;$$

e supponiamo che alle (21) e $(\overline{21})$ sia associata la stessa storia lagrangiana (26). Evidentemente per ogni $t' \leqslant t$, in primo luogo è $T = \overline{T}$ e $j = \bar{j}$. In secondo luogo, in t' valgono le $(10)_{1,2}$ e le analoghe per $\bar{x}^L{}_\varrho$, ossia le $\bar{x}^L{}_\varrho = \bar{\alpha}^L{}_\varrho = \overline{R}^L{}_\tau\overline{\mathfrak{D}}^\tau{}_\varrho$ $(t' \leqslant t)$. Inoltre per **3** (36) in t' si ha $R^L{}_\sigma = \lambda^L{}_{(j)}\lambda^{*(j)}_\sigma = \lambda^L{}_{(j)}(t')\lambda^{*(j)}_\sigma$ e analogamente

$\overline{R}^L{}_\sigma = \lambda^L{}_{(j)}(t')\overline{\lambda}^{*(j)}_\sigma$ $(t' \leqslant t)$. Allora [(13)] per $t' \leqslant t$ in t' è

$$(27)\qquad \tilde{x}^{(i)}_{\varrho_1} = f^{(i)}_L R^L{}_\sigma \mathfrak{D}^\sigma{}_{\varrho_1} = f^{(i)}_L \lambda^L_{(j)} \lambda^{*(j)}_\sigma \mathfrak{D}^\sigma{}_{\varrho_1}\,, \qquad \overline{x}^{(i)}_{\varrho_1} = \overline{f}^{(i)}_L \lambda^L_{(j)} \overline{\lambda}^{*(j)}_\sigma \overline{\mathfrak{D}}^\sigma{}_{\varrho_1}\,.$$

Per ogni $t' \leqslant t$ le terne $f^{(i)}_L$ e $\lambda^{(i)}_L$ sono spaziali [nota (19)] e ortonormali, ossia

$$(28)\qquad f^{(i)}_L f^{(j)L} = \delta^{ij}\,, \qquad f^{(i)}_L u^L = 0\,; \qquad \lambda^{(i)}_L \lambda^{(j)L} = \delta^{ij}\,, \qquad \lambda^{(i)}_L u^L = 0\,,$$

in base a note proprietà della terna $f^{(i)}_L$ di Fermi e a **3** $(31)_{1,3}$. Allora in t' sono ortogonali le matrici [27] $\| f^{(i)}_L \lambda^{(j)L} \|$ e $\| \overline{f}^{(i)}_L \overline{\lambda}^{(j)L} \|$.

Essendo $\tilde{\tilde{x}}^L_{;\varrho} = \alpha^L_\varrho$ $[(10)_1]$ per (4) e $(24)_1$ è $\tilde{C}_{\sigma\varrho} = C_{\varrho\sigma}$ e $C_{\varrho\sigma}$ individua $\mathfrak{D}_{\tau\sigma}$ $[(10)_{3,4,5}]$. Inoltre la storia lagrangiana (26) è associata sia alla storia (21) che alla $(\overline{21})$. Ne segue che per ogni $t' \leqslant t$ è $\mathfrak{D}_{\sigma\tau} = \overline{\mathfrak{D}}_{\sigma\tau}$. Allora, per l'ortogonalità delle due suddette matrici, (27) implica che per ogni $t' \leqslant t$ esiste una matrice $\| \omega^i{}_h \|$ con

$$(29)\qquad \overline{x}^{(i)}_{;\varrho} = \omega^i{}_h \tilde{\tilde{x}}^h_{;\varrho} \qquad (\delta_{ij}\omega^i{}_h\omega^j{}_k = \delta_{hk};\ \omega^i{}_h = \omega_{ih} = \omega_i{}^h)\,.$$

Poichè il tensore $\mathfrak{D}_{\sigma\varrho}$ è una dilatazione pura $[(10)_4]$ esso è invertibile. Inoltre la matrice $\| f^{(i)}_L \lambda^L_{(j)} \|$ è ortogonale. Allora nella lecita ipotesi $\lambda^{*(i)} = \delta^j_\sigma$ da (27) si riconosce facilmente che le matrici $\| \tilde{\tilde{x}}^{(i)}_\varrho \|$ e $\| \overline{x}^{(i)}_\varrho \|$ (e la $\| \omega^i{}_h \|$) sono dotate di matrici inverse, $\| \underset{-1}{\tilde{\tilde{x}}^\varrho_{(i)}} \|$, $\| \underset{-1}{\overline{x}^\varrho_{(i)}} \|$ (e $\| \underset{-1}{\omega^i{}_h} \|$). Per (29) si ha allora

$$(30)\qquad \underset{-1}{\overline{x}^\varrho_{(i)}} = \underset{-1}{\tilde{\tilde{x}}^\varrho{}_h}\omega^h{}_i = \underset{-1}{\tilde{\tilde{x}}^\varrho{}_h}\underset{-1}{\omega^h{}_i} = \underset{-1}{\tilde{\tilde{x}}^\varrho{}_h}\omega_i{}^h \qquad [\underset{-1}{\omega^h{}_i} = \omega^i{}_h = \omega_i{}^h]\,.$$

Da (24) e (25) segue

$$(31)\qquad \begin{cases} \tilde{x}^{(i)}_{;\varrho_1\ldots\varrho_n} = \delta^{ij}\underset{-1}{\tilde{\tilde{x}}^\sigma{}_j} C_{\sigma\varrho_1\ldots\varrho_n} = \underset{-1}{\tilde{\tilde{x}}^\sigma{}_i} C_{\sigma\varrho_1\ldots\varrho_n} \\ E^{(i)} = \delta^{ij}\underset{-1}{\tilde{\tilde{x}}^\sigma{}_j} E^*_\sigma\,, \quad H^i = \delta^{ij}\underset{-1}{x^\sigma{}_j} H^*_\sigma\,. \end{cases}$$

---

[27]) Infatti le componenti intrinseche del vettore spaziale $\lambda^L_{(j)} = \lambda^{(j)L}$ $[(28)_4]$ rispetto alla terna $f^{(i)}_L$ sono le $\lambda^{(i)}_{\{j\}} = f^{(i)}_L \lambda^L_{(j)}$ cosicchè per $(28)_{1,2,4}$ è $\theta_{jk} = \delta_{ih}(f^{(i)}_L \lambda^L_{(j)})(f^{(h)}_M \lambda^M_{(k)}) = \delta_{ih}\lambda^{(i)}_{\{j\}}\lambda^{(h)}_{\{k\}} = -\lambda^L_{(j)}\lambda_{(k)L} = \delta_{jk}$, ossia la matrice $\| f^{(i)}_L \lambda^L_{(j)} \|$ è ortogonale. Analogamente si ragiona per la $\| \overline{f}^{(i)}_L \overline{\lambda}^L_{(j)} \|$.

