

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

DINO DAL MASO

**Studio di certe varietà collegate con un particolare
problema non lineare**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 34 (1964), p. 411-426

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1964__34__411_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

STUDIO DI CERTE VARIETÀ COLLEGATE CON UN PARTICOLARE PROBLEMA NON LINEARE

*Nota *) di DINO DAL MASO (a Trieste) **)*

La presente ricerca si propone come scopo di compiere uno studio geometrico su talune varietà non lineari legate ad equazioni funzionali. Viene considerata qui l'equazione differenziale:

$$y'' + A(x)y = 0 ,$$

essendo $A(x)$ periodica con periodo 2π . Supponiamo $A(x)$ variabile nello spazio delle funzioni a quadrato sommabile in un intervallo di periodicità. Ovviamente l'equazione differenziale verrà considerata nel senso di Carathéodory.

La varietà di cui viene compiuto uno studio è la varietà costituita dai coefficienti $A(x)$ per cui l'equazione possiede soluzioni periodiche. Lo studio che viene qui compiuto ha carattere esclusivamente locale.

Viene dapprima compiuto uno studio della varietà W dei coefficienti a cui corrisponde una sola soluzione periodica. Questa varietà si lascia rappresentare « cartesianamente », nell'intorno di ogni suo punto A_0 , su un iperpiano che può essere chiamato iperpiano tangente alla varietà stessa nel punto A_0 .

*) Pervenuta in Redazione il 1 marzo 1964.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Trieste.

***) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 24, del Comitato per la Matematica del C.N.R..

La varietà V dei coefficienti a cui corrispondono due soluzioni periodiche può essere rappresentata « cartesianamente », nell'intorno di ogni suo punto, su una varietà lineare che ha codimensione tre e che può essere considerata come tangente ad essa.

Viene da ultimo compiuto uno studio della varietà W nell'intorno di un punto qualsiasi della varietà V . Quest'ultima può essere considerata come varietà singolare per la W . Mandando per ogni punto A_0 della varietà V una varietà lineare ortogonale (tridimensionale), questa taglia W secondo una superficie (bidimensionale), che ha una singolarità di tipo conico in A_0 .

Il problema dello studio delle soluzioni periodiche dell'equazione predetta è stato oggetto di studi, ormai classici, da parte di Hill, Poincaré, Floquet, Underwood, ... È ben nota la condizione di esistenza di soluzioni periodiche consistente nell'annullarsi del determinante infinito di Hill. Ho ritenuto di rendere più espressiva questa condizione compiendo uno studio geometrico della varietà da essa individuata.

Al di là del caso particolare di cui mi occupo qui, mi pare che un metodo geometrico di questo tipo possa essere utile in altri problemi non lineari (autovalori, comportamento degli autovalori dei coefficienti di una equazione differenziale, ecc.)

I. - Si consideri l'equazione differenziale:

$$(1) \quad y'' + A(x)y = 0 ,$$

con A appartenente allo spazio H delle funzioni periodiche con periodo 2π , a quadrato sommabile nell'intervallo $[0, 2\pi]$. E siano $S_1(A; x)$ ed $S_2(A; x)$ i due integrali della (1) che verificano le condizioni iniziali:

$$(2) \quad \begin{aligned} S_1(A; 0) &= 0 , & S_2(A; 0) &= 1 , \\ S_1'(A; 0) &= 1 , & S_2'(A; 0) &= 0 . \end{aligned}$$

Si riconosce subito che condizione necessaria e sufficiente perchè la (1) ammetta in $A_0 \in H$ uno ed uno solo integrale periodico di periodo 2π è che la matrice:

$$\Omega(A_0) = \begin{bmatrix} S_1(A_0; 2\pi) & S_2(A_0; 2\pi) - 1 \\ S'_1(A_0; 2\pi) - 1 & S'_2(A_0; 2\pi) \end{bmatrix}$$

abbia caratteristica 1.

Indicato con $\omega(A)$ il determinante di $\Omega(A)$, che ha, per note proprietà, l'espressione $S_2 + S'_1 - 2$, si consideri in H il funzionale $\omega(A)$. Per la continuità (rispetto ad A) dei funzionali $S_1(A; 2\pi)$, $S_2(A; 2\pi)$, $S'_1(A; 2\pi)$, $S'_2(A; 2\pi)$ possiamo affermare che esiste un intorno T del punto A_0 in cui la caratteristica di $\Omega(A)$ è ≥ 1 .

