RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCESCO MAISANO

L'integrale generale di un sistema di equazioni lineari del primo ordine ai differenziali totali a coefficienti costanti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 34 (1964), p. 390-400

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1964__34__390_0>

L'INTEGRALE GENERALE DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI DEL PRIMO ORDINE AI DIFFERENZIALI TOTALI A COEFFICIENTI COSTANTI

Nota *) *di* FRANCESCO MAISANO (*a Palermo*) **)

1. - Si consideri il sistema di equazioni lineari ai differenziali totali

$$dY = (Adu + Bdv)Y \tag{1}$$

dove A e B sono matrici di tipo (n, n) a elementi costanti dati nel campo complesso e Y il vettore $\| y_i(u, v) \|$ ad n componenti che si supporranno funzioni differenziabili delle variabili u e v.

Il sistema (1) è equivalente al sistema alle derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial u} Y = AY \qquad \frac{\partial}{\partial v} Y = BY \tag{2}$$

ed è ben noto che la condizione necessaria e sufficiente di completa integrabilità di tale sistema è data dalla permutabilità delle due matrici A e B.

In questa nota determineremo, in forma esplicita, l'integrale del sistema (2) e quindi del sistema (1) senza che sia fatta alcuna limitazione nei riguardi delle matrici A e B, tranne ovviamente la essenziale condizione di permutabilità.

---

*) Pervenuto in redazione il 5 marzo 1964.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Palermo.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

Ricordiamo, in ordine al problema dell'integrazione di un sistema di equazioni lineari del primo ordine ai differenziali totali, i lavori di N. Saltykow [1]), di E. Vessiot [2]), di H. Charles [3]) che trattano però il problema sotto speciali ipotesi riguardanti le matrici A e B.

Altri due lavori, più significativi, sull'argomento sono dovuti a B. Pini [4]) e a G. Trevisan [5]). Questi A.A. trattano il problema raggiungendo risultati notevoli.

Ricordiamo infine un lavoro dell'A. [6]) che tratta il problema sotto opportune ipotesi sulle matrici A e B.

Le nomenclature adottate nella presente nota sono aderenti a quelle usate nei due ultimi lavori su citati le cui indicazioni bibliografiche sono riportate nelle note (5) e (6) a piè di pagina.

2. - Supponiamo che la matrice A abbia t autovalori distinti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ ordinatamente di molteplicità $r_1, r_2, \ldots, r_t$ e indici $d_1, d_2, \ldots, d_t$.

Denotiamo poi con $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\bar{t}}$ gli autovalori distinti della matrice B ordinatamente di molteplicità $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_{\bar{t}}$ e indici $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \ldots, \bar{d}_{\bar{t}}$.

Con riferimento alla matrice A sia

$$(e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \ldots, e_{d_i}^{(i)})$$

---

1) N. Saltykow: *Integration des équations aux differentielles totales linéaires à coefficients constants.* C.R. Acad. Sci. Paris, 225, 1947.

2) E. Vessiot: *Sur l'integration des systémes de Pfaff linéaires et homogénes à coefficients constants.* C.R. Acad. Sci. Paris, 226 (1948).

3) H. Charles: *Sur les systémes de Pfaff linéaires homogénes à coefficients constants.* Bull. Soc. Sci. Liège, 17 (1948).

4) B. Pini: *Sui sistemi di equazioni lineari del primo ordine ai differenziali totali.* Bollettino dell'U.M.I. III, 1950.

5) G. Trevisan: *Un'espressione esplicita per l'integrale di un sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie a coefficienti costanti. Applicazioni.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. Vol. XXXI, 1961.

6) F. Maisano: *Sull'integrale generale di un sistema di equazioni lineari del primo ordine ai differenziali totali a coefficienti costanti* (questi Rendiconti, questo Volume).

la segnatura di Segre relativa alla radice α_i $(i = 1, 2, ..., t)$.

È noto allora che esiste una matrice S di tipo (n, n), non singolare, tale che la trasformata A' di A mediante S, cioè la matrice

$$A' = SAS^{-1}$$

assume forma canonica di Jordan e, come è ben noto, alle due matrici A e A' competono gli stessi autovalori con eguale segnatura.