Tenendo conto dell'analogo di (31) per $\bar{x}^{(i)}{}_{\varrho_1 \dots \varrho_n}$, $\overline{E}^{(i)}$ e $\overline{H}^{(i)}$, da (30) e (31) seguono $[\omega_i{}^h = \omega^i{}_h]$, per ogni $t' \leqslant t$, le relazioni

$$(32) \qquad \bar{x}^{(i)}{}_{\varrho_1 \dots \varrho_n} = \underset{-1}{\bar{x}^\sigma}{}_i C_{\sigma\varrho_1 \dots \varrho_n} = \underset{-1}{\bar{\bar{x}}^\sigma}{}_h \omega_i{}^h C_{\sigma\varrho_1 \dots \varrho_n} = \omega^i{}_h \bar{\bar{x}}^{(h)}{}_{\varrho_1 \dots \varrho_n} ;$$

e, con passaggi del tutto simili, anche le eguaglianze $\overline{E}^{(i)} = \omega^i{}_h E^{(h)}$, $\overline{H}^{(i)} = \omega^i{}_h H^{(h)}$. Dunque la storia $(\overline{21})$ ha la forma (22). c. d. d.

6. - Assiomi concernenti le equazioni gravitazionali, elettromagnetiche e costitutive in forma utile per la definizione di un certo sistema di funzionali costitutivi fisicamente ammissibile.

In **3** n. 15 ho considerato certe funzioni costitutive *d*) ... *e*). Esse danno in funzione delle y^λ, $\varepsilon_{\varrho\sigma}$, T e della velocità lagrangiana $\overset{*}{\Delta}_{\varrho\sigma}$ di deformazione [**3** n. 14] la densità lagrangiana k^*, l'energia specifica w, i coefficienti tensoriali lagrangiani termici $\overset{*}{\varkappa}_{\varrho\sigma}$ e $\overset{*}{\sigma}_{\varrho\sigma}$ ed elettromagnetici $\overset{*}{\zeta}_{\varrho\sigma}$, $\overset{*}{\eta}_{\varrho\sigma}$ e $\overset{*}{\mu}_{\varrho\sigma}$ e infine gli sforzi lagrangiani $Y^{\varrho\sigma}$.

Le quantità k^* e w determinano la densità lagrangiana di massa vera $\varrho^* = k^*(c^2 + w)$ [**3** $(101)_3$] e la corrispondente densità euleriana $\varrho = \mathfrak{D}^{-1}\varrho^*$ [**4** $(101)_2$] in funzione di $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ e y^λ.

Ai considerati tensori lagrangiani $\overset{*}{\varkappa}_{\varrho\sigma}, \dots, Y^{\varrho\sigma}$ corrispondono ben determinati tensori euleriani spaziali $\varkappa_{LM}$, σ_{LM}, ζ_{LM}, η_{LM}, μ_{LM}, X_{LM} [**4** nn. 3, 9, 14].

Intendo ora sostituire, in un modo precisato mediante i prossimi assiomi e definizioni, alle considerate funzioni costitutive *a*) e *b*) [**4** n. 15], che danno ϱ, un certo funzionale $\bar{\varrho}$ e alle funzioni costitutive *c*), ..., *e*) [**4** n. 15], che danno $\varkappa_{LM}, \dots, X_{LM}$, opportuni funzionali $\overline{G}^{(1)}_{lm}, \dots, \overline{G}^{(6)}_{lm}$ definiti, al pari di $\bar{\varrho}$, per le possibili storie termo-magneto-cinematiche d'ordine ν (ove $\nu \leqslant +\infty$) e dipendenti anche dal punto P^* variabile quasi ovunque in $C^* = C^*(\varphi^*)$.

La generalità della forma attribuita almeno in un primo tempo a tutti i considerati funzionali è alquanto sovrabbondante ma semplifica le cose.

Al fine di snellire l'enunciato dei prossimi assiomi conviene porre la seguente

DEFINIZIONE 6.1: *Dirò che [in relazione alla configurazione* φ^* *della materia in* S_3^*, *e alla terna* $\lambda_\varrho^{*(i)}$ *in* S_3^* $(\lambda_\varrho^{*(i)}\lambda^{*(j)\varrho} = \delta^{ij})$] *i funzionali* $\bar{\varrho}$, $G_{lm}^{(1)}, \ldots, G_{lm}^{(6)}$ — *da indicarsi anche con* $\bar{\varrho}$, $\bar{\varkappa}_{(lm)}$, $\bar{\sigma}_{(lm)}$, $\bar{\zeta}_{(lm)}$, $\bar{\eta}_{(lm)}$, $\bar{\mu}_{(lm)}$ *e* $\bar{X}_{(lm)}$ *costituiscono un sistema ammissibile d'ordine* ν *di funzionali costitutivi (per le grandezze connesse ordinatamente con le variabili* ϱ, $\varkappa_{LM}$, σ_{LM}, ζ_{LM}, η_{LM}, μ_{LM} e X_{LM}) *e che* $I^* = I^*(\varphi^*)$ *è il loro complessivo insieme di discontinuità se valgono le seguenti condizioni a), ..., d):*

a) I^* *è contenuto nella riunione delle frontiere di opportuni domini* C_1^*, $C_2^*, \ldots$ *costituenti una divisione di* $C^* = C^*(\varphi^*)$ *in domini* [**3** nota (23)].

b) $\bar{\varrho}$ *e* $\bar{G}_{lm}^{(1)}, \ldots, \bar{G}_{lm}^{(6)}$ *sono funzionali dipendenti dal punto* P^* *variante nell'insieme* $C^* - I^*$ *e inoltre, fissato* P^* in $C^* - I^*$, $\bar{\varrho}$ e $\bar{G}^{(r)}$ *risultano definiti per la generica storia termo-magneto-cinematica* S_ν *d'ordine* ν *(fisicamente) possibile* [28]) *per la materia in* P^*.

c) I^* *è formato dai punti di discontinuità dei funzionali* $\bar{\varrho}$, $\bar{G}_{lm}^{(1)}, \ldots, G_{lm}^{(6)}$ *pensati come funzioni di* P^* *(per qualche possibile storia termo-magneto-cinematica).*

d) $\bar{\varrho}$, $G_{lm}^{(1)}, \ldots, G_{lm}^{(6)}$ *sono continui rispetto alla storia* S_ν — *per esempio rispetto alla metrica di Lagrange o a quella di Hilbert —. Inoltre consideriamo i funzionali* $\bar{\varrho}$, $\bar{\varkappa}_{(lm)}$, $\bar{\sigma}_{(lm)}$, $\bar{\eta}_{(lm)}$, $\bar{\mu}_{(lm)}$ e $\bar{X}_{(lm)}$ *e pensiamoli calcolati in* $P^* = P^*(y)$ e *in una possibile storia termo-magneto-cinematica relativa a* P^* *e* t, *funzione continua e derivabile (rispetto alla considerata metrica). Le funzioni di* P^* *e* t *così ottenute sono derivabili e a derivate continue* [29]) *per qualunque* t *e per* P^* *interno a qualche* C_i^*.