In questa prima parte ci si propone di eseguire uno studio locale, nell'intorno T , della varietà W definita dalla:

$$\omega(A) = 0,$$

cioè della varietà dei punti A di T per cui la (1) ammette uno ed uno solo integrale periodico di periodo 2π .

Compiremo ora uno studio della differenziabilità rispetto ad A (variabile in H) dei funzionali $S_i(A; x)$, $S'_i(A; x)$ ($i = 1, 2$), e, quindi, del funzionale $\omega(A)$.

Da considerazioni elementari sulle equazioni differenziali, si ottiene in primo luogo:

Prop. 1. - *I funzionali $S_i(A; x)$, $S'_i(A; x)$ ($i = 1, 2$) sono limitati, al variare di x in $[0, 2\pi]$ e al variare di A in un insieme limitato di H .*

Nel seguito indicheremo con $\| \|$ la norma di H , con $\| \|*$ la norma lagrangiana (cioè il massimo modulo nell'intervallo $[0, 2\pi]$). Si ha allora:

Prop. 2. - *Per ogni x fissato in $[0, 2\pi]$ i funzionali $S_i(A; x)$, $S'_i(A; x)$ ($i = 1, 2$) sono differenziabili rispetto ad A , e i relativi differenziali hanno la seguente espressione, posto $\delta A = A - A_0$:*

$$\begin{aligned}
 \delta S_1(A_0; \delta A; x) &= - \int_0^x [S_1(A_0; x)S_2(A_0; t) - \\
 &\quad - S_1(A_0; t)S_2(A_0; x)]S_1(A_0; t)\delta A(t)dt, \\
 \delta S'_1(A_0; \delta A; x) &= - \int_0^x [S'_1(A_0; x)S_2(A_0; t) - \\
 &\quad - S_1(A_0; t)S'_2(A_0; x)]S_1(A_0; t)\delta A(t)dt, \\
 (3) \quad \delta S_2(A_0; \delta A; x) &= - \int_0^x [S_1(A_0; x)S_2(A_0; t) - \\
 &\quad - S_1(A_0; t)S_2(A_0; x)]S_2(A_0; t)\delta A(t)dt, \\
 \delta S'_2(A_0; \delta A; x) &= - \int_0^x [S'_1(A_0; x)S_2(A_0; t) - \\
 &\quad - S_1(A_0; t)S'_2(A_0; x)]S_2(A_0; t)\delta A(t)dt.
 \end{aligned}$$

Vale inoltre la seguente proprietà di differenziabilità uniforme: posto $S_1(A_0 + \delta A; x) - S_1(A_0; x) - \delta S_1(A_0; \delta A; x) = r(A_0; \delta A; x)$, si ha:

$$(4) \quad |r(A_0; \delta A; x)| \leq h \|\delta A\|^2,$$

dove h è una costante che non dipende da x , A_0 , δA , purchè i punti A_0 e $A = A_0 + \delta A$ varino in un insieme limitato di H . Analoga proprietà vale per S'_1 , S_2 , S'_2 .

Poniamo infatti $z(x) = S_1(A; x) - S_1(A_0; x)$. Dalla (1) si ricava ovviamente:

$$z'(x) + A_0(x)z(x) = - S_1(A_0; x)\delta A(x) - z(x)\delta A(x),$$

da cui:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad z(x) &= - \int_0^x [S_1(A_0; x)S_2(A_0; t) - \\
 &\quad - S_1(A_0; t)S_2(A_0; x)][z(t)\delta A(t) + S_1(A_0; t)\delta A(t)]dt.
 \end{aligned}$$

Da questa si ricava:

$$(6) \quad |z(x)| \leq M \int_0^x |z(t)| |\delta A(t)| dt + N \|\delta A\| ,$$

essendo M ed N costanti che, in virtù della prop. 1, non dipendono da x e nemmeno da A_0 , A , se questi punti descrivono un insieme limitato di H . La (6) dà subito (applicando il noto lemma di Gronwall):

$$|z(x)| \leq N \|\delta A\| e^{M \int_0^x |\delta A(t)| dt} .$$

Perciò:

$$(7) \quad \|z\|^* \leq K \|\delta A\| ,$$

dove K è una costante indipendente da A_0 e A , se questi punti variano in un insieme limitato di H .