Per comodità di notazione poniamo per ogni intero naturale m

$$I_m(\alpha) = \alpha I_m + [u_{rs}]_m$$

dove α è un numero, I_m la matrice unità d'ordine m, e $[u_{rs}]_m$ la matrice d'ordine m con gli elementi del tipo $u_{r,r+1}$ eguali ad 1 e gli altri elementi nulli.

Allora la matrice $A' = SAS^{-1}$ è composta mediante le matrici quadrate $A'_1, A'_2, ..., A'_t$ rispettivamente di ordini $r_1, r_2, ..., r_t$ disposte secondo la diagonale principale, essendo

$$A'_i = \left[\begin{array}{c|c|c|c}
I_{e_1^{(i)}}(\alpha_i) & 0 & & \\
\hline
 & I_{e_2^{(i)}}(\alpha_i) & & \\
\hline
 & & \ddots & 0 \\
\hline
0 & 0 & & I_{e_{\alpha_i}^{(i)}}(\alpha_i)
\end{array}\right]$$

cioè la matrice A' si presenta nella forma:

$$A' = \begin{bmatrix} A'_1 & & & & \\ & A'_2 & & 0 & \\ & & \cdot & & \\ & 0 & & \cdot & \\ & & & & A'_t \end{bmatrix}$$

e si osservi che A'_t ha r_t autovalori tutti eguali a α_t.

Essendo per ipotesi A e B permutabili, la matrice $B' = SAS^-$ è del tipo [7]):

$$B' = \begin{bmatrix} B'_1 & & & & & \\ & B'_2 & & & & \\ & & \cdot & 0 & & \\ & 0 & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & B'_t \end{bmatrix}$$

dove le matrici componenti $B'_1, B'_2, \ldots, B'_t$ sono rispettivamente di ordine $r_1, r_2, \ldots, r_t$.

È appena necessario rilevare che le due matrici B e B' hanno gli stessi autovalori con la stessa molteplicità e che gli autovalori della generica componente B'_i sono ovviamente autovalori di B' e quindi di B.

Si osservi che la permutabilità delle matrici A e B porta alla permutabilità delle matrici A' e B' e questa alla permutabilità delle t coppie di matrici

$$A'_i\,, \quad B'_i \qquad\qquad \text{per} \quad i = 1, 2, \ldots, t\,.$$

Diremo che due insiemi Σ e Σ' di componenti di A' e di B'

$$(A'_{i_1}, A'_{i_2}, \ldots, A'_{i_m}) \qquad\qquad (B'_{i_1}, B'_{i_2}, \ldots, B'_{i_m})$$

sono mutuamente associati se:

a) Comunque si consideri una componente B'_k di B' con $k \neq i_1, i_2, \ldots, i_m$ nessuno degli autovalori di B'_k risulta eguale ad un autovalore di una matrice dell'insieme Σ'.

b) Comunque si consideri un sotto-insieme proprio Σ'' dell'insieme Σ' esiste almeno un elemento di Σ' non appartenente a Σ'' che ha un autovalore eguale ad un autovalore di qualche elemento di Σ'' [8]).

---

[7]) Cfr., per es., S. Cherubino: *Calcolo delle matrici*, Edizioni Cremonese Roma, 1957, pagg. 180 e seguenti.

[8]) Due insiemi di componenti di A' e B' mutuamente associati sono individuati dalla successione finita degli indici $(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_m)$ che contraddistinguono le componenti di A', e quindi quelle di B', appartenenti rispettivamente al primo e al secondo insieme.

Due insiemi di componenti di A' e B' mutuamente associati sono univocamente determinati da un qualsiasi elemento di uno dei due insiemi e ogni componente di A' (di B') appartiene ad un insieme di componenti di A' (di B') mutuamente associato ad un insieme di componenti di B' (di A').

Conseguentemente esiste una ed una sola distribuzione in coppie di insiemi di componenti associati di tutte le componenti di A' e B' ed inoltre se Σ e Σ', Σ^* e $\Sigma^{*\prime}$ sono due coppie di insiemi di componenti di A' e B' mutuamente associati, è vuota l'intersezione degli insiemi Σ, Σ^* e degli insiemi Σ', $\Sigma^{*\prime}$.

