Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Claudio Margaglio

Sul prodotto tensoriale di fasci algebrici coerenti e lisci

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 34 (1964), p. 378-389

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1964__34__378_0>

SUL PRODOTTO TENSORIALE DI FASCI ALGEBRICI COERENTI E LISCI

Nota *) *di* CLAUDIO MARGAGLIO (*a Padova*) **)

SOMMARIO

Nella prima parte di questa nota (n. 1), si trovano alcuni criteri per accertare se certi prodotti tensoriali di fasci algebrici coerenti e lisci (= privi di torsione) sono o no fasci privi di torsione. Questi criteri sono risultati nel tentativo di provare che il fascio prodotto tensoriale di due fasci algebrici coerenti lisci soddisfacenti alla *P.E.* (= « proprietà di estensione », cfr. [1], [4]) è ancora tale. (È risultato invece, come mostrano gli esempi riportati, che il prodotto tensoriale di due siffatti fasci non è necessariamente liscio ed anche se lo è non soddisfa necessariamente alla *P.E.*).

Nella seconda parte della presente nota (n. 2), si esaminano alcune condizioni sufficienti per l'annullarsi del fascio $\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{A})$.

Infine (nn. 3, 4) si riportano alcune applicazioni delle proprietà enunciate, fra cui un esempio di un tipo di fasci algebrici coerenti lisci irriducibili per somma diretta, di rango (finito) arbitrariamente assegnato.

---

*) Pervenuto in redazione il 30 gennaio 1964.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

* * *

In tutto il seguito si supporrà (benchè queste ipotesi non siano tutte dappertutto necessarie) che V sia una varietà algebrica (sopra un corpo K algebricamente chiuso), irriducibile, soddisfacente alla *P.E.*, affine e normale e si indicherà con $\mathscr{A}$ il fascio degli anelli locali di V.

n. 1.

PROPOSIZIONE 1.: « *Date su V le due sequenze esatte di fasci algebrici coerenti lisci*:

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow 0\,,$$
$$0 \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{L}' \longrightarrow \mathscr{N} \longrightarrow 0\,,$$

con $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$ localmente liberi, si ha: $t(\mathscr{G} \otimes \mathscr{M}) \approx t(\mathscr{N} \otimes \mathscr{F})$ (*indicando col simbolo $t\mathscr{H}$ il sottofascio di torsione del fascio $\mathscr{H}$*) ».

Dimostrazione.

Si moltiplichi tensorialmente (su $\mathscr{A}$) la prima sequenza per $\mathscr{N}$ e la seconda per $\mathscr{G}$. Tenuto conto che se n è un intero positivo, $\mathscr{F}$ ed $\mathscr{H}$ fasci algebrici coerenti dei quali almeno uno localmente libero allora $\mathscr{T}or^n_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{H}) = 0$, si ottengono le sequenze esatte [1]:

$$0 \longrightarrow \mathscr{T}or\,(\mathscr{N}, \mathscr{G}) \longrightarrow \mathscr{N} \otimes \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{N} \otimes \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{N} \otimes \mathscr{G} \longrightarrow 0\,,$$
$$0 \longrightarrow \mathscr{T}or(\mathscr{N}, \mathscr{G}) \longrightarrow \mathscr{M} \otimes \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{L}' \otimes \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{N} \otimes \mathscr{G} \longrightarrow 0\,.$$

Si osservi che $\mathscr{N} \otimes \mathscr{L}$ ed $\mathscr{L}' \otimes \mathscr{G}$ sono lisci poichè $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$, sono localmente liberi e che il fascio $\mathscr{T}or(\mathscr{N}, \mathscr{G})$ ha rango zero. Pertanto:

$$t(\mathscr{N} \otimes \mathscr{F}) \approx \mathscr{T}or(\mathscr{N}, \mathscr{G}) \approx t(\mathscr{M} \otimes \mathscr{G})\,.$$

COROLLARIO 1.1.: « *Date su V le sequenze esatte di fasci algebrici coerenti e lisci*:

$$0 \longrightarrow \mathscr{M} \xrightarrow{\varphi_1} \mathscr{L}_1 \xrightarrow{\varphi_2} \mathscr{L}_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathscr{L}_{n-1} \longrightarrow \mathscr{L}_n\,,$$
$$0 \longrightarrow \mathscr{L}'_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathscr{L}_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \mathscr{L}'_n \xrightarrow{\varphi_n} \mathscr{F} \longrightarrow 0\,,$$