Assunta per δS_1 l'espressione data dalla prima delle (3), si ha:

$$\begin{aligned} r(A_0; \delta A; x) &= z(x) - \delta S_1(A_0; \delta A; x) = \\ &= \int_0^x [S_1(A_0; x)S_2(A_0; t) - S_1(A_0; t)S_2(A_0; x)]z(t)\delta A(t)dt . \end{aligned}$$

Perciò:

$$|r(A_0; \delta A; x)| \leq M \int_0^{2\pi} |z(t)| |\delta A(t)| dt \leq M\sqrt{2\pi} \|z\|^* \|\delta A\| .$$

E, applicando la (7),

$$|r(A_0; \delta A; x)| \leq \sqrt{2\pi} MK \|\delta A\|^2 .$$

Ciò prova la differenziabilità (rispetto ad A) di $S_1(A; x)$ e la validità della (4). Analogamente si procede per S'_1 , S_2 , S'_2 .

Si ottiene ora facilmente il seguente risultato di differenziabilità continua:

Prop. 3. - *Vale la maggiorazione:*

$$(8) \quad |\delta S_1(A''; \delta A; x) - \delta S_1(A'; \delta A; x)| \leq k \|A'' - A'\| \|\delta A\|,$$

essendo k una costante indipendente da A' , A'' , se questi punti variano in un insieme limitato di H .

Infatti, consideriamo la funzione che compare come nucleo nell'integrale che esprime δS_1 , cioè:

$$[S_1(A_0; x)S_2(A_0; t) - S_1(A_0; t)S_2(A_0; x)]S_1(A_0; t).$$

La prop. 2 ci assicura che questa funzione soddisfa ad una condizione di Lipschitz rispetto ad A_0 (variabile in H), in modo uniforme al variare di x e t in $[0, 2\pi]$ e al variare di A_0 in un insieme limitato di H . Da ciò segue subito la (8).

Dall'espressione di ω si deduce ora immediatamente la seguente:

Prop. 4. - *Il funzionale $\omega(A)$ ammette un differenziale $\delta\omega(A_0; \delta A)$ che ha la seguente espressione:*

$$(9) \quad \delta\omega(A_0; \delta A) = - \int_0^{2\pi} \{S_1(A_0; 2\pi)S_2^2(A_0; t) + \\ + [S_1'(A_0; 2\pi) - S_2(A_0; 2\pi)]S_1(A_0; t)S_2(A_0; t) - \\ - S_2'(A_0; 2\pi)S_1^2(A_0; t)\} \delta A(t) dt.$$

Inoltre, posto $R(A_0; \delta A) = \omega(A_0 + \delta A) - \omega(A_0) - \delta\omega(A_0; \delta A)$, si ha:

$$(10) \quad |R(A_0; \delta A)| \leq h \|\delta A\|^2,$$

essendo h costante al variare di A_0 , $A_0 + \delta A$ in un insieme limitato di H .

Si ha poi

$$(11) \quad |\delta\omega(A''; \delta A) - \delta\omega(A'; \delta A)| \leq k \|A'' - A'\| \|\delta A\|,$$

essendo k una costante indipendente da A' , A'' al variare di questi in un insieme limitato di H .