Non si lede ovviamente la generalità del discorso nel supporre che le componenti di A' e B' appartenenti ad una coppia di insiemi associati siano individuate da indici consecutivi.

Supponiamo che siano ϱ le coppie di insiemi associati nelle quali si distribuiscono le t componenti di A' e le t componenti di B' e che tali coppie siano individuate dalle ϱ successioni finite di indici:

$$(g_{\lambda-1}+1,\ g_{\lambda-1}+2,\ \ldots,\ g_\lambda) \qquad \text{per } \lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ \varrho$$

$$\text{e ove si pensi} \quad g_0 = 0$$

e supponiamo inoltre che gli autovalori distinti delle componenti di B' appartenenti alla prima coppia siano β_1, β_2, ..., $\beta_{\bar{s}_1}$, quelli delle componenti di B' appartenenti alla seconda coppia siano $\beta_{\bar{s}_1+1}$, $\beta_{\bar{s}_1+2}$, ..., $\beta_{\bar{s}_2}$, e così via fino a considerare gli autovalori delle componenti di B' appartenenti alla ϱ-esima coppia $\beta_{\bar{s}_{\varrho-1}+1}$, $\beta_{\bar{s}_{\varrho-1}+2}$, ..., $\beta_{\bar{s}_\varrho}$.

Si fissi ora una componente A'_i di A'. Essa appartiene all'insieme di componenti di A' della λ-esima coppia di insiemi mutuamente associati, essendo λ tale che risulti:

$$g_{\lambda-1} < i \leqslant g_\lambda \,.$$

Gli autovalori della componente B'_i di B' appartengono all'insieme di autovalori di B'

$$\beta_{\bar{s}_{\lambda-1}+1},\ \beta_{\bar{s}_{\lambda-1}+2},\ \ldots,\ \beta_{\bar{s}_\lambda}\,, \tag{3}$$

le cui molteplicità rispetto a B'_i denotiamo con

$$s^{(i)}_{\bar{g}_{\lambda-1}+1}, \; s^{(i)}_{\bar{g}_{\lambda-1}}, \dots, \; s_{\bar{g}_\lambda} .$$

È ovvio che non tutte le β dell'insieme (3) debbono essere necessariamente autovalori di B'_i e quindi se, per es., β_j ($\bar{g}_{\lambda-1} < < j \leqslant \bar{g}_\lambda$) non è autovalore di B'_i sarà $s^{(i)}_j = 0$; è però certo che ogni autovalore dell'insieme (3) deve essere autovalore di almeno uno degli elementi appartenenti all'insieme di componenti di B' della λ-esima coppia di insieme mutuamente associati.

3. - Si riprenda il sistema (1) equivalente al sistema:

$$\frac{\partial}{\partial u} Y = AY , \quad \frac{\partial}{\partial v} Y = BY \tag{2}$$

e si ponga in queste ultime, con rispondenza alle nomenclature dottate nel n. 2,

$$Y = S^{-1}Z .$$

Il sistema (2) si scrive allora:

$$S^{-1} \frac{\partial}{\partial u} Z = AS^{-1}Z , \quad S^{-1} \frac{\partial}{\partial v} Z = BS^{-1}Z$$

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial u} Z = A'Z , \quad \frac{\partial}{\partial v} Z = B'Z . \tag{4}$$

Tenendo conto della struttura delle due matrici A' e B', l'integrazione del sistema (4) è ricondotta all'integrazione dei t sistemi completamente integrabili (si ricordi che è $A'_iB'_i = B'_iA'_i$)

$$\frac{\partial}{\partial u} Z^{(i)} = A'_iZ^{(i)} , \quad \frac{\partial}{\partial v} Z^{(i)} = B'_iZ^{(i)} \tag{5}$$

$$(\text{per } i = 1, 2, \dots, t) ,$$

nel senso che una volta trovati i t integrali generali $Z^{(i)}$ dei t sistemi (5), l'integrale generale Z del sistema (4) è:

$$Z = \begin{bmatrix} Z^{(1)} \\ Z^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z^{(t)} \end{bmatrix}$$