Il prossimo assioma stabilisce nella regione di $\mathcal{U}$ occupata da materia la validità delle equazioni gravitazionali, elettromagne-

---

[28]) Naturalmente S_ν è una storia d'ordine ν fisicamente possibile se S_ν è un insieme di funzioni del tipo (21) ove si intenda $t = 0$ e inoltre è fisicamente possibile che, in relazione ad un opportuno sistema ammissibile ψ^L di coordinate, S_ν sia l'attuale storia termo-magneto-cinematica in $E = E(0)$ [Def. 5.1].

[29]) Tale condizione è fatta in vista delle equazioni di conservazione **4** (92) e di quelle elettromagnetiche **4** (81).

tiche e costitutive in una forma utile per la definizione delle suddette grandezze ϱ, $\varkappa_{LM}$, σ_{LM}, ζ_{LM}, η_{LM}, μ_{LM} e X_{LM} e per quella dei funzionali costitutivi a queste associati, riferendosi al caso generale in cui i valori delle dette grandezze siano legati al passato appunto mediante gli accennati funzionali.

Riservandomi di giustificare più avanti l'opportunità di tali definizioni, a giustificare il prossimo assioma contribuisce il principio di determinazione delle reattività materiali, enunciato al n. 1 come estensione del principio di determinazione dello stress — considerato nel caso classico in [20] p. 209 —.

Conviene richiamare preliminarmente il tensore d'impulso T_{LM}, il vettore euleriano q_L di corrente termica, il tensore termodinamico Q_{LM} [**3** (16)] e il tensore η^{LMAB} [**3** (45)] che lega il tensore elettromagnetico F_{AB} (rappresentante il campo elettrico E_L e l'induzione magnetica B_L) al tensore f_{LM} (rappresentante l'induzione elettrica D_L e il campo magnetico H_L). Richiamo pure il tensore E_{LM} di Minkowski e quello $\overline{E}_{LM}$ di Abraham [**3** $(82)_{2,3}$]. Detto infine ε_{ABCD} il tensore di Ricci in $\mathcal{U}$ con $\varepsilon_{0123} = \sqrt{-g}$, si ha

$$(33) \qquad T^{LM} = \varrho u^L u^M \qquad \text{con} \qquad \varrho = k(c^2 + w) \,,$$

$$(34) \quad q^L = - \varkappa^{LM} T_{/M} + \sigma^{LM} \left(\frac{dT}{ds}\right)_{/M} , \qquad Q_{LM} = q_L u_M + u_L q_M \,,$$

$$(35) \qquad \overset{-1}{\mu}{}^{AB} u_A = \overset{-1}{\mu}{}^{AB} u_B = 0 \,, \qquad \overset{-1}{\mu}{}^{LA} \mu_{AM} = \tilde{g}^L{}_M \,,$$

$$(35') \quad 2\eta_{AB}{}^{LM} = u^L(u_A \eta_B{}^M - u_B \eta_A{}^M) - u^M(u_A \eta_B{}^L - u_B \eta_A{}^L) - \\ - \frac{1}{2} u^R u^S \varepsilon_{ABPR} \varepsilon^{LM}{}_{QS} \overset{-1}{\mu}{}^{PQ} \,,$$

$$(36) \quad E_{LM} = F_{LA} f^A{}_M + \frac{1}{4} F_{AB} f^{AB} g_{LM} \,, \qquad \overline{E}_{LM} = \frac{1}{2}(E_{LM} + E_{ML}) \,.$$

Inoltre conviene ricordare che, costruito il tensore di Riemann R_{ABCD} con le funzioni $g_{LM} = g_{LM}(x)$, il tensore gravitazionale A_{LM} è definito da

$$(37) \quad A_{LM} = R_{LM} - \frac{R}{2} g_{LM} \qquad \text{con} \qquad R_{LM} = R_{LA}{}^A{}_M \,, \qquad R = R_L{}^L \,,$$

e le equazioni gravitazionali sono le dieci

$$(38)\quad A_{LM} + \frac{8\pi}{c^4} U_{LM} = 0 \quad \text{con} \quad U_{LM} = T_{LM} + Q_{LM} + \overline{E}_{LM} + X_{LM} \,,$$

e quelle elettromagnetiche, inclusa la legge di Ohm, sono [4 n. 9] le

$$(39)\quad \varepsilon^{LABC} F_{AB/C} = 0 \,, \qquad f^{LM}{}_{/M} = j^L \,, \qquad j^L = j u^L + \zeta^{LM} F_{MP} u^P \,.$$

Dato che si sono assunti come primitivi i concetti di campo elettrico e campo magnetico, conviene ricordare che [4 (66)]

$$(40)\quad \begin{cases} F_{LM} = E_L u_M - u_L E_M - \varepsilon_{LMPA} u^A B^P \,, \quad B^P = \mu^{PQ} H_Q \,, \\ f_{LM} = \eta_{LM}{}^{AB} F_{AB} \,. \end{cases}$$

Il prossimo assioma precisa come, nella regione A di $\mathcal{U}$ occupata da materia, le considerate equazioni sono soddisfatte; l'assioma successivo si riferisce invece all'interno A' della regione rimanente $\mathcal{U} - A$.

ASSIOMA V: *Sia* $\lambda_Q^{*(i)}$ *una terna ortogonale di versori di* S_3^*. *Allora esiste, in relazione a* φ^* *e a* $\lambda_Q^{*(i)}$ *un sistema ammissibile* [Def. 6.1] *di funzionali costitutivi* $\overline{\varrho}$, $\overline{G}_{lm}^{(1)}, \dots, \overline{G}_{lm}^{(6)}$ — *o, se si preferisce,* $\overline{\varrho}$, $\overline{\varkappa}_{(lm)}, \dots, \overline{\overline{H}}_{(lm)}$ — *tale che le equazioni gravitazionali* (38) *ed elettromagnetiche* (39) *devono valere a tratti nel 4-dominio* C_i *(avanti precisato e appartenente ad* $\mathcal{U}$*) ogni qual volta sussistano le seguenti condizioni* α), β), γ) e δ):

α) *Le funzioni reali* ψ^L, $x^L = x^L(t, y^1, y^2, y^3)$ [(2)], *le* $g_{LM} = g_{LM}(x^0, \dots, x^3)$ *e le* (18) *rappresentano l'attuale processo termo-magneto-cinematico* [Def. 4.1] *rispetto a* ψ^L *e alla divisione* C_1^*, C_2^*, ... *di* C^* *in domini.*

β) *L'insieme complessivo* I^* *delle discontinuità del considerato sistema ammissibile* $\overline{\varrho}$, $\overline{G}_{lm}^{(r)}$ $(r = 1, \dots, 6)$ *non contiene punti interni a qualche* C_i^*.

