SALVATORE CIAMPA

Successioni di Cauchy e completamento degli spazi uniformi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 34 (1964), p. 427-433

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1964__34__427_0>

SUCCESSIONI DI CAUCHY E COMPLETAMENTO DEGLI SPAZI UNIFORMI

Nota *) *di* SALVATORE CIAMPA (*a Pisa*) **)

1.1. - In questa nota, che vuole avere soltanto carattere metodologico, si dà una generalizzazione di una proposizione già nota per gli spazi pseudometrizzabili (cfr. BOURBAKI [2], § 2, n. 6, prop. 9; KELLEY [3], chapt. 6, theor. 24), della proposizione, cioè, che permette di dedurre la completezza di uno spazio pseudometrizzabile dalla convergenza delle sole successioni ordinarie [1]) di CAUCHY nello spazio stesso.

Della generalizzazione qui proposta (che costituisce la proposizione **2.1**) viene data, poi, un'applicazione alla costruzione di un completamento di uno spazio uniforme mediante opportune successioni di CAUCHY, unificando così le dimostrazioni relative al caso generale ed al caso di spazi pseudometrizzabili (in quest'ultimo caso il procedimento si riduce a quello utilizzato da CANTOR per passare dal corpo razionale a quello reale). In tal modo il teorema di completamento per gli spazi uniformi può essere dimostrato senza il ricorso alla teoria dei filtri [2]) (teoria

---

*) Pervenuta in redazione il 9 maggio 1964.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Pisa.

**) Questo lavoro è stato eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca per la Matematica (C.N.R.) nell'anno 1963-64.

[1]) Per le definizioni di *successione* e di *successione ordinaria* vedere il successivo n. **1.2.**

[2]) Cfr. BOURBAKI [1], chap. 2, § 3, n. 7; KOWALSKI [4], § 35.

peraltro molto utile e, in un certo senso, naturale nello studio della Topologia) e senza il teorema di immersione di uno spazio uniforme in un prodotto di spazi pseudometrici [3]).

1.2. - In tutto quanto segue i termini sono adoperati, generalmente, come in KELLEY [3]. In particolare, *direzione* significa insieme parzialmente ordinato (la proprietà antisimmetrica dell'ordinamento può non essere richiesta) in modo che ogni coppia di suoi elementi abbia un successivo comune; *successione in* un insieme A significa un'applicazione a valori in A definita in una direzione; quando si vuole specificare la direzione di definizione si scriverà I-successione, $\mathcal{T}$-successione, ecc.. Quando la direzione in cui è definita la successione è quella dei numeri naturali, si dice che la successione è *ordinaria*.

Se $\lambda : I \to A$ è una successione, per indicare l'elemento di A che essa associa all'elemento $i \in I$ si scriverà λ_i invece di $\lambda(i)$. La successione λ sarà talvolta indicata, impropriamente, con $\{\lambda_i\}_{i \in I}$.

2.1. - *Sia A uno spazio uniforme e sia $\mathcal{T}$ una base della sua uniformità; si consideri $\mathcal{T}$ come una direzione (ordinata per inclusione). Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

I. *Ogni $\mathcal{T}$-successione di Cauchy in A è convergente.*

II. *Ogni successione di Cauchy in A è convergente.*

Dim. (I $\Rightarrow$ II): sia L una direzione, basta far vedere che se la successione $\lambda : L \to A$ è di Cauchy, essa ha punti di aderenza. Per ogni $T \in \mathcal{T}$ sia $i_T \in L$ tale che

$$h, k \in L;\ h, k \geqslant i_T \Rightarrow (\lambda_h, \lambda_k) \in T\,.$$

Sia $\mu : \mathcal{T} \to A$ la successione così definita

$$\text{per ogni } T \in \mathcal{T},\ \mu_T = \lambda_{i_T}.$$

Si proverà che la successione ora definita è di Cauchy. Fissato $S \in \mathcal{T}$, sia $Q \in \mathcal{T}$ tale che $Q \circ Q \subseteq S$. Allora,

$$X,\ Y \in \mathcal{T};\ X \subseteq Q,\ Y \subseteq Q \Rightarrow (\mu_X, \mu_Y) \in S\,,$$

[3]) Cfr. KELLEY [3], chapt. 6, theor. 28.