2. - Osserviamo ora che $\delta\omega(A_0; \delta A)$ (ovviamente come funzione di δA), sempre nell'ipotesi che $A_0 \in W$, non è identicamente nullo. Infatti se lo fosse si dovrebbe avere, dalla sua espressione (9),

$$\begin{aligned} S_1(A_0; 2\pi) &= 0, \\ S'_2(A_0; 2\pi) &= 0, \\ S'_1(A_0; 2\pi) &= S_2(A_0; 2\pi); \end{aligned}$$

e chiamando λ il valore comune di $S'_1(A_0; 2\pi)$ e di $S_2(A_0; 2\pi)$, poichè:

$$\begin{vmatrix} S_1(A_0; 2\pi) & S_2(A_0; 2\pi) \\ S'_1(A_0; 2\pi) & S'_2(A_0; 2\pi) \end{vmatrix} = -1,$$

si avrebbe $\lambda = \pm 1$. Il caso $\lambda = 1$ implica che $\Omega(A_0)$ ha caratteristica 0 e il caso $\lambda = -1$ implica che $\Omega(A_0)$ ha caratteristica 2. Dunque nell'ipotesi, in cui ci siamo messi, che $\Omega(A_0)$ abbia caratteristica 1, $\delta\omega(A_0; \delta A)$ non è identicamente nullo. Quindi, detta \mathfrak{U} la varietà lineare (nella variabile indipendente δA): $\delta\omega(A_0; \delta A) = 0$, ogni varietà lineare ad essa complementare ha dimensione 1. In particolare, la varietà ortogonale ad \mathfrak{U} sarà individuata da un versore, ν , ortogonale alla varietà \mathfrak{U} . Convenendo di prendere ν in modo che sia $\delta\omega(A_0; \nu) > 0$, ν risulta determinato.

L'equazione della varietà W è (sempre ponendo $A = A_0 + \delta A$):

$$\delta\omega(A_0; \delta A) + R(A_0; \delta A) = 0$$

e, ponendo $\delta A = \tau + l\nu$, con $\tau \in \mathfrak{U}$ e l numero reale, diventa:

$$l\delta\omega(A_0; \nu) = -R(A_0; \tau + l\nu),$$

ossia, posto $s = \delta\omega(A_0; \nu)$:

$$(12) \quad l = -\frac{1}{s} R(A_0; \tau + l\nu).$$

Per lo studio di questa equazione dobbiamo procurarci ancora una maggiorazione. Si ha:

$$\begin{aligned} & |R(A_0; \delta A) - R(A_0; \delta B)| \leq \\ & \leq |\omega(A_0 + \delta A) - \omega(A_0 + \delta B) - \delta\omega(A_0; \delta A - \delta B)| \leq \\ & \leq |\omega(A_0 + \delta A) - \omega(A_0 + \delta B) - \delta\omega(A_0 + \delta B; \delta A - \delta B)| + \\ & \quad + |\delta\omega(A_0 + \delta B; \delta A - \delta B) - \delta\omega(A_0; \delta A - \delta B)| \end{aligned}$$

e, applicando la (10) e (11):

$$|R(A_0; \delta A) - R(A_0; \delta B)| \leq h \|\delta A - \delta B\|^2 + k \|\delta B\| \|\delta A - \delta B\| .$$

Si ottiene così:

$$(13) \quad |R(A_0; \delta A) - R(A_0; \delta B)| \leq k' (\|\delta A\| + \|\delta B\|) \|\delta A - \delta B\| ,$$

avendo indicato con k' una costante che dipende dall'insieme limitato in cui variano A_0 , $A_0 + \delta A$, $A_0 + \delta B$.

Consideriamo ora un intorno T di A_0 così definito: posto $A = A_0 + \tau + l\nu$ (con il significato attribuito sopra a questi simboli) sia $T = \{A : \|\tau\| \leq \varrho', |l| \leq \varrho''\}$ (ϱ' e $\varrho'' > 0$). Se ϱ' e ϱ'' sono presi abbastanza piccoli, assegnato τ , il secondo membro della (12) rappresenta un'applicazione contraente che muta l'intervallo $|l| \leq \varrho''$ in sè. Pertanto la (12) ammette una unica soluzione $l = \Psi(\tau)$. E dalla (10) si ottiene per la soluzione la maggiorazione:

$$|l| \leq \frac{h}{s} \|\tau + l\nu\|^2 = \frac{h}{s} (\|\tau\|^2 + |l|^2)$$

da cui si ricava:

$$(14) \quad |\Psi(\tau)| \leq k \|\tau\|^2 ,$$

essendo k una costante opportuna. Possiamo dunque enunciare il seguente

TEOREMA 1: *Preso un qualunque $A_0 \in W$ si può trovare un intorno di A_0 ed un iperpiano passante per A_0 , tale che tutti e soli*

i punti di W che si trovano in questo intorno sono rappresentabili cartesianamente sull'iperpiano stesso; la rappresentazione è data appunto, in un riferimento cartesiano locale, dalla $l = \Psi(\tau)$.