---

[1]) Nel seguito invece dei simboli: $\mathscr{T}or^1_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}), \mathscr{F} \underset{\mathscr{A}}{\otimes} \mathscr{G}, \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ si useranno rispettivamente i simboli: $\mathscr{T}or(\mathscr{F}, \mathscr{G})$, $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$, $\mathscr{E}xt(\mathscr{F}, \mathscr{G})$, (essendo $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ fasci di $\mathscr{A}$-moduli qualunque).

se i fasci $\mathscr{L}_i$, $\mathscr{L}'_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ sono localmente liberi, allora il prodotto tensoriale $\mathscr{M} \otimes \mathscr{F}$ risulta privo di torsione ».

Dimostrazione.

Si proceda per induzione: per $n = 1$ si hanno le due sequenze esatte: $0 \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{L}_1$, $0 \longrightarrow \mathscr{L}'_1 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$ e quindi essendo $\mathscr{F}$ localmente libero $\mathscr{M} \otimes \mathscr{F}$ è liscio; se $n > 1$ si ponga $\mathscr{M}_1 = \mathscr{I}m(\varphi_2)$, $\mathscr{F}_1 = \mathscr{I}m(\psi_{n-1})$ e si applichi la proposizione 1 alle due sequenze esatte:

$$0 \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{L}_1 \longrightarrow \mathscr{M}_1 \longrightarrow 0\,,$$
$$0 \longrightarrow \mathscr{F}_1 \longrightarrow \mathscr{L}'_n \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0\,;$$

per ipotesi induttiva $\mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{F}_1$ è liscio e quindi lo è pure $\mathscr{M} \otimes \mathscr{F}$ in base alla proposizione 1.

PROPOSIZIONE 2.: « *Sia $\mathscr{F}$ un fascio algebrico coerente e liscio su V, non localmente libero e sia (x) un punto di V tale che $\mathscr{F}_x$ non sia $\mathscr{A}_x$-modulo libero.*

Siano $s_1, s_2, \dots, s_p$ p sezioni di $\mathscr{F}$ sopra un opportuno intorno aperto affine U di (x), tali da generare $\mathscr{F} \mid U$ e tali che i germi $s_{1x}, \dots, s_{px}$ formino un sistema minimale di generatori per $\mathscr{F}_x$.

Sia $\mathscr{I}$ il fascio di ideali, definito sopra U, formato con tutti i germi g_{iy} di $\mathscr{A}_y$ $(y \in U)$ che compaiono come combinatori lineari in qualche relazione del tipo $\sum_1^p{}_i g_{iy} s_{iy} = 0$. Allora il fascio $\mathscr{I} \otimes (\mathscr{F} \mid U)$ ha torsione ».

Dimostrazione.

Verifichiamo anzitutto che $\mathscr{I}_x \neq \mathscr{A}_x$: poichè i germi s_{ix} costituiscono un sistema minimale di generatori per $\mathscr{F}_x$, segue che $\mathscr{I}_x$ non contiene alcun elemento dotato d'inverso e quindi $\mathscr{I}_x$ è contenuto nell'ideale massimale M_x di $\mathscr{A}_x$.

Si osservi pure che $\mathscr{I} \neq 0$ giacchè p è maggiore del rango di $\mathscr{F}$. Si consideri ora sopra U l'omomorfismo suriettivo k: $\mathscr{A}^p \longrightarrow \mathscr{F}$ definito con $k(g_1, \dots, g_p) = \sum_1^p{}_i g_i s_i$ e si consideri (ancora su U) un omomorfismo $\alpha : \mathscr{A}^s \longrightarrow \mathscr{A}^p$ tale che sia esatta la sequenza:

$$\mathscr{A}^s \xrightarrow{\alpha} \mathscr{A}^p \xrightarrow{k} \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

e quindi anche la:

$$0 \longrightarrow \alpha(\mathscr{A}^s) \xrightarrow{h} \mathscr{A}^p \xrightarrow{k} \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

essendo h l'inclusione di $\alpha(\mathscr{A}^s)$ in $\mathscr{A}^p$.