γ) *Fissato comunque il punto* P^* *all'interno di* C_i^*, *stanti le relazioni* (2) *e le eguaglianze* $P^* = P^*(y)$ *e* $x^L = \psi^L(E)$, *in* E

i tensori spaziali [nota (19)] ϱ, $\varkappa_{LM}$, σ_{LM}, ζ_{LM}, η_{LM}, μ_{LM} *e* X_{LM} *sono caratterizzati dalle condizioni di essere spaziali (e ortogonali ad* u^L*) e di avere le componenti intrinseche* ϱ, $\varkappa_{(lm)} = \lambda_{(l)}{}^L \lambda_{(m)}{}^M \varkappa_{LM}, \ldots,$ $X_{(lm)} = \lambda_{(l)}{}^L \lambda_{(m)}{}^M X_{LM}$ *rispetto alla terna* $\lambda_L^{(i)}$ *— trasformata mediante* (2) *della terna* $\lambda_\varrho^{*(i)}$ *appartenente ad* S_3^* *— espresse rispettivamente dai funzionali* $\bar{\varrho}$, $\bar{\varkappa}_{(lm)} = \bar{G}_{lm}^{(1)}, \ldots, \bar{X}_{(lm)} = \bar{G}_{lm}^{(6)}$ *calcolati in* P^* *per l'attuale storia termo-magneto-cinematica relativa a* P^* *e* t.

δ) ***Per*** E ***nel trasformato*** C_t ***di*** C_t^* ***mediante le funzioni*** $x^L(t, y)$ [*e* ***magari con*** E ***fuori di qualche opportuna ipersuperficie, per quanto riguarda*** $j = j_L u^L$] ***il tensore d'impulso*** T^{LM}, ***il vettore*** q^L ***di conducibilità termica, quello termodinamico*** Q_{LM}, ***l'induzione magnetica*** B_L, ***il tensore*** η_{LMAB} *e* ***i tensori elettromagnetici*** F_{LM} *e* f_{LM}, *quello* j^L *della quadricorrente e* ***infine i tensori*** $\bar{E}_{LM}$ *e* U_{LM} ***hanno*** *ordinatamente le precedenti* ***definizioni*** (33), (34), $(40)_2$, (35′) [*con* (35)], $(40)_{1,3}$, $(39)_3$, (36) e $(38)_2$.

Osservo che nella precedente condizione γ) son determinate le equazioni costitutive per ϱ e per i tensori $\varkappa_{RM}$, σ_{LM}, ζ_{LM}, η_{LM}, μ_{LM} e X_{LM}. Osservo pure che, ***detti questi tensori ordinatamente*** $G_{LM}^{(1)}, \ldots, G_{LM}^{(6)}$, *tenendo presente la convenzione* (14) *e* ***stanti*** (3) *e* $(10)_2$, *le dette equazioni costitutive (relative alla terna* $\lambda^{*(i)}_\varrho$*) si scrivono*

$$(41)\quad \left\{ \begin{aligned} \varrho &= \varrho(E) = \bar{\varrho}(\{a^{(i)}\}_E, \ \{\bar{\bar{x}}^{(i)}_{;\varrho_1}\}_E, \ \{\bar{\bar{x}}^{(i)}_{;\varrho_1\varrho_2}\}_E, \ldots, \ \{E^{(i)}\}_E, \\ &\qquad \{H^{(i)}\}_E, \ y) \quad \text{con} \quad \lambda_L^{(i)} = R_L^\varrho \lambda_\varrho^{*(i)}, \\ G_{LM}^{(r)} &= \lambda_L^{(l)} \lambda_M^{(m)} G_{lm}^{(r)}(\{a^{(i)}\}_E, \ \{\bar{\bar{x}}^{(i)}_{\varrho_1}\}_E, \ \{\bar{\bar{x}}^{(i)}_{\varrho_1,\varrho_2}\}_E, \ldots, \ \{E^{(i)}\}_E, \\ &\qquad \{H^{(i)}\}_E, \ y) \quad (r = 1, \ldots, 6). \end{aligned} \right.$$

Assioma V′: *Le funzioni* ψ^L, $g_{LM}(x)$, $x^L(t, y)$ ([2)] ***abbiano*** *i soliti significati fisici,* ***inoltre sia*** A' ***il sottoinsieme aperto di*** $\mathcal{U}$ ***costituente il complementare della chiusura del codominio delle*** *funzioni* (2) (***cosicchè in*** A' ***c'è il vuoto***). ***Allora esiste un tensore*** $F_{LM} = - F_{ML}$ *tale che per ogni* E *in* A' *e ogni versore* w^L (***associato ad*** $\mathcal{U}$ ***in*** E), ***posto***

$$(42)\qquad E_L = F_{LM} u^M, \qquad H_L = \varepsilon_{LRSA} u^A F^{RS},$$

valgono le seguenti condizioni:

a) Rispetto a ψ^L e w^L, i vettori E_L ed H_L sono rispettivamente i campi elettrico e magnetico in E.

b) Eventualmente ad eccezione del caso che E appartenga a certe ipersuperfici, in E valgono le equazioni gravitazionali $(38)_1$ *ed elettromagnetiche* $(39)_{1,2}$.

7. Definizione di sistema fisicamente ammissibile di funzionali costitutivi. Cenno sulla sua determinazione mediante assiomi. Densità convenzionale nel caso di sistemi ereditari.

Suppongo [30]) che le funzioni (2) rappresentino il moto M della materia rispetto a φ^* e alla divisione C_1^*, C_2^*, ... di $C^*(\varphi^*)$ [n. 2] cosicchè le (2) sono definite all'interno di ogni C_i^*. Sia Σ_i il contorno della regione aperta A_i descritta, stante (2), dal punto $E = E(x^L)$ quando $P^* = P^*(y)$ descrive l'interno di C_i^* ($i = 1, 2, ...$) e t varia da $-\infty$ a $+\infty$. Considero due casi:

CASO I: *Il punto evento E' appartenga, oltre che a Σ_i, anche a Σ_j per qualche $j \neq i$ e attorno ad esso non vi siano cariche elettriche concentrate e i corpi C_i^* e C_j^* si muovano, attorno ad E', regolarmente nel loro insieme, ossia come un solo corpo.*

In tal caso, detto N_L il versore normale in E' a Σ_i (e a Σ_j) onde $N_L u^L = 0$ e indicando con $(...)^+$ e $(...)^-$ i limiti di $(...)$ per $E \to E'$ con E variante in A_i e rispettivamente in A_j, si ha

$$(X^{LM} + \bar{E}^{LM} + Q^{LM})^+ N_M = (X^{LM} + \bar{E}^{LM} + Q^{LM})^- N_M . \tag{43}$$

---

[30]) Del presente paragrafo solo la Def. 7.1 è essenziale per l'assioma di indifferenza materiale e le sue conseguenze considerate al n. 8. Anzi a tale riguardo si potrebbe prescindere da quanto in tale definizione si riferisce ai casi I e II.

I cenni di cui nel titolo hanno interesse specialmente dal punto di vista assiomatico, ed anche per rilevare qualche problema concernente la determinazione delle equazioni costitutive e per indicare una soluzione alquanto attendibile di esso (mediante aggiunta di condizioni di interesse fisico).