infatti, sia $j \in L$ tale che

$$j \geqslant i_X , \quad j \geqslant i_Y ,$$

allora

$$(\mu_X, \lambda_j) = (\lambda_{i_X}, \lambda_j) \in X \subseteq Q ;$$

$$(\lambda_j, \mu_Y) = (\lambda_j, \lambda_{i_Y}) \in Y \subseteq Q$$

perciò

$$(\mu_X, \mu_Y) \in Q \circ Q \subseteq S .$$

Esiste quindi un elemento $a \in A$ verso cui la successione μ converge. Per provare che l'elemento a è aderente alla successione λ, concludendo così la dimostrazione, fissati $T \in \mathfrak{T}$ ed $i \in L$, siano S, $Q \in \mathfrak{T}$ tali che

$$S \circ S \subseteq T ;$$

$$P \in \mathfrak{T}, \ P \subseteq Q \Rightarrow (a, \mu_P) \in S .$$

Allora, se $X \in \mathfrak{T}$ e $j \in L$ sono tali che

$$X \subseteq S \cap Q , \ j \geqslant i , \ j \geqslant i_X ,$$

si ha

$$(a, \mu_X) = (a, \lambda_{i_X}) \in S$$

$$(\lambda_{i_X}, \lambda_j) \in X \subseteq S$$

e quindi

$$(a, \lambda_j) \in S \circ S \subseteq T .$$

(II $\Rightarrow$ I) è ovvio.

2.2. - Se lo spazio A è pseudometrizzabile, la sua uniformità ha una base numerabile, si vede quindi come dalla proposizione ora dimostrata segua quella richiamata all'inizio del n. **1.1**, relativa agli spazi pseudometrizzabili.

3. - Allo scopo di pervenire più rapidamente al teorema di completamento per uno spazio uniforme (n. **3.2**) è utile richiamare i seguenti risultati che si possono facilmente ricavare da quanto è detto in Bourbaki [1], chap. 2, § 3, nn. 7 e 8.

3.1. - *Sia B uno spazio uniforme e sia $\mathcal{T}$ una base della sua uniformità costituita da insiemi simmetrici. Sia R l'intersezione di tutti gli elementi della famiglia $\mathcal{T}$. Allora:*

I. *R è una relazione d'equivalenza in B.*

II. *In $B^* = B/R$ si può definire una uniformità in modo che B^* risulti uno spazio di Hausdorff, che l'applicazione canonica $\pi : B \to B^*$ risulti uniformemente continua, chiusa ed aperta, che lo spazio B^* risulti completo se B lo è.*

III. *Se l'uniformità dello spazio B è generata da una pseudometrica ϱ, l'uniformità di B^* può essere generata da una metrica σ tale che*

$$\textit{per ogni } a,\ b \in B,\ \varrho(a, b) = \sigma(\pi(a),\ \pi(b))\,.$$

(La dimostrazione di questa proposizione può agevolmente farsi direttamente definendo per ogni $T \in \mathcal{T}$ l'insieme $T^* \subseteq B^* \times B^*$ in modo che

$$T^* = \{(\pi(a),\ \pi(b)) : (a,\ b) \in T\}\,.$$

Si riconosce subito che la famiglia di tutti questi insiemi T^* al variare di T in $\mathcal{T}$ è una base di uniformità in B^* e che lo spazio che così si ottiene ha tutte le proprietà espresse nell'enunciato).

3.2. - *Per ogni spazio uniforme A esiste uno spazio uniforme B tale che:*

I. *B è completo e contiene un sottospazio H denso in B e tale che esiste una biiezione $g : A \to H$ uniformemente continua insieme alla sua inversa (cioè, gli spazi A ed H sono isomorfi).*

II. *Se lo spazio A è di Hausdorff, si può fare in modo che anche B lo sia; in questo caso, il completamento B è determinato a meno di isomorfismi.*

III. *Se l'uniformità dello spazio A è generata da una pseudometrica ϱ anche l'uniformità del completamento B può essere generata da una pseudometrica σ (e si può fare in modo che σ sia una metrica se ϱ lo è) in modo che gli spazi A ed H risultino isometrici (cioè, per ogni $a,\ b \in A$, $\varrho(a, b) = \sigma(g(a), g(b))$).*

Dim. (I): Sia $\mathcal{T}$ una base dell'uniformità dello spazio A costituita da insiemi simmetrici. Si consideri $\mathcal{T}$ come una direzione e sia B l'insieme di tutte le $\mathcal{T}$-successioni di Cauchy in A.

Per ogni $T \in \mathcal{T}$ sia $T^0 \subseteq B \times B$ l'insieme così definito:

$$(\lambda, \mu) \in T^0$$

significa che esiste $P \in \mathcal{T}$ in modo che

$$Q \in \mathcal{T}, \ Q \subseteq P \Rightarrow (\lambda_Q, \mu_Q) \in T .$$

La famiglia $\mathcal{T}^0 = \{T^0 : T \in \mathcal{T}\}$ è una base di uniformità nell'insieme B; sia, d'ora in poi, B lo spazio uniforme così ottenuto. Definendo, per ogni $a \in A$, $g(a)$ come la $\mathcal{T}$-successione di valore costante a e ponendo $H = g(A)$ si prova subito che g è una biiezione su H e che g e la sua inversa g^{-1} sono uniformemente continue.