Si moltiplichi tensorialmente questa sequenza per $\mathscr{I}$ e si consideri il diagramma commutativo ed esatto:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & 0 \arrow[d] & \mathscr{T} \arrow[d, "j"] & \\
 & \alpha(\mathscr{A}^s) \otimes \mathscr{I} \arrow[r, "h \otimes \mathscr{I}"] \arrow[d, "\xi_1"'] & \mathscr{A}^p \otimes \mathscr{I} \arrow[r, "k \otimes \mathscr{I}"] \arrow[d, "\xi_2"'] & \mathscr{F} \otimes \mathscr{I} \arrow[r] \arrow[d, "\xi_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \alpha(\mathscr{A}^s) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & \mathscr{A}^p \arrow[r, "k"] & \mathscr{F} \arrow[r] & 0 \\
 & \mathscr{S} \arrow[d] & & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

nel quale gli omomorfismi ξ_i sono definiti con $\xi_i(\sigma \otimes g) = g \cdot \sigma$. Fuori da un chiuso proprio (anzi, avente codimensione > 1) gli omomorfismi ξ_i sono biiettivi e poichè $\mathscr{F}$ è liscio segue che il fascio $\mathscr{T} = \mathscr{N}c(\xi_3)$ è il sottofascio di torsione di $\mathscr{F} \otimes \mathscr{I}$.

Si osservi ora che $h(\alpha(\mathscr{A}^s)) \subseteq \xi_2(\mathscr{A}^p \otimes \mathscr{I})$, giacchè se $(g_1, \ldots, g_p) \in \mathscr{I}m(h) = \mathscr{N}c(k)$ allora $\sum_1^p g_i s_i = k(g_1, \ldots, g_p) = 0$ e pertanto, per la definizione di $\mathscr{I}$, $g_i \in \mathscr{I}$ $(i = 1, \ldots, p)$.

Si può allora scrivere:

$$(g_1, \ldots, g_p) = \xi_2((1, 0, \ldots, 0) \otimes g_1 + \ldots + (0, \ldots, 0, 1) \otimes g_p)\,.$$

Ne segue che si può definire un omorfismo $\mu : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ ponendo: $\mu(s) = j^{-1}(k \otimes \mathcal{I}) \cdot \xi_2^{-1} \cdot h \cdot p^{-1}(s)$, giacchè risulta anche: $\xi_3 \cdot (k \otimes \mathcal{I}) \cdot \xi_2^{-1} \cdot h \cdot p^{-1}(s) = 0$ e $(k \otimes \mathcal{I}) \cdot \xi_2^{-1} \cdot h \cdot \xi_1(\alpha(\mathcal{A}^s) \otimes \mathcal{I}) = 0$.

L'omomorfismo μ è iniettivo. Infatti se $\mu(s) = 0$ allora:

$$(k \otimes \mathcal{I}) \cdot \xi_2^{-1} \cdot h \cdot p^{-1}(s) = 0\,, \quad \xi_2^{-1} \cdot h \cdot p^{-1}(s) \subseteq \mathcal{I}m(h \otimes \mathcal{I})\,,$$
$$h \cdot p^{-1}(s) \subseteq \xi_2(\mathcal{I}m(h \otimes \mathcal{I}))$$

e pertanto se $u \in p^{-1}(s)$ segue, essendo v un opportuno elemento di $\alpha(\mathcal{A}^s) \otimes \mathcal{I}$:

$$h(u) = \xi_2 \cdot (h \otimes \mathcal{I})(v) = h \cdot \xi_1(v)\,, \quad h(u - \xi_1(v)) = 0\,, \quad u = \xi_1(v)\,,$$
$$s = p(u) = p \cdot \xi_1(v) = 0\,.$$

Ciò visto, per provare che $\mathcal{T} \neq 0$ è sufficiente verificare che $\mathcal{S} \neq 0$ ovvero che ξ_1 non è suriettivo e ciò segue immediatamente dal fatto che $\mathcal{I}m(\xi_1)_x = \mathcal{I}_x \alpha(\mathcal{A}^s)_x$, cioè $\mathcal{I}m(\xi_1)_x$ è il sotto-$\mathcal{A}_x$-modulo di $\alpha(\mathcal{A}^s)_x$ costituito con tutte le combinazioni lineari $\Sigma_i b_i u_i$ con $b_i \in \mathcal{I}_x$, $u_i \in \alpha(\mathcal{A}^s)_x$; se fosse $\mathcal{I}_x \alpha(\mathcal{A}^s)_x = \alpha(\mathcal{A}^s)_x$ ne seguirebbe (cfr. [5], p. 10) $\alpha(\mathcal{A}^s)_x = 0$ il che significherebbe che $\mathcal{F}_x$ è $\mathcal{A}_x$-modulo libero.