CASO II: *Σ_i sia l'unica delle ipersuperfici Σ_1, Σ_2, ... che contiene E' — ossia attorno ad E' Σ_i divida il corpo C_i^* dal vuoto — e inoltre attorno a E' non vi siano cariche elettriche concentrate.*

In tal caso detto A' l'interno della regione vuota del cronotopo $\mathcal{U}$, (43) vale con A' al posto di A_j, ossia $[(X^{LM} + Q^{LM})^+ = 0]$ si ha

$$(X^{LM} + \overline{E}^{LM} + Q^{LM})^+ N_M = (\overline{E}^{LM})^- N_M \,. \tag{43'}$$

DEFINIZIONE 7.1: *Dirò che il sistema ammissibile $\overline{\varrho}$, $\overline{G}^{(1)}_{lm}$, ..., $\overline{G}^{(6)}_{lm}$ di funzionali costitutivi* [Def. 6.1] *è totalmente ammissibile* [nota (28)] *se le condizioni α), β), γ) e δ) considerate nell'* Ass. V *implicano come necessarie conseguenze che, in primo luogo, in C_i* [Ass. V δ)] *siano soddisfatte a tratti le equazioni gravitazionali* $(38)_1$ *ed elettromagnetiche* $(40)_{1,2}$, *e, in secondo luogo, nel Caso I e nel Caso II valgano rispettivamente* (43) *e* (43') *nel senso precedentemente precisato.*

Si può certo ammettere l'esistenza di un sistema (totalmente ammissibile $S_{fa} \equiv (\overline{\varrho}, \overline{G}^{(1)}, ..., \overline{G}^{(6)})$ di funzionali costitutivi. Affermando tale esistenza si include l'Ass. V e si tiene conto, almeno in parte, delle condizioni al contorno. Anzichè tener conto di ciò in un assioma a parte, ho preferito includere la suddetta affermazione di esistenza nel prossimo Ass. VI di indifferenza materiale.

L'unicità del detto sistema S_{fa} non è strettamente necessaria nella presente teoria. Inoltre affinchè una tale ammissione risulti soddisfacente occorre, direi, assicurarne la compatibilità con gli assiomi della teoria in questione. Precisamente, nella presente teoria occorre assicurarsi dell'esistenza di almeno un sistema ammissibile S_{fa} di funzionali $\overline{\varrho}$, $\overline{G}^{(1)}_{lm}$, ..., $\overline{G}^{(6)}_{lm}$ il quale sia individuato da un opportuno insieme I di sistemi di funzioni $x^L(t, y)$, $g_{LM}(x)$, $T(x)$, $j(x)$, $E_L(x)$, $H_L(x)$ soddisfacenti le equazioni gravitazionali $(38)_1$, elettromagnetiche $(39)_{1,2}$ e costitutive (41) conformemente all'Ass. V. Quindi S_{fa} deve esser individuato dall'insieme totale $\overline{I}$ delle soluzioni delle dette equazioni.

A proposito dell'unicità del sistema S_{fa} mi sembra interessante notare che nella Def. 7.1 si sono fatte intervenire le condizioni al contorno (43) e (43′) perchè altrimenti gli sforzi X_{LM} sarebbero stati certamente indeterminati almeno per la cosidetta pressione addizionale $-P\bar{g}^{LM}$ che si considera quando si voglia tener conto delle tensioni superficiali (fenomeni di capillarità ecc.).

Ai fini di rendere più attendibile l'unicità di S_{fa} e di indicare condizioni di un certo interesse fisico sui funzionali $\bar{\varrho}$, $\bar{G}^{(1)}_{lm}, \dots,$ $\bar{G}^{(6)}_{lm}$, i quali a priori sono forse di tipo sovrabbondantemente generale, considero le seguenti condizioni $[(\bar{G}^{(1)}_{lm}, \dots, \bar{G}^{(6)}_{lm}) \equiv (\bar{\varkappa}_{(lm)},$ $\bar{\sigma}_{(lm)}, \bar{\zeta}_{(lm)}, \bar{\eta}_{(lm)}, \bar{\mu}_{(lm)}, \bar{X}_{(lm)})]$:

1°) *I funzionali* $\bar{\varkappa}_{(lm)}, \bar{\sigma}_{(lm)}, \bar{\zeta}_{(lm)}$ *e magari* $\bar{\varrho}$ *equivalgono a funzioni di* $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ [(4)], T *e* P^*, *continue assieme alle loro derivate prime e alle derivate seconde di* $\bar{\varrho}$ (*e magari è* $\bar{\sigma}_{(lm)} \equiv 0$).

2°) *I valori del funzionale* $\bar{\eta}_{(lm)}$ *non dipendono dalla storia del campo magnetico nè quelli di* $\bar{\mu}_{(lm)}$ *dalla storia del campo elettrico.*

3°) *Oltre a* $\bar{\varrho}$, $\bar{\varkappa}_{(lm)}$, $\bar{\sigma}_{(lm)}$ e $\bar{\zeta}_{(lm)}$ *anche i funzionali* $\bar{\eta}_{(lm)}$, $\bar{\mu}_{(lm)}$ *e* $\bar{X}_{(lm)}$ *sono semplici o al più del* 2° *ordine* [nota (2)].

Nel seguito mi riferirò ad un sistema totalmente ammissibile S_{fa} di funzionali costitutivi $\bar{\varrho}$, $\bar{\varkappa}_{(lm)}, \dots, \bar{X}_{(lm)}$ — ossia $\bar{\varrho}$, $\bar{G}^{(1)}_{lm}, \dots,$ $\bar{G}^{(6)}_{lm}$ — e intenderò come *definiti rispetto ad esso mediante* (41) i *valori attuali in* E (*ossia in* P^* *e* t) *della densità propria* $c^{-2}\varrho$ *di massa* (*vera*), *dei coefficidnti termici* $\varkappa_{LM}$ *e* σ_{LM}, *dei coefficienti elettromagnetici* ζ_{LM}, η_{LM} *e* μ_{LM} (*conducibilità elettrica ecc.*) *e degli sforzi* X_{LM}.

Di qui è facile passare alla definizione delle corrispondenti grandezze lagrangiane ϱ^*, $\varkappa^*_{\varrho\sigma}, \dots, Y_{\varrho\sigma}$ (relative ad S_{fa}) — cfr. **3** (137), **3** (74), **4** (12), **4** (71), **4** (72), **4** (76) e **4** (78). A tale punto si può fissare un particolare stato, ad esempio quello corrispondente alla storia delle grandezze $\bar{x}^{(i)}{}_{;\varrho_1 \dots \varrho_m}$ $(m = 1, \dots, n)$, $E^{(i)}$, $H^{(i)}$ e T per cui sia, per ogni $t \leqslant 0$,

$$(44)\quad \bar{x}^{(i)}_{\varrho_1} = \delta^i_{\varrho_1}\,, \qquad \bar{x}^{(i)}_{\varrho_1 \dots \varrho_n} = 0 \qquad (n = 2, 3, \dots)\,,$$

$$(45)\quad E^{(i)} = 0\,, \qquad H^{(i)} = 0\,, \qquad T = T^* \quad (T^* = \text{zero gradi centigradi})\,.$$

Ora si può definire anche per sistemi ereditari la *densità convenzionale* k^* [**3** n. 19] identificandola con il valore di $\bar{\varrho}$ in $P^*(y)$

per la suddetta storia. Ripreso il rapporto $\mathfrak{D} = dC/dC^*$ fra elementi di volume corrispondenti nella configurazione attuale e di riferimento [**3** (49), **3** (50)], possiamo definire la densità propria k di massa convenzionale [$kdC = k^*dC^*$] e l'energia interna specifica w — nulla nello stato (44), (45) — come segue:

$$
\begin{gathered}
k^* = \mathfrak{D}k\,, \qquad \varrho = k(c^2 + w) \qquad \text{con} \\
\mathfrak{D} = \sqrt{\frac{-g}{a^*}}\,\frac{\partial(x_0, x_1, x^2, x^3)}{\partial(t, y^1, y^2, y^3)}\,\frac{dt}{ds}\,.
\end{gathered}
\tag{46}
$$

È alquanto attendibile che esista uno e uno solo sistema S_{fa} di funzionali costitutivi verificante le precedenti condizioni 1°), 2°), 3°) e totalmente ammissibile.