Dalla proprietà sopra esposta della $\Psi(\tau)$ si deduce che l'iperpiano può essere considerato tangente a W in A_0 .

OSSERVAZIONE. Le dimensioni ϱ' , ϱ'' dell'intorno T , come pure la costante k che compare nella (14) dipendono da A_0 , ma si riconosce facilmente che questi numeri si possono scegliere in modo indipendente da A_0 , se A_0 varia in un opportuno intorno di un punto di W . Giova osservare che $s = \delta\omega(A_0; \nu)$, che è, come abbiamo visto, positivo per ogni $A_0 \in W$, è funzionale continuo di A_0 . La disuguaglianza (14), con le precisazioni ora esposte, permette di ottenere questo risultato (di cui, per brevità, omettiamo la dimostrazione):

Esiste un funzionale positivo continuo $\delta(A_0)$ definito su W tale che, riportando per ogni punto $A_0 \in W$, lungo la normale ν , un segmento con centro in A_0 e semiampiezza $\delta(A_0)$, i segmenti così ottenuti ricoprono in modo semplice un intorno di W .

3. - Sia ora A_0 un punto della varietà V . La caratteristica di $\Omega(A_0)$ sarà allora 0 e tutti gli integrali della (1) (posto $A = A_0$) saranno periodici di periodo 2π .

Si supponga che, in $A = A_0 + \delta A$, $\Omega(A)$ abbia ancora caratteristica 0, cioè che:

$$\begin{aligned}
 S_1(A; 2\pi) &= 0, \\
 S_2(A; 2\pi) &= 1, \\
 S'_1(A; 2\pi) &= 1, \\
 S'_2(A; 2\pi) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Si vede subito che la terza delle (15) risulta automaticamente soddisfatta non appena siano soddisfatte le rimanenti, atteso che il wronskiano di $S_1(A; x)$ ed $S_2(A; x)$ è uguale a -1 . Pertanto

ogni soluzione del sistema

$$(16) \quad \begin{aligned} S_1(A; 2\pi) &= 0, \\ S_2(A; 2\pi) &= 1, \\ S_2'(A; 2\pi) &= 0 \end{aligned}$$

fornisce un punto della varietà V .

Le formule (3) forniscono le seguenti espressioni per i differenziali:

$$(17) \quad \begin{aligned} \delta S_1(A_0; \delta A; 2\pi) &= \int_0^{2\pi} S_1^2(A_0; t) \delta A(t) dt, \\ \delta S_2(A_0; \delta A; 2\pi) &= \int_0^{2\pi} S_1(A_0; t) S_2(A_0; t) \delta A(t) dt, \\ \delta S_2'(A_0; \delta A; 2\pi) &= - \int_0^{2\pi} S_2^2(A_0; t) \delta A(t) dt. \end{aligned}$$

Tali differenziali sono funzionali (lineari in δA) linearmente indipendenti, dal momento che i vettori

$$S_1^2(A_0; x), S_1(A_0; x) S_2(A_0; x), S_2^2(A_0; x)$$

sono, come è facile riconoscere, essi stessi linearmente indipendenti.

Per la differenziabilità dei funzionali $S_1(A; 2\pi)$, $S_2(A; 2\pi)$, $S_2'(A; 2\pi)$ si ha che condizione necessaria e sufficiente affinché un punto $A = A_0 + \delta A$ appartenga alla varietà V è che sia

$$(18) \quad \begin{aligned} \delta S_1(A_0; \delta A; 2\pi) &= - r_1(A_0; \delta A; 2\pi), \\ \delta S_2(A_0; \delta A; 2\pi) &= - r_2(A_0; \delta A; 2\pi), \\ \delta S_2'(A_0; \delta A; 2\pi) &= - r_3(A_0; \delta A; 2\pi), \end{aligned}$$

essendo $r_1(A_0; \delta A; 2\pi)$, $r_2(A_0; \delta A; 2\pi)$, $r_3(A_0; \delta A; 2\pi)$ i resti di $S_1(A; 2\pi)$, $S_2(A; 2\pi)$, $S_2'(A; 2\pi)$ rispettivamente; i quali, in virtù della (4) e delle disuguaglianze analoghe, soddisfano ad una

limitazione del tipo:

$$| r_i(A_0; \delta A; 2\pi) | \leq h \| \delta A \|^2 \quad (i = 1, 2, 3) ,$$

essendo h costante al variare di A_0 e di $A_0 + \delta A$ in un insieme limitato di H .