Osservazione 1.: Se $\mathcal{J}$ è il fascio d'ideali associato al punto (x), ($\mathcal{F}_x$ essendo $\mathcal{A}_x$-modulo non libero) si ha pure $t(\mathcal{J} \otimes \mathcal{F}) \neq 0$. Infatti poichè $\mathcal{J}_x \neq \mathcal{A}_x$ ed $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J} \mid U$, la dimostrazione della proposizione 2 si può fare egualmente considerando $\mathcal{J}$ al posto di $\mathcal{I}$.

Osservazione 2.: Il fascio di ideali $\mathcal{I}$ è sottofascio ammissibile di $\mathcal{A} \mid U$ giacchè si verifica che in ogni $y \in U$ ove la fibra $\mathcal{F}_y$ è $\mathcal{A}_y$-modulo libero, si ha $\mathcal{I}_y = \mathcal{A}_y$. (Un sottofascio $\mathcal{F}$ di un fascio $\mathcal{G}$ è stato definito sottofascio «ammissibile» di $\mathcal{G}$ se $Cd(Supp(\mathcal{G}/\mathcal{F})) > 1$).

n. 2.

Lemma: «*Se $\mathcal{T}$ è un fascio algebrico coerente su V avente supporto a codimensione > 1 allora $\mathcal{E}xt(\mathcal{T}, \mathcal{A}) = 0$ (cfr. anche* [1]); *se è data allora una sequenza esatta: $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow 0$ ne segue che $\mathcal{E}xt(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ è isomorfo ad un sottofascio di $\mathcal{E}xt(\mathcal{M}, \mathcal{A})$* »[1]).

---

[1]) Si ricordi che $\mathcal{E}xt(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ indica il fascio $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.

Dimostrazione.

Considerata una sequenza esatta $0 \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{A}^p \longrightarrow$ $\longrightarrow \mathscr{T} \longrightarrow 0$ e la sequenza indotta (dualizzando): $0 \longrightarrow \mathscr{T}^* \longrightarrow$ $\longrightarrow (\mathscr{A}^p)^* \xrightarrow{\psi} \mathscr{M}^* \longrightarrow \mathscr{E}xt(\mathscr{T}, \mathscr{A}) \longrightarrow 0$, tenuto conto che oltre che $\mathscr{E}xt(\mathscr{A}^p, \mathscr{A}) = 0$ è anche $\mathscr{T}^*=0$, si ha $\mathscr{E}xt(\mathscr{T}, \mathscr{A})=0$ giacchè essendo $\mathscr{M}^* \in P.E.$ l'omomorfismo ψ è anche suriettivo. Dalla sequenza esatta $0 \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{T} \longrightarrow 0$ si deduce la:

$$0 \longrightarrow \mathscr{T}^* \longrightarrow \mathscr{N}^* \longrightarrow \mathscr{M}^* \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathscr{E}xt(\mathscr{T}, \mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{E}xt(\mathscr{N}, \mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{E}xt(\mathscr{M}, \mathscr{A})$$

da cui segue, in base alla prima parte del lemma:

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}xt(\mathscr{N}, \mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{E}xt(\mathscr{M}, \mathscr{A}) .$$

PROPOSIZIONE 3.: «*Se $\mathscr{F}$ è fascio su V algebrico coerente liscio soddisfacente alla P.E. e si ha la sequenza esatta $0 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{L} \longrightarrow$ $\longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$ con $\mathscr{L}$ localmente libero, allora $\mathscr{E}xt(\mathscr{G}^*, \mathscr{A}) = 0$*».

Dimostrazione.

Dalla sequenza data si ottiene, dualizzando:

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}^* \longrightarrow \mathscr{L}^* \xrightarrow{\psi} \mathscr{G}^* \longrightarrow \mathscr{E}xt(\mathscr{F}, \mathscr{A}) \longrightarrow 0$$

e posto $\mathscr{I}m(\psi) = \mathscr{H}$ si ha:

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}^* \longrightarrow \mathscr{L}^* \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow 0$$

nonchè:

$$0 \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{G}^* \longrightarrow \mathscr{E}xt(\mathscr{F}, \mathscr{A}) \longrightarrow 0$$

e quindi (cfr. [3]) si ha localmente:

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}^{**} \longrightarrow \mathscr{E}xt(\mathscr{H}, \mathscr{A}) \longrightarrow 0 .$$

Si osservi ora che $\mathscr{E}xt(\mathscr{F}, \mathscr{A})$ ha supporto a codimensione >1 (poichè fuori da un chiuso di codimensione >1 il fascio $\mathscr{F}$ è localmente libero) e quindi per il lemma precedente, applicato alla sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{G}^* \longrightarrow \mathscr{E}xt(\mathscr{F}, \mathscr{A}) \longrightarrow 0$$

segue:

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}xt(\mathscr{G}^*, \mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{E}xt(\mathscr{H}, \mathscr{A});$$

pertanto se $\mathscr{F} \in P.E.$ allora $\mathscr{E}xt(\mathscr{H}, \mathscr{A}) = 0$ e perciò a maggior ragione $\mathscr{E}xt(\mathscr{G}^*, \mathscr{A}) = 0$.

PROPOSIZIONE 4.: « *Data su V la sequenza esatta di fasci algebrici coerenti e lisci*: $0 \longrightarrow \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{L}' \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow 0$, *con L, L', localmente liberi, allora se $\mathscr{E}xt(\mathscr{M}, \mathscr{A}) = 0$ $\mathscr{M}$ è localmente libero* ».

Dimostrazione.

Eseguiamo la verifica fibra per fibra. Dobbiamo provare allora che data la sequenza esatta $0 \longrightarrow A^p \xrightarrow{\varphi} A^q \longrightarrow M \longrightarrow 0$ (di A-moduli, con A anello locale), M è libero se $Ext(M, A) = 0$.

Sia dunque $Ext(M, A) = 0$; dalla sequenza esatta in questione si ottiene, dualizzando, la sequenza esatta $0 \longrightarrow M^* \longrightarrow$ $\longrightarrow A^q \longrightarrow A^p \longrightarrow 0$ dal che segue in particolare che $A^q \approx A^p \oplus M^*$ e quindi (cfr. [6], p. 239) che M^* è libero e così pure di conseguenza M^{**}.

D'altra parte la sequenza esatta $0 \longrightarrow M^* \longrightarrow A^q \xrightarrow{\overline{\varphi}}$ $\longrightarrow A^p \longrightarrow 0$ porge, dualizzando ancora, $0 \longrightarrow A^p \xrightarrow{\overline{\overline{\varphi}}} A^q \longrightarrow$ $\longrightarrow M^{**} \longrightarrow 0$ e poichè $(\overline{\varphi})$ è definito dalla matrice trasposta di quella che definisce (φ) segue che $(\varphi) = (\overline{\overline{\varphi}})$ e quindi $M \approx M^{**}$.

n. 3.

ESEMPI di applicazioni delle precedenti proposizioni.

Sullo spazio affine K^4 si considerino le due sequenze esatte:

$$0 \longrightarrow \mathscr{A} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{A}^3 \xrightarrow{\varphi} \mathscr{A}^3 \xrightarrow{\beta} \mathscr{A},$$

$$0 \longrightarrow \mathscr{A} \xrightarrow{\gamma} \mathscr{A}^4 \xrightarrow{\varepsilon} \mathscr{A}^6 \xrightarrow{\psi} \mathscr{A}^4 \xrightarrow{\delta} \mathscr{A}$$

definite con:

$$\alpha(1) = (X_1, X_2, X_3), \quad \gamma(1) = (X_1, X_2, X_3, X_4),$$

$$\delta(a_1, a_2, a_3, a_4) = {}_1^4\Sigma_i X_i a_i, \qquad \beta(a_1, a_2, a_3) = {}_1^3\Sigma_i X_i a_i,$$

$$\| b_{i,k} \| = \left\| \begin{matrix} 0 & -X_3 & X_2 \\ X_3 & 0 & -X_1 \\ -X_2 & X_1 & 0 \end{matrix} \right\| ,$$

$$\| c_{i,k} \| = \left\| \begin{matrix} X_2 & X_3 & X_4 & 0 & 0 & 0 \\ -X_1 & 0 & 0 & X_3 & -X_4 & 0 \\ 0 & -X_1 & 0 & -X_2 & 0 & X_4 \\ 0 & 0 & -X_1 & 0 & X_2 & -X_3 \end{matrix} \right\| ,$$

φ definito dalla matrice $\| b_{i,k} \|$, ψ dalla $\| c_{i,k} \|$ ed ε dalla $\| c_{6-k,i} \|$.