Potendo facilmente fare a meno, come si è visto, di affermare tale esistenza, mi limito ad accennare semplicemente alla possibilità di postularla. Si noti che ciononostante non assumo come concetti primitivi la densità propria ϱ, i coefficienti termodinamici $\varkappa_{LM}$, σ_{LM} ed elettromagnetici η_{LM}, μ_{LM} e ζ_{LM}, e nemmeno gli sforzi specifici o la forza di contatto [31]). Ciò è opportuno in quanto l'accettazione di un concetto primitivo è soddisfacente solo se, almeno in linea di principio, si possiedono criteri per riconoscerlo nella realtà e, a mio avviso, nel caso sopra considerato ciò equivale praticamente alla suddetta unicità del sistema S_{fa}.

8. Forma relativistica del principio di indifferenza materiale. Conseguenze.

Il principio di cui nel titolo si ritiene espresso dal seguente

Assioma VI: *Esiste un sistema totalmente ammissibile* S_{fa} *di funzionali costitutivi* [32]) $\overline{\varrho}$, $\overline{G}^{(1)}_{lm}$, ..., $\overline{G}^{(8)}_{lm}$ [Def. 6.1] *tale che se* P^*

---

[31]) Naturalmente non assumo come primitivo alcun concetto di forza a distanza nel senso classico. Riguardo alle forze ricordo che assumo come primitivi i concetti di campo elettrico $E_L = E_L(x)$ e campo magnetico $H_L = H_L(x)$.

[32]) Metto in tale forma il principio di indifferenza materiale (objectivity principle) [20] p. 109 perchè non presuppongo l'unicità del detto

è un punto di $C^* = C^*(\varphi^*)$ fuori del relativo insieme complessivo I^* di discontinuità, in corrispondenza a P^* si ottengono risultati coincidenti quando si calcoli il detto sistema S_{fa} per storie termo-magneto-cinematiche equivalenti [(21), (22)].

In base al Teor. 5.1 segue allora immediatamente il

TEOREMA 8.1: *I funzionali $\bar{\varrho}$, $\bar{G}^{(1)}_{lm}, \ldots, \bar{G}^{(6)}_{lm}$ costituenti il sistema considerato nell'Ass. V dipendono, in corrispondenza ad ogni punto P^* in $C^* - I^*$, dalla storia termo-magneto-cinematica* (21) *solo tramite quella lagrangiana ad essa associata* [(26)].

Si osservi che i considerati funzionali $\bar{G}^{(1)}_{lm}, \ldots, \bar{G}^{(6)}_{lm}$ danno rispetto alla terna $\lambda^{(i)}_L = R_L{}^\varrho \lambda^{*(i)}_\varrho$ direttamente le componenti intrinseche dell'*r-mo* $G^{(r)}_{LM}$ dei tensori $\varkappa_{LM}$, σ_{LM}, ζ_{LM}, η_{LM}, μ_{LM} e X_{LM} (il tensore $G^{(r)}_{LM}$ stesso è espresso mediante $(41)_2$).

Sia $G^{*(r)}_{\varrho\sigma}$ il corrispondente lagrangiano di $G^{(r)}_{LM}$ — v. **3** $(74)_1$ oppure **3** $(78)_1$ — cosicchè in base a **4** (12), **4** (72), **4** (78) e **4** (109) le $G^{*(1)}_{\varrho\sigma}, \ldots, G^{*(6)}_{\varrho\sigma}$ si identificano ordinatamente con $\varkappa^*_{\varrho\sigma}$, $\sigma^*_{\varrho\sigma}$, $\zeta^*_{\varrho\sigma}$, $\eta^*_{\varrho\sigma}$, $\mu^*_{\varrho\sigma}$ e $Y^*_{\varrho\sigma}$.

In base a **3** (78) è

$$(47)\qquad G^{(r)LM} = \mathfrak{D}^{-1}\alpha^L{}_\varrho \alpha^M{}_\sigma G^{*(r)\varrho\sigma}\,, \qquad G^{(r)LM}u_L = G^{(r)LM}u_M = 0\,.$$

Riferendosi alla storia (21) per $t' = t$ è $f^{(i)}_L = \lambda^{(i)}_L = R_L{}^\varrho \lambda^{*(i)}_\varrho$. Allora per (13), (46) e **3** (35), stante la decomposizione (10) di $\alpha^L{}_\varrho$, per (13), (46) e **3** (35) le suddette componenti intrinseche $G^{(r)}_{(lm)}$ di $G^{(r)}_{LM}$ hanno l'espressione

$$(48)\qquad G^{(r)}_{(lm)} = \lambda_{(l)}{}^L \lambda_{(m)}{}^M G^{(r)}_{LM} = \mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{D}^*_{(l)}{}^\varrho \mathfrak{D}^*_{(m)}{}^\sigma G^{*(r)}_{\varrho\sigma}$$
$$(\mathfrak{D}^*_{(l)\varrho} = \mathfrak{D}^{*(l)\varrho} = \lambda^{*(l)}_\sigma \mathfrak{D}^\sigma_\varrho)\,.$$

Scelto com'è lecito $\lambda^{*(\varrho)}_\sigma = a^*_{\varrho\sigma}$ ne segue $\mathfrak{D}^*_{(l)}{}^\varrho = \mathfrak{D}_{l\varrho}$ onde per **4** (70) e $(10)_{2,3,4}$ il tensore $\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{D}^*_{(l)}{}^\varrho \mathfrak{D}^*_{(m)}{}^\sigma$ è una funzione delle $C_{\varrho\sigma} = \tilde{C}_{\varrho\sigma}$. Tale è quindi il tensore inverso. Dunque per (48) le $G^{*(r)}_{\varrho\sigma}$

---

sistema di funzionali costitutivi. La considerata forma esistenziale è opportuna anche in Fisica classica quando si abbia a che fare con funzionali non completamente individuati dalle grandezze mediante essi espresse e la loro indeterminazione sia complessa — o non nota.

sono esprimibili mediante le $G^{(r)}_{(lm)}$ e le $C_{\varrho\sigma}$. Naturalmente si può ritenere $G^{*(r)}_{\varrho\sigma}$ definito in ogni sistema (y) di coordinate in $S_3{}^*$ e la (47) valida per sistemi qualsiasi di coordinate (y) in $S_3{}^*$ e (x) in $\mathfrak{U}$.