Per le (17) il sistema (18) può scriversi:

$$(19) \quad \begin{aligned} & \int_0^{2\pi} S_1^2(A_0; t) \delta A(t) dt = - r_1(A_0; \delta A; 2\pi) , \\ & \int_0^{2\pi} S_1(A_0; t) S_2(A_0; t) \delta A(t) dt = - r_2(A_0; \delta A; 2\pi) , \\ & \int_0^{2\pi} S_2^2(A_0; t) \delta A(t) dt = r_3(A_0; \delta A; 2\pi) . \end{aligned}$$

Imitando il procedimento seguito nella prima parte, poniamo

$$\delta A(x) = \tau(x) + l S_1^2(A_0; x) + m S_1(A_0; x) S_2(A_0; x) + n S_2^2(A_0; x) ,$$

dove l, m, n sono numeri reali e $\tau(x)$ è un vettore ortogonale a ciascuno dei tre vettori (indipendenti) $S_1^2(A_0; x), S_1(A_0; x) S_2(A_0; x), S_2^2(A_0; x)$, cioè un vettore giacente sulla varietà ottenuta annullando i tre differenziali $\delta S_1(A_0; \delta A; 2\pi), \delta S_2(A_0; \delta A; 2\pi), \delta S_2'(A_0; \delta A; 2\pi)$. Potremo allora scrivere il sistema (19) nel modo seguente:

$$(20) \quad \begin{aligned} & l(S_1^2, S_1^2) + m(S_1^2, S_1 S_2) + n(S_1^2, S_2^2) = - r_1(A_0; \delta A; 2\pi) , \\ & l(S_1 S_2, S_1^2) + m(S_1 S_2, S_1 S_2) + n(S_1 S_2, S_2^2) = - r_2(A_0; \delta A; 2\pi) , \\ & l(S_2^2, S_1^2) + m(S_2^2, S_1 S_2) + n(S_2^2, S_2^2) = r_3(A_0; \delta A; 2\pi) , \end{aligned}$$

avendo posto

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt .$$

Ora il determinante di Gram:

$$G = \begin{vmatrix} (S_1^2, S_1^2) & (S_1^2, S_1 S_2) & (S_1^2, S_2^2) \\ (S_1 S_2, S_1^2) & (S_1 S_2, S_1 S_2) & (S_1 S_2, S_2^2) \\ (S_2^2, S_1^2) & (S_2^2, S_1 S_2) & (S_2^2, S_2^2) \end{vmatrix}$$

è, per la indipendenza lineare dei vettori $S_1^2(A_0; x)$, $S_1(A_0; x)S_2(A_0; x)$, $S_2^2(A_0; x)$, maggiore di zero.

Risolto, quindi, il sistema (20) in l , m , n , ritenendo però noti i secondi membri, si ottiene:

$$(21) \quad \begin{aligned} l &= \varphi_1(l, m, n; \tau), \\ m &= \varphi_2(l, m, n; \tau), \\ n &= \varphi_3(l, m, n; \tau). \end{aligned}$$