Si ponga $\mathscr{F} = \mathscr{N}c(\delta)$, $\mathscr{G} = \mathscr{C}nc(\gamma)$, $\mathscr{M} = \mathscr{N}c(\beta) = \mathscr{C}nc(\alpha)$, $\mathscr{I} = \mathscr{I}m(\delta)$, $\mathscr{J} = \mathscr{I}m(\beta)$.

Si osservi che i fasci (lisci) $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{M}$ soddisfano alla *P.E.*

ESEMPIO 1.: «*Il fascio $\mathscr{F} \otimes \mathscr{F}$ ha torsione*».

Infatti considerate le due sequenze esatte (che si ottengono immediatamente dalle due soprascritte) $0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{A}^4 \longrightarrow \longrightarrow \mathscr{I} \longrightarrow 0$, $0 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{A}^6 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$ si ha, (proposizione 1), $t(\mathscr{F} \otimes \mathscr{F}) \approx t(\mathscr{G} \otimes \mathscr{I})$ e, (proposizione 2), $t(\mathscr{G} \otimes \mathscr{I}) \neq 0$.

ESEMPIO 2.: «*I fasci $\mathscr{G} \otimes \mathscr{F}$, $\mathscr{G} \otimes \mathscr{G}$ non hanno torsione*».

Infatti applicando il corollario 1.1 alle due sequenze esatte:

$0 \longrightarrow \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}^4 \longrightarrow \mathscr{A}^6 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$, $0 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{A}^6 \longrightarrow \longrightarrow \mathscr{A}^4 \longrightarrow \mathscr{A}$, si ha $t(\mathscr{G} \otimes \mathscr{F}) = 0$ ed applicandolo alle sequenze esatte:

$$0 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{A}^6 \longrightarrow \mathscr{A}^4, \quad 0 \longrightarrow \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}^4 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow 0$$

si ha $t(\mathscr{G} \otimes \mathscr{G}) = 0$.

ESEMPIO 3.: «*I fasci $\mathscr{G}$, $\mathscr{G}^*$ non sono fra loro isomorfi*».

Ciò si può provare osservando che $t(\mathscr{G} \otimes \mathscr{G}) = 0$ mentre $t(\mathscr{F} \otimes \mathscr{F}) \neq 0$, (tenuto conto che $\mathscr{G}^* \approx \mathscr{F}$), oppure osservando che: $\mathscr{E}xt(\mathscr{G}, \mathscr{A}) \neq 0$ come risulta applicando la proposizione 4 alla sequenza esatta $0 \longrightarrow \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}^4 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow 0$ mentre $\mathscr{E}xt(\mathscr{G}^*, \mathscr{A}) \neq 0$ come risulta applicando la proposizione 3 alla sequenza esatta $0 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{A}^6 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$.

ESEMPIO 4.: « *Il fascio $\mathscr{M} \otimes \mathscr{M}$ non ha torsione e non soddisfa alla P.E.* ».

Infatti si applichi la proposizione 1 alle sequenze esatte:

$$0 \longrightarrow \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}^3 \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{A}^3 \longrightarrow \mathscr{J} \longrightarrow 0$$

osservando che $t(\mathscr{A} \otimes \mathscr{J}) = 0$; quindi si consideri la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow \mathscr{M} \otimes \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}^3 \longrightarrow \mathscr{J} \otimes \mathscr{M} \longrightarrow 0$$

ottenuta moltiplicando tensorialmente per $\mathscr{M}$ la seconda delle due sequenze precedenti (e tenendo conto che $t(\mathscr{M} \otimes \mathscr{M}) = 0$ e si osservi che $\mathscr{J} \otimes \mathscr{M}$ ha torsione e che

$$Cd(Supp((\mathscr{J} \otimes \mathscr{M})/t(\mathscr{J} \otimes M)) > 1 .$$

4. Un esempio di fasci algebrici coerenti lisci su K^r irriducibili per somma diretta, aventi rango r, (essendo r un intero positivo arbitrariamente assegnato).

LEMMA 1.: « *Data su V la sequenza esatta $0 \longrightarrow \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}^{r+l} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{A}^r$, ogni fibra $\mathscr{N}_x$ del fascio $\mathscr{N} = \mathscr{I}m(\varphi)$ puo avere al più un addendo diretto che non sia $\mathscr{A}_x$-modulo libero* ».