Inoltre per **4** (70) la densità lagrangiana di massa gravitazionale (vera a riposo) $\varrho^* = \mathfrak{D}^{-1}\varrho$ [**4** $(101)_1$] è esprimibile mediante ϱ e $C_{\varrho\sigma} = \tilde{C}_{\varrho\sigma}$. Concludendo si può affermare il seguente teorema:

TEOREMA 8.1: *Consideriamo la densità lagrangiana* $\varrho^* = \mathfrak{D}^{-1}\varrho$ *e i tensori lagrangiani* $\overset{*}{\varkappa}_{\varrho\sigma}$, $\overset{*}{\sigma}_{\varrho\sigma}$, $\overset{*}{\zeta}_{\varrho\sigma}$, $\overset{*}{\eta}_{\varrho\sigma}$, $\overset{*}{\mu}_{\varrho\sigma}$ *e* $\Upsilon_{\varrho\sigma}$ — *da indicarsi anche con* $G^{*(1)}_{\varrho\sigma}$, ..., $G^{*(6)}_{\varrho\sigma}$ *e da pensarsi come legati ordinatamente ai tensori* $G^{(1)}_{LM}$, ..., $G^{(6)}_{LM}$ *mediante* (47). *Le considerate quantità* ϱ^* *e* $G^{*(r)}_{\varrho\sigma}$ *possono pensarsi come funzioni della storia termo-magneto-cinematica* (21) *tramite il sistema totalmente ammissibile* S_{fa} *di funzionali considerato nell'Ass. V (in corrispondenza ad ogni punto* P^* *appartenente a* $C^* - I^*$). *Tali funzioni sono funzionali, da indicarsi con* $\bar{\varrho}^*$ *e* $\bar{G}^{*(r)}_{\varrho\sigma}$. *Inoltre, più precisamente, tali quantità lagrangiane* ϱ^*, $\overset{*}{\varkappa}_{\varrho\sigma}$, ..., $\Upsilon_{\varrho\sigma}$ *risultano dipendere dalla detta storia* (21) *solo tramite la storia termo-magneto-cinematica lagrangiana* (26) *associata alla* (21).

9. Sul quadro delle equazioni della termo-magneto-dinamica ereditaria in relatività generale. Coordinate solidali.

Ricordo che le equazioni dinamiche **4** (98) e il principio di conservazione dell'energia **4** (108) sono stati dedotti in **4** nn. 12, 13 dalle equazioni gravitazionali (38) — ossia **4** (91) — nel caso generale, cosicchè tale deduzione vale anche nella presente teoria.

Il quadro di cui nel titolo è stato praticamente già delineato nei paragrafi precedenti. Si tratta di completarlo in analogia con quanto si è fatto nei nn. 15, 16 di [4].

Come dati possiamo considerare la configurazione φ^* della materia nello spazio astratto S_3^* e inoltre i funzionali lagrangiani (continui e derivabili) $\bar{\varrho}^*$, $\bar{G}^{*(r)}_{\varrho\sigma}$ $(r = 1, ..., 6)$ [Def. 6.1 *d*) e Teor. 8.1] che esprimono le grandezze lagrangiane ϱ^*, $\overset{*}{\varkappa}_{\varrho\sigma}$, $\overset{*}{\sigma}_{\varrho\sigma}$, $\overset{*}{\zeta}_{\varrho\sigma}$, $\overset{*}{\eta}_{\varrho\sigma}$, $\overset{*}{\mu}_{\varrho\sigma}$, $\Upsilon_{\varrho\sigma}$ — cfr. **4** n. 15 *a*), ..., *e*) — in funzione di y [o di $P^* =$

$= P^*(y)]$ e della storia termo-magneto-cinematica lagrangiana [(26)] (l'insieme complessivo I^* di discontinuità dei considerati funzionali appartiene alla riunione dei contorni di una opportuna divisione C_1^*, C_2^*, ... di $C^* = C^*(\varphi^*)$ in domini).

Come funzioni incognite possiamo assumere le (2), le g_{LM}, $F_{LM} = - F_{ML}$, $f_{LM} = - f_{ML}$, T e j. Eccetto le (2) si tratta di funzioni delle x^L; esse, le (2) incluse, sono complessivamente $4 + 10 + 6 + 6 + 1 + 1 = 28$.

Le equazioni da soddisfare, stanti le (3), (4), (24), (25), $(33)_1$, (34), (35), (36), (37), $(38)_2$, $(39)_2$ e — cfr. 4 $(68)_1$, 4 $(69)_2$ — le relazioni

$$(49) \qquad E_L = F_{LM} u^M \ , \qquad H_L = \frac{1}{2} \varepsilon_L{}^{ABM} u_M f_{AB} \ ,$$

sono le (38), gravitazionali, e le $(39)_{1,2}$ e $(40)_3$, elettromagnetiche. Tenendo conto che delle quattro equazioni elettromagnetiche $(39)_1$ solo tre sono indipendenti — cfr. [13] p. 476 — complessivamente le equazioni considerate equivalgono a $10 + 3 + 4 + + 6 = 23$ equazioni indipendenti a cui va aggiunta la $t = s$ (o $dt/ds = 1$) considerata a proposito dei funzionali costitutivi precedenti.

Si noti che fra le equazioni qui richiamate figurano, come posizioni, pure le (47) da intendersi come equazioni costitutive. Allora in base a quanto si è detto sui dati le (47) sono equazioni funzionali e tali sono pure le suddette ventitrè equazioni indipendenti.

Dovendosi ritenere i detti dati (funzionali) opportunamente regolari, il generico problema di Cauchy generalizzato inerente alle ventotto incognite e alle ventitrè equazioni indipendenti suddette è da ritenersi solubile; inoltre la soluzione sarà determinata dalle condizioni iniziali e al contorno quando si aggiungano le equazioni

$$(50) \qquad g_{00} = 1 \ , \qquad g_{0i} = 0 \ , \qquad \left(\frac{dt}{ds} = g_{LM} \frac{\partial x^L}{d\partial t} \frac{\partial x^M}{\partial t} = 1\right) .$$

Le $(50)_{1,2}$ sostanzialmente riducono a 24 il numero delle incognite.

* * *

È interessante considerare il problema ottenuto sostituendo le quattro equazioni (50) con le

$$g_{00} = 1 \,, \qquad x^r = y^r \,. \tag{51}$$

Da $(50)_1$ segue appunto $x_0 = s$ (lungo le linee orarie). Le $(50)_{1,2}$ caratterizzano i sistemi (x) di coordinate solidali per cui x_0 è il tempo römeriano (tali coordinate sono usate in varie teorie relativistiche dei sistemi continui, o come forma particolare interessante [**4** n. 16] o di regola — cfr. [27] —).