Ora, l'integrale del generico sistema (5), ricordando che alla matrice A'_i compete il solo autovalore α_i di molteplicità r_i e di indice d_i, e supposto che sia $g_{\lambda-1} < i \leqslant g_\lambda$ può scriversi in una delle due forme [9]):

$$(6) \qquad Z^{(i)} = \left[I + \sum_{s=1}^{d_i-1} \frac{(-1)^s}{s\,!} u^s(\alpha_i I - A'_i)^s \right] \cdot$$

$$\cdot\, S'_i \sum_{j=1}^{\tau_i} \left[I + \sum_{\sigma=1}^{\varrho_{j/i}-1} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma\,!} v^\sigma(\gamma'_{j/i} I - H'_{\alpha i})^\sigma \right] Q'_{j/i} e^{\gamma'_{i/j} v} e^{\alpha_i u}$$

$$(7) \qquad Z^{(i)} = \sum_{h=\bar{g}_{\lambda-1}+1}^{\bar{g}_\lambda} \left[I + \sum_{k=1}^{s^{(i)}_{\bar{g}_{\lambda-1}+h}-1} \frac{(-1)^k}{k\,!} v^k(\beta_h I - B'_i)^k \right] \cdot$$

$$\cdot\, \bar{S}'_h \sum_{\mu=1}^{\bar{\tau}_h} \left[I + \sum_{\nu=1}^{\bar{\varrho}_{\mu/h}-1} \frac{(-1)^\nu}{\nu\,!} u^\nu(\bar{\gamma}'_{\mu/h} I - H'_{\beta_h})^\nu \right] \bar{Q}'_{\mu/h} e^{\gamma'_{\mu/h} u} e^{\beta_h v}$$

dove nella (6) S'_i è una matrice di tipo (r_i, r_i) le cui r_i colonne sono r_i soluzioni particolari ed indipendenti del sistema algebrico lineare

$$(\alpha_i I - A'_i)^{d_i} P_i = 0 \ ,$$

H'_{α_i} una certa matrice d'ordine r_i dipendente, oltre che dall'autovalore α_i, dalla matrice B'_i, τ_i il numero di autovalori distinti $\gamma'_{j/i}$ di $H'_{\alpha i}$, $\varrho_{j/i}$ la molteplicità dell'autovalore $\gamma'_{j/i}$ e infine $Q'_{j/i}$

---

[9]) Cfr. il lavoro citato nella nota [6]).

la soluzione generale del sistema algebrico:

$$(\gamma'_{j/i} I - H'_{\alpha_i})^{\varrho_{j/i}} Q'_{ji} = 0 \, .$$

Significati analoghi hanno i simboli corrispondenti a questi nella (7).

Una più precisa specificazione dei simboli che compaiono nelle (6) e (7) si trova nei lavori citati nelle note [5]) e [6]).

Nella (7), in corrispondenza ad un eventuale autovalore β_h di B' $(\bar{g}_{\lambda-1} < h \leqslant \bar{g}_\lambda)$ che non sia autovalore di B'_i si supporrà non scritto l'addendo h-esimo della sommatoria $\sum_{h=\bar{g}_{\lambda-1}+1}^{\bar{g}_\lambda}$.

Dal diretto confronto della (6) e della (7) si deduce intanto che ciascuna delle $\gamma'_{j/i}$ che compare nella (6) deve essere una delle β_h che effettivamente compare nella (7) e che ciascuna delle $\bar{\gamma}'_{\mu/h}$ che effettivamente compare nella (7) deve essere uguale ad α_i.

Pertanto sarà τ_i eguale all'effettivo numero di autovalori distinti della B'_i, $\bar{\tau}_h$ e $\bar{\varrho}_{\mu/h}$, se compare il termine h-esimo nella (7) eguali rispettivamente ad 1 e ad $s^{(i)}_{\sigma_{\lambda-1}} + h$.