Con considerazioni analoghe a quelle fatte in questa circostanza nello studio della varietà W , si può affermare che, assegnato τ , in norma abbastanza piccolo, il sistema (21) ammette localmente una ed una sola soluzione in l , m , n . Possiamo indicare questa soluzione con $\Psi_1(\tau)$, $\Psi_2(\tau)$, $\Psi_3(\tau)$. Anche in questo caso abbiamo:

$$(22) \quad |\Psi_i(\tau)| \leq k \|\tau\|^2 \quad (i = 1, 2, 3),$$

essendo k una costante da fissarsi localmente. Sussiste dunque il

TEOREMA 2: *Preso un qualunque punto $A_0 \in V$ si può trovare un intorno di A_0 ed una varietà lineare \mathcal{U}_{A_0} passante per A_0 , avente codimensione 3, tale che la porzione di V contenuta in questo intorno si può rappresentare cartesianamente su \mathcal{U}_{A_0} . La rappresentazione è ottenibile, in un riferimento cartesiano locale, mediante le equazioni:*

$$\begin{aligned} l &= \Psi_1(\tau), \\ m &= \Psi_2(\tau), \\ n &= \Psi_3(\tau). \end{aligned}$$

Dalle proprietà di queste funzioni si deduce che la varietà \mathcal{U}_{A_0} può essere considerata tangente a V in A_0 .

OSSERVAZIONE. Tenuto conto della (22) si può enunciare un risultato analogo a quello contenuto nell'osservazione posta alla fine del § 2. Precisamente:

Esiste un funzionale positivo continuo $\delta^(A_0)$ definito su V tale che, considerato sullo spazio tridimensionale ortogonale a V in A_0 , l'insieme dei punti che distano non più di $\delta^*(A_0)$ da A_0 , gli insiemi così ottenuti, al variare di A_0 , ricoprono semplicemente un intorno di V .*

4. - La varietà W è stata finora studiata nell'intorno di ogni suo punto; e pertanto lo studio di questa varietà non risulta ancora completo. Per completarlo occorre studiare la varietà W nell'intorno di ogni punto A_0 della varietà V ; a questo scopo taglieremo W con lo spazio tridimensionale ortogonale a V nel punto A_0 . Questo procedimento è giustificato dalla osservazione fatta a conclusione del § precedente.

Sia dunque $A = A_0 + \delta A$ con:

$$\delta A(x) = lS_1^2(A_0; x) + mS_1(A_0; x)S_2(A_0; x) + nS_2^2(A_0; x)$$

(l, m, n parametri reali). Fatta questa sostituzione, si riconosce che $S_i(A_0; \delta A; 2\pi)$, $S'_i(A_0; \delta A; 2\pi)$ ($i = 1, 2$) sono in un intorno dell'origine dello spazio euclideo (l, m, n) funzioni analitiche di l, m, n . Avendosi:

$$S_1(A_0 + \delta A; 2\pi) = \delta S_1(A_0; \delta A; 2\pi) + r_1(A_0; \delta A; 2\pi) ,$$

$$S_2(A_0 + \delta A; 2\pi) - 1 = \delta S_2(A_0; \delta A; 2\pi) + r_2(A_0; \delta A; 2\pi) ,$$

$$S'_2(A_0 + \delta A; 2\pi) = \delta S'_2(A_0; \delta A; 2\pi) + r_3(A_0; \delta A; 2\pi) ,$$

$$S'_1(A_0 + \delta A; 2\pi) - 1 = \delta S'_1(A_0; \delta A; 2\pi) + r_4(A_0; \delta A; 2\pi) ,$$

risulta, semplificando le notazioni:

$$\omega(A_0 + \delta A) = \begin{vmatrix} \delta S_1 + r_1 & \delta S_2 + r_2 \\ \delta S'_1 + r_4 & \delta S'_2 + r_3 \end{vmatrix} .$$

Possiamo decomporre $\omega(A_0 + \delta A)$ nella somma di quattro determinanti nel modo seguente:

$$\omega(A_0 + \delta A) = \begin{vmatrix} \delta S_1 & \delta S_2 \\ \delta S'_1 & \delta S'_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r_1 & \delta S_2 \\ r_4 & \delta S'_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta S_1 & r_2 \\ \delta S'_1 & r_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_4 & r_3 \end{vmatrix} .$$