Le condizioni (51) sono interessanti in quanto fanno uscire le funzioni (2) dal novero delle incognite. Fra queste restano solo le seguenti ventitrè funzioni delle x^L: le nove g_{Lm}, le dodici $F_{LM} = - F_{ML}$ e $f_{LM} = - f_{ML}$, e inoltre T e j. Altrettante sono le equazioni da considerare, ossia le $(38)_1$, gravitazionali, e le $(39)_{1,2}$ e $(40)_3$, elettromagnetiche.

Per fissare le idee considero i materiali semplici cosicchè i funzionali $\bar{\varrho}^*$ e $\bar{G}^{*(r)}_{\varrho\sigma}$ sono funzioni delle x^l $[(51)_2]$ e della storia termo-magneto-cinematica lagrangiana di ordine $n = 1$.

Le espressioni di u^L, $\alpha^L{}_\varrho$, $C_{\varrho\sigma}$, $\mathfrak{D}$, k, T_{LM}, q^L, Q_{LM} si semplificano [**3** n. 16], fra l'altro [**4** $(125)_1$, **4** (124), **4** (126)] è

$$\mathfrak{D} = \sqrt{\frac{-g}{a^*}} \,, \qquad \alpha^L{}_\varrho = \delta^L{}_\varrho - g_{\varrho 0}\delta^L{}_0 \,, \qquad C_{\varrho\sigma} = \tilde{g}_{\varrho\sigma} = g_{\varrho\sigma} - g_{0\varrho}g_{0\sigma} \,. \tag{52}$$

Ciò determina la forma assunta nelle coordinate (51) dalla storia termo-magneto-cinematica lagrangiana (26); in particolare da (25) e $(52)_2$ segue

$$E^*_\sigma = \delta^L_\sigma E_L = E_\sigma \,, \qquad H^*_\sigma = H_\sigma \,; \tag{53}$$

inoltre le equazioni (costitutive) euleriane *controvarianti* (47) prendono la semplice forma

$$G^{(r)lm} = \sqrt{\frac{a^*}{-g}}\, G^{*(r)lm} \,, \qquad G^{(r)L0} = G^{(r)0L} = 0 \,. \tag{54}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] BRESSAN A.: *Metodo di assiomatizzazione in senso stretto della meccanica classica. Applicazione di esso ad alcuni problemi di assiomatizzazione non ancora completamente risolti.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. Vol. XXXII, p. 55, 1962.

[2] BRESSAN A.: *Sui sistemi continui nel caso asimmetrico.* Annali di Mat. pura e applicata. Serie, IV, Vol. LXII, (1963).

[3] BRESSAN A.: *Cinematica dei sistemi continui in relatività generale.* Annali di matematica pura ed applicata. Serie IV, Vol. LXII (1963).

[4] BRESSAN A.: *Termodinamica e magneto-visco-elasticità con deformazioni finite in relatività generale.* Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova. Vol. XXXIV (1964).

[5] BRESSAN A.: *Onde ordinarie di discontinuità nei mezzi elastici con deformazioni finite in relatività generale.* Rivista di Mat. dell'Università di Parma. Serie 2, Vol. 4, (1963).

[6] BRESSAN A.: *Termo magneto-fluido-dinamica in relatività generale. Gas perfetti.* Rivista di Mat. dell'Univ. di Parma. Serie 2, Vol. 4, 1963.

[7] BURKS A. W.: *The logic of Causal Propositions.* Mind. Vol. 60, N. 9, No 239, giugno 1951, p. 363.

[8] CARNAP R.: *Meaning and Necessity.* The Univ. of Chicago Press. Illinois U.S.A.

[9] CATTANEO C.: *Sulla conduzione del calore.* Atti del Sem. Mat. e Fis. Univ. di Modena. Vol. III, 1948-49, p. 83.

[10] CATTANEO C.: *Introduzione alla teoria einsteiniana della gravitazione.* Veschi, Roma 1960-61.

[11] CISOTTI U.: *Sopra una estensione delle equazioni generali dell'elasticità.* Rend. Dell'Acc. Naz. dei Lincei. Serie V, Vol. XXIII 2° sem. 1914.

[12] COLEMAN B. D.: *Kinematical concepts with applications in the Mechanics and Thermodynamics of Incompressible viscoelastic fluids.* Archive for Rational Mechanics and Analysis. Vol. 9, N. 4, 1962, pp. 273-300.

[13] ERICKSEN J. L.: *Tensor fields.* Appendice in Handbuch der Physik. Vol. III/I. Springer-Verlag, 1960.

[14] FINZI B.: *Meccanica relativistica ereditaria.* Atti della società italiana per il progresso delle scienze. Vol. II, 1932.

[15] FINZI-PASTORI: *Calcolo tensoriale e applicazioni.* Bologna Zanichelli, 1961.

[16] FOCK V.: *The theory of space time and gravitation*. Pergamon Press, 1959.

[17] HERGLOTZ G.: *Über die Mechanick des deformierbaren Körpers vom Standpunkte der Relativitatstheorie*. Ann. Phys. (4). 36. 493-533.

[18] LICHNEROWICZ A.: *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*. Masson, Paris, VI-, 1955.

[19] NOLL W.: *On the continuity of the solid and fluid states*. Journal of Rational Mechanics and Analysis. Vol. 4. n. 1. January 1955.

[20] NOLL W.: *A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media*. Archive for Rat. Mechanics and Analysis. Vol. 2, n. 3, p. 197, 1958.

[21] NOLL W.: *The foundations of classical Mechanics in the light of recent advances in continuum Mechanics*. The axiomatic method with special reference to Geometry and Physics. North-Holland Publishing Co. Amsterdam.

[22] PAINLEVÉ P.: *Les axiomes de la Mechanique*. Paris Gauthier-Villars, 1930.

[23] PHAM MAU QUAN: *Sur une théorie relativiste des fluides thermodynamiques*. Annali di Mat. pura ed applicata. Serie IV, vol. 38, 1955.

[24] PHAM MAU QUAN: *Etude electromagnétique et thermodynamique d'un fluide relativiste chargé*. Journal of Rational Mechanics and Analysis. Vol. 5, 1956.

[25] PHAM MAU QUAN: *Thermodynamique d'un fluide relativiste*. Boll. U.M.I. Serie III, Anno XV, N. 2. Giugno 1960.

[26] PERSICO E.: *Introduzione alla Fisica Matematica*. Zanichelli Bologna, 1948.

[27] RAYNER C. B.: *Elasticity in general relativity*. In corso di stampa nella rivista: Royal Society Proceedings.

[28] SIGNORINI A.: *Meccanica Razionale*. Vol. II, cap. X, p. I. Perrella, Roma, 1954 (2° edizione).

[29] SYNGE J. L.: *A theory of elasticity in general relativity*. Math. Zeitschr. 72, pp. 82-87, 1959.

[30] SYNGE J. L.: *Relativity: the general theory*. North Holland Publishing Co. Amsterdam, 1960.

[31] TRUESDELL C., TOUPIN R. A.: *The classical field theory*. Handbuch der Physik. Vol. III/I, Springer-Verlag, 1960, p. 226.