L'integrale $Z^{(i)}$, sfruttando la (6), si scrive allora:

$$Z^{(i)} = \left[I + \sum_{s=1}^{d_i-1} \frac{(-1)^s}{s!} u^s (\alpha_i I - A'_i)^s \right] \cdot \tag{8}$$

$$\cdot S'_i \sum_{j=\bar{g}_{\lambda-1}+1}^{\bar{g}_\lambda} \left[I + \sum_{\sigma=1}^{\varrho_{j/i}-1} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma!} v^\sigma (\beta_j I - H'_{\alpha_i})^\sigma \right] Q'_{j/i} e^{\beta_j v} e^{\alpha_i u}$$

e in questa, in corrispondenza ad un eventuale autovalore β_j di B'_i (con $\bar{g}_{\lambda-1} < j \leqslant \bar{g}_\lambda$) che non sia autovalore di B'_i si supporrà non scritto l'addendo j-esimo della sommatoria.

Ma come si è già rilevato l'integrale del sistema (4) è:

$$Z = \begin{bmatrix} Z^{(1)} \\ Z^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z^{(t)} \end{bmatrix}$$

e ricordando che l'integrale Y del sistema (2) è legato all'integrale Z del sistema (4) dalla

$$Y = S^{-1}Z$$

tenendo conto della (8) si riconosce che ogni componente del vettore Y è combinazione lineare a coefficienti polinomi in u e v, di espressioni del tipo:

$$e^{\beta_j v}e^{\alpha_i u}$$

nelle quali però α_i e β_j sono autovalori di componenti A'_j, B'_i di A' e B' appartenenti a due insiemi di componenti di A' e B' mutuamente associati nel senso precisato nel n. 2.

4. - Con notazioni aderenti a quelle fino ad ora adoperate l'integrale generale del sistema (2) può scriversi [9]), tenendo conto dei risultati raggiunti nel n. 3, in una delle due maniere:

$$(9) \qquad Y = \sum_{\lambda=1}^{\varrho}\left[\sum_{i=g_{\lambda-1}+1}^{g_\lambda}\left[I + \sum_{s=1}^{d_i-1}\frac{(-1)^s}{s\,!}\,u^s(\alpha_i I - A)^s\right]\right]\cdot$$

$$\cdot S_i \sum_{j=\bar{g}_{\lambda-1}+1}^{\bar{g}_\lambda}\left[I + \sum_{\sigma=1}^{e_{j/i}-1}\frac{(-1)^\sigma}{\sigma\,!}\,v^\sigma(\beta_j I - H_{\alpha_i})^\sigma\right]Q_{j/i}e^{\beta_j v}e^{\alpha_i u}$$

$$(10) \qquad Y = \sum_{\lambda=1}^{\varrho}\left[\sum_{j=\bar{g}_{\lambda-1}+1}^{\bar{g}_\lambda}\left[I + \sum_{s=1}^{\bar{d}_j-1}\frac{(-1)^s}{s\,!}\,v^s(\beta_j I - B)^s\right]\right]\cdot$$

$$\cdot \bar{S}_j \sum_{i=g_{\lambda-1}+1}^{g_\lambda}\left[I + \sum_{\sigma=1}^{\bar{e}_{i/j}-1}\frac{(-1)^\sigma}{\sigma\,!}\,u^\sigma(\alpha_i I - \bar{H}_{\beta_j})^\sigma\right]\bar{Q}_{i/j}e^{\alpha_i u}e^{\beta_j v}$$

e qui si conviene, per la (9), di pensare non scritto, per ogni i, l'addendo di posto j nella $\sum_{j=\bar{g}_{\lambda-1}+1}^{\bar{g}_\lambda}$ se β_j non è autovalore di B'_i e per la (10) di pensare non scritto per ogni j l'addendo di posto i nella $\sum_{i=g_{\lambda-1}+1}^{g_\lambda}$ qualora β_j non è autovalore di B'_i.