Essendo nel caso attuale, come si deduce dalla (3),

$$\begin{aligned} \delta S_1 &= (lS_1^2 + mS_1S_2 + nS_2^2, S_1^2) , \\ \delta S_2 &= (lS_1^2 + mS_1S_2 + nS_2^2, S_1S_2) , \\ \delta S'_1 &= - (lS_1^2 + mS_1S_2 + nS_2^2, S_1S_2) , \\ \delta S'_2 &= - (lS_1^2 + mS_1S_2 + nS_2^2, S_2^2) , \end{aligned}$$

risulta

$$\begin{vmatrix} \delta S_1 & \delta S_2 \\ \delta S'_1 & \delta S'_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} (lS_1^2 + mS_1S_2 + nS_2^2, S_1^2) & (lS_1^2 + mS_1S_2 + nS_2^2, S_1S_2) \\ (lS_1^2 + mS_1S_2 + nS_2^2, S_1S_2) & (lS_1^2 + mS_1S_2 + nS_2^2, S_2^2) \end{vmatrix} ,$$

cioè $\begin{vmatrix} \delta S_1 & \delta S_2 \\ \delta S'_1 & \delta S'_2 \end{vmatrix}$ è una forma quadratica in l, m, n , forma

quadratica che indicheremo con $\chi(l, m, n)$.

Tenuto conto delle proprietà degli r_i ($i = 1, 2, 3, 4$) possiamo dire che

$$\omega(A_0 + \delta A) = \chi(l, m, n) + \eta(l, m, n) ,$$

dove:

$$\eta(l, m, n) = \begin{vmatrix} r_1 & \delta S_2 \\ r_4 & \delta S'_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta S_1 & r_2 \\ \delta S'_1 & r_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_4 & r_3 \end{vmatrix}$$

è (per valori di l, m, n abbastanza piccoli in valore assoluto) una funzione analitica di l, m, n , infinitesima di ordine superiore rispetto $l^2 + m^2 + n^2$. Ora l'equazione:

$$\chi(l, m, n) + \eta(l, m, n) = 0$$

rappresenta la superficie dello spazio ordinario a tre dimensioni secondo cui la varietà ortogonale a V per A_0 taglia la varietà W .

Questa equazione mediante la trasformazione affine (non degenerare per l'indipendenza dei vettori S_1^2, S_1S_2, S_2^2) realizzata dalle

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (lS_1^2 + mS_1S_2 + nS_2^2, S_1^2) , \\ \xi_2 &= (lS_1^2 + mS_1S_2 + nS_2^2, S_1S_2) , \\ \xi_3 &= (lS_1^2 + mS_1S_2 + nS_2^2, S_2^2) , \end{aligned}$$

viene mutata nell'equazione

$$(23) \quad \xi_2^2 - \xi_1\xi_3 + \zeta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0 .$$

Si osserva ora che

$$\xi_2^2 - \xi_1\xi_3 = 0$$

rappresenta un cono reale non degenerare e che tagliando la superficie (23) mediante il piano $\xi_2 = 0$ si trova una curva che presenta due rami reali passanti per l'origine. Sussiste dunque il seguente

TEOREMA 3: *Mandando per $A_0 \in V$ la varietà lineare, tridimensionale, ortogonale a V , questa taglia W secondo una superficie (bidimensionale), la quale presenta in A_0 una singolarità conica. Il cono, cui questa superficie è « tangente », è reale e non degenerare. Inoltre, in ogni intorno di A_0 , cadono punti di W .*

BIBLIOGRAFIA

- [1] FITE W. B.: *Periodic solutions of linear differential equations.* Ann. of Math., (2), 28 (1927).
- [2] FLOQUET G.: *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques.* Ann. Sc. de l'Éc. Norm. Sup., (2), XII (1883).
- [3] HILL G. W.: *On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon.* Acta Math., VIII (1886).

- [4] LIAPOUNOFF A.: *Sur une série relative à la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*. C. Rend. Ac. Sc. 123 (1896).
- [5] LIAPOUNOFF A.: *Sur une équation différentielle linéaire du second ordre*. Op. cit., 128 (1899).
- [6] LIAPOUNOFF A.: *Sur une équation transcendante et les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques*. Op. cit., 128 (1899).
- [7] Miranda C.: *Problemi di esistenza in analisi funzionale* (Pisa, 1948-49).
- [8] SANSONE G.: *Equazioni differenziali nel campo reale*, I (Bologna, 1956).
- [9] UNDERWOOD F.: *Note on the periodic solutions of linear differential equations*. Ann. of Math., (2), 31 (1930).