Dimostrazione [1]).

Dalla sequenza esatta $0 \longrightarrow \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}^{r+l} \longrightarrow \mathscr{N} \longrightarrow 0$ si ottiene, dualizzando, la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow \mathscr{N}^* \longrightarrow \mathscr{A}^{r+l} \longrightarrow \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{E}xt(\mathscr{N}, \mathscr{A}) \longrightarrow 0$$

[1]) Un'altra dimostrazione di questo lemma si ottiene con la prop. 5.3, p. 14, di [5].

da cui risulta che ogni fibra del fascio $\mathscr{E}xt(\mathscr{N}, \mathscr{A})$ è generabile con un elemento.

Sia $\mathscr{N}_x = \overset{n}{\underset{1}{\oplus}}\, {}_i\mathscr{N}_{ix}$, $(n \leqslant r)$. Proviamo che per ogni $x \in K^r$ al più uno degli $\mathscr{A}_x$-moduli $\mathscr{N}_{ix}$ ha fibra non libera.

Si ha: $\mathscr{E}xt(\mathscr{N}, \mathscr{A})_x \approx \overset{n}{\underset{1}{\oplus}}\, {}_i\mathscr{E}xt(\mathscr{N}_{ix}, \mathscr{A}_x)$ (cfr. [2]); esistono inoltre per ogni $i = 1, \ldots, n$ sequenze esatte del tipo:

$$0 \longrightarrow \mathscr{A}_x^{q_i} \longrightarrow \mathscr{A}_x^{p_i} \longrightarrow \mathscr{N}_{ix} \longrightarrow 0 \quad \text{(cfr. [6], § 13, lemmi 1,3).}$$

Se ad esempio $\mathscr{N}_{1x}$, $\mathscr{N}_{2x}$ non fossero liberi, in base alla proposizione 4 seguirebbe $\mathscr{E}xt(\mathscr{N}_{1x}, \mathscr{A}_x) \neq 0 \neq \mathscr{E}xt(\mathscr{N}_{2x}, \mathscr{A}_x)$ e quindi $\mathscr{E}xt(\mathscr{N}, \mathscr{A})_x$ sarebbe riducibile per somma diretta. Ciò invece non può accadere: verificheremo infatti che se un $\mathscr{A}_x$-modulo non nullo T è generato da due suoi sottomoduli non nulli T_1, T_2 e se T è generabile con un solo elemento allora la somma $T_1 + T_2$ non è diretta.

Si ha: se t_0 è un generatore di T e se $t_0 = t_1 + t_2$, con $t_1 \in T_1$ e $t_2 \in T_2$, e $t_1 = ft_0$, $t_2 = gt_0$, allora $t_0(f + g - 1) = 0$ e quindi $(f + g - 1) \in M_x$ ($=$ ideale massimale di $\mathscr{A}_x$) ed anche $(f + g) \notin M_x$ e perciò almeno uno dei due elementi f, g, ad esempio f, non appartiene ad $\mathscr{M}_x$ e quindi si ha $t_2 = (g/f)t_1$ il che ci assicura che la somma $T_1 + T_2$ non è diretta.

Osservazione: A proposito del carattere locale di quanto affermato nel precedente lemma si osservi che N può benissimo essere somma diretta di due fasci (irriducibili e) non localmente liberi: si considerino su K^2 i due sottofasci $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$ di $\mathscr{A}$ generati rispettivamente dalle sezioni globali X_1, X_2 e $(X_1 - 1)$, X_2. Il fascio somma diretta $\mathscr{N} = \mathscr{I} \oplus \mathscr{J}$ soddisfa allora alla sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}^3 \xrightarrow{\varphi} \mathscr{N} \longrightarrow 0$$

ove l'omomorfismo φ è definito (rappresentato $\mathscr{N}$ in modo naturale in $\mathscr{A}^2$) con:

$$\varphi(a_1, a_2, a_3) = (X_1 a_1 + (X_1^2 - X_1)a_2 + X_2 a_3\,,$$
$$(X_1 - 1)a_1 + (X_1^2 - X_1)a_2 + X_2 a_3)\,,$$

e ciò segue per il fatto che, indicato con $\mathscr{G}$ il sottofascio di $\mathscr{A}$ generato dalle due sezioni globali $(X_1^2 - X_1)$, (X_2), si ha $\mathscr{N} \approx \mathscr{A} \oplus \mathscr{G}$.