Si fissi ora a partire dalla (9) un integrale particolare del sistema (2): ciò si ottiene in corrispondenza ad una particolare scelta dei parametri che intervengono nelle $Q_{j/i}$ soluzioni generali dei sistemi lineari algebrici

$$(\beta_j I - H_{\alpha_i})^{\varrho_{i/j}} Q_{j/i} = 0 .$$

È chiaro che con una opportuna scelta dei valori dei parametri che intervengono nelle $\overline{Q}_{i/j}$, soluzioni generali dei sistemi algebrici lineari

$$(\alpha_i I - \overline{H}_{\beta_j})^{\overline{\varrho}_{i/j}} \overline{Q}_{i/j} = 0$$

la (10) si riduce alla prefissata soluzione.

Denotiamo ancora con (9) e (10) le due determinazioni degli integrali.

Allora saranno eguali i due termini della (9) e (10):

$$\left[I + \sum_{s=1}^{d_i-1} \frac{(-1)^s}{s!} u^s (\alpha_i I - A)^s\right] \cdot \tag{11}$$
$$\cdot S_i \left[I + \sum_{\sigma=1}^{\varrho_{i/j}-1} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma!} (\beta_j I - H_{\alpha/_i})^\sigma\right] Q_{j/i} e^{\beta_j v} e^{\alpha_i u}$$

$$\left[I + \sum_{s=1}^{\overline{d}_j-1} \frac{(-1)^s}{s!} v^s (\beta_j I - B)^s\right] \cdot \tag{12}$$
$$\cdot \overline{S}_j \left[I + \sum_{\sigma=1}^{\overline{\varrho}_{i/j}-1} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma!} u^\sigma (\alpha_i I - \overline{H}_{\beta_i})^\sigma\right] \overline{Q}_{i/j} e^{\alpha_i u} e^{\beta_j v} .$$

Posto in (11) e (12) prima $u = 0$ e $v = 0$ e poi $u = 0$, queste implicano:

$$S_i Q_{j/i} = \overline{S}_j \overline{Q}_{i/j}$$

$$S_i \left[I + \sum_{\sigma=1}^{\varrho_{j/i}-1} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma!} v^\sigma (\beta_j I - H_{\alpha_i})^\sigma\right] Q_{j/i} =$$
$$= \left[I + \sum_{s=1}^{\overline{d}_j-1} \frac{(-1)^s}{s!} v^s (\beta_j I - B)^s\right] \overline{S}_j \overline{Q}_{i/j}$$

e quindi

$$S_i\left[I+\sum_{\sigma=1}^{e_{j/i}-1}\frac{(-1)^\sigma}{\sigma!}v^\sigma(\beta_j I-H_{\alpha_i})^\sigma\right]Q_{j/i}=$$
$$=\left[I+\sum_{s=1}^{d_j-1}\frac{(-1)^s}{s!}v^s(\beta_j I-B)^s\right]S_iQ_{j/i}\,.$$

La (11) si scrive allora:

$$\left[I+\sum_{s=1}^{d_i-1}\frac{(-1)^s}{s!}u^s(\alpha_i I-A)^s\right]\left[I+\sum_{\sigma=1}^{\bar{d}_j-1}\frac{(-1)^\sigma}{\sigma!}v^\sigma(\beta_j I-B)^\sigma\right]S_iQ_{j/i}$$

e l'integrale generale del sistema (2) o del sistema equivalente (1) è dato da:

$$Y=\sum_{\lambda=1}^{\varrho}\left[\sum_{i=g_{\lambda-1}+1}^{g\lambda}\left[I+\sum_{s=1}^{d_i-1}\frac{(-1)^s}{s!}u^s(\alpha_i I-A)^s\right]\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left[\sum_{j=\bar{g}_{\lambda-1}-1}^{\bar{g}\lambda}\left[I+\sum_{\sigma=1}^{\bar{d}_j-1}\frac{(-1)^\sigma}{\sigma!}v^\sigma(\beta_j I-B)\right]^s\right]S_iQ_{j/i}e^{\alpha_i u}e^{\beta_j v}\right]$$

dove, ricordiamo, si pensano non scritti per ogni i gli addendi della somma $\sum_{j=\bar{g}_{\lambda-1}+1}^{\bar{g}\lambda}$ di posto j se β_j non è autovalore della componente B_i' di B'.