Si prova facilmente, poi, che H è denso in B: fissati $\lambda \in B$ e $T \in \mathcal{T}$, se $S \in \mathcal{T}$ è tale che

$$P, \ Q \in \mathcal{T}; \ P \subseteq S, \ Q \subseteq S \Rightarrow (\lambda_P, \lambda_Q) \in T ,$$

l'elemento $g(\lambda_S) \in H$ è tale che $(\lambda, g(\lambda_S)) \in T^0$.

Infine, per provare che B è uno spazio completo, basta far vedere che ogni $\mathcal{T}^0$-successione di Cauchy in H è convergente in B (a causa della proposizione n. **2.1** e del fatto che H è denso in B). Sia dunque $\sigma^0 : \mathcal{T}^0 \to H$ una $\mathcal{T}^0$-successione di Cauchy e, per ogni $T \in \mathcal{T}$, sia $\sigma(T) \in A$ tale che

$$\sigma^0_{T^0} = g(\sigma_T) .$$

È facile vedere che σ è una $\mathcal{T}$-successione di Cauchy in A e che la successione σ^0 converge verso σ: fissato, infatti, $T \in \mathcal{T}$ sia $S \in \mathcal{T}$ tale che

$$P, \ Q \in \mathcal{T}; \ P \subseteq S, \ Q \subseteq S \Rightarrow (\sigma_P, \sigma_Q) \in T ,$$

allora

$$P^0 \in \mathcal{T}^0, \ P^0 \subseteq S^0 \Rightarrow (\sigma, \sigma^0_{P^0}) = (\sigma, g(\sigma_P)) \in T^0 .$$

(II) Se lo spazio A è di Hausdorff, lo spazio B ora costruito non lo è se $H \neq B$. Sostituendo però a quest'ultimo lo spazio B^* costruito a partire da B come nella proposizione **3.1**, si ottiene uno spazio completo di Hausdorff contenente l'insieme $\pi(H)$ denso in B^* (perchè l'applicazione π è continua) ed isomorfo allo spazio A, l'isomorfismo potendosi realizzare con l'applicazione $g^0 : A \to B$ dove $g^0 = \pi \circ g$.

L'unicità del completamento di Hausdorff si prova facilmente.

(III) Basta considerare che in questo caso lo spazio B risulta costituito dalle successioni ordinarie di Cauchy in A, inoltre, se $\lambda = \{\lambda_n\}_{n \in N}$ e $\mu = \{\mu_n\}_{n \in N}$ sono due elementi di B, la successione ordinaria di numeri reali

$$\{\varrho(\lambda_n, \mu_n)\}_{n \in N}$$

è di Cauchy e quindi converge, si può allora definire

$$\sigma(\lambda, \mu) = \lim \{\varrho(\lambda_n, \mu_n)\}_{n \in N} .$$

Si vede subito che l'uniformità generata dalla pseudometrica σ coincide con quella di base $\mathfrak{T}^0$ e che anche le altre affermazioni dell'enunciato III sono vere.

4. - Se G è un gruppo topologico tale che le sue strutture uniformi sinistra e destra hanno le stesse successioni di Cauchy, un completamento del gruppo si può ottenere, come è ben noto, costruendo come nella proposizione **3.2** il completamento dello spazio G con la struttura uniforme sinistra, per esempio. Se il gruppo G è di Hausdorff, la costruzione indicata nella proposizione **3.1** ed applicata nella successiva appunto per ottenere un completamento di Hausdorff, permette di giungere rapidamente al risultato voluto giacchè la relazione d'equivalenza R considerata nelle proposizioni ora citate è tale che la classe d'equivalenza cui appartiene l'identità di B è l'aderenza (chiusura) E dell'identità stessa, perciò è un sottogruppo normale chiuso. Allora il gruppo B^* non è altro che il gruppo quoziente B/E.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI N.: *Topologie Générale*. Chap. 1 et 2 - 3ª éd.; Act. Scient. Ind. 1142, Hermann, Paris, 1961.

[2] BOURBAKI N.: *Topologie Générale*. Chap. 9 - 2ª éd.; Act. Scient. Ind. 1045, Hermann, Paris, 1958.

[3] KELLEY J. L.: *General Topology*. Van Nostrand, New York, 1955.

[4] KOWALSKI J.: *Topologische Räume*. Birkhäuser, Basel, 1961.