LEMMA 2.: « *Sia $(x) \in V$. Ogni endomorfismo dell'$\mathscr{A}_x$-modulo $\mathscr{A}_x^r$ induce un endomorfismo del suo sottomodulo M_x^r (essendo M_x l'ideale massimale di $\mathscr{A}_x$)* ».

Dimostrazione.

Sia un endomorfismo φ di $\mathscr{A}_x^r$ rappresentato dalla matrice $\| a_{ik} \|$.

Se $f = (f_1, \dots, f_r) \in M_x^r$ si ha $f' = \varphi(f) = (f_1', \dots, f_r')$ con $f_1' = {}_1^r\Sigma_j a_{ij} f_j$ dal che segue che se tutti gli elementi f_i $(i = 1, \dots, r)$ appartengono ad M_x lo stesso accade per tutti gli elementi f_1'.

PROPOSIZIONE 5.: « *Sia data su V la sequenza esatta $0 \longrightarrow \longrightarrow \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}^{r+1} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{A}^r$, $(r>1)$, tale che $\mathscr{N} = \mathscr{I}m(\varphi)$ sia sottofascio ammissibile di $\mathscr{A}^r$ (cioè tale che $Cd(Supp(\mathscr{A}^r/\mathscr{N}))>1$ ed in almeno un punto $(y) \in K^r$ si abbia $\mathscr{N}_y \subseteq M_y^r$, ($M_x$ = ideale massimale di $\mathscr{N}_x$).*

Con queste ipotesi il fascio $\mathscr{N}$ è irriducibile per somma diretta ».

Dimostrazione.

Proveremo che la fibra $\mathscr{N}_y$ è irriducibile per somma diretta.

In base al lemma 1, se $\mathscr{N}_y$ fosse riducibile per somma diretta, avrebbe certamente $\mathscr{A}_y$ come addendo diretto, si avrebbe cioè: $\mathscr{N}_y \approx \mathscr{A}_y \oplus F_y$.

Osserviamo ora che per l'$\mathscr{A}_y$-modulo $\mathscr{A}_y \oplus F_y$ esiste una iniezione $\alpha : \mathscr{A}_y \oplus F_y \longrightarrow \mathscr{A}_y^r$ tale che $\mathscr{I}m(\alpha) \nsubseteq \mathscr{M}_y^r \subset \mathscr{A}_y^r$; per l'$\mathscr{A}_y$-modulo $\mathscr{N}_y$ invece una siffatta iniezione non esiste. Infatti: poichè $\mathscr{N}$ è sottofascio ammissibile di $\mathscr{A}^r$ ogni iniezione $\beta : \mathscr{N}_y \longrightarrow \longrightarrow \mathscr{A}_y^r$ induce un endomorfismo $\bar{\beta}$ di $\mathscr{A}_y^r$ nel quale, (lemma 2), $\bar{\beta}(M_y^r) \subseteq M_y^r$ e dunque $\beta(\mathscr{N}_y) = \bar{\beta}(\mathscr{N}_y) \subseteq \bar{\beta}(M_y^r) \subseteq M_y^r$.

ESEMPIO: Su K^r il sottofascio di $\mathscr{A}^r$ generato dalle $r+1$ sezioni globali: $(X_1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, X_r), (X_2, X_3, \dots, X_r, X_1)$ è irriducibile per somma diretta.

BIBLIOGRAFIA

[1] BALDASSARRI M.: *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci.* Atti del convegno internazionale di geometria algebrica tenuto a Torino nel maggio 1961.

[2] CARTAN H., EILEMBERG S.: *Homological algebra.* Princeton University Press., 1956.

[3] JANS J. P.: *Duality in noetherian rings.* Proc. of the Amer. Math. Soc. Vol. 12, n. 5, X, 1961.

[4] MARGAGLIO C.: *Una dimostrazione elementare della proprietà di estensione per il fascio degli anelli locali di uno spazio affine ed alcune applicazioni di tale proprietà.* Rendiconti del Sem. mat. dell'Università di Padova. Vol. XXXIII.

[5] NAGATA M.: *Local rings.* Interscience Tracts in pure and applied mathematics, n. 13.

[6] SAMUEL P., ZARISKI O.: *Commutative algebra.* Vol. II, Van Nostrand 1960.

[7] SERRE J. P.: *Faisceaux algébriques cohérents.* Ann. of Math., 61, 1955.