Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

D. Mangeron
L. E. Krivošein

Sulla risoluzione di una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate parziali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 34 (1964), p. 344-368
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1964__34__344_0>

SULLA RISOLUZIONE DI UNA CLASSE DI PROBLEMI AL CONTORNO PER LE EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI A DERIVATE PARZIALI

Nota *) *di* D. MANGERON (*a Iasi*) e L. E. KRIVOŠEIN (*a Frunze*)

In una serie di lavori degli Autori, rielaborati e raccolti in una memoria concernente i problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali lineari a derivate parziali con derivata d'ordine superiore di Picone [1]-[10], sono stati esaminati, pervenendo a formule di integrazione approssimata, vari problemi di esistenza e di struttura [18].

In questo lavoro si espone la risoluzione del problema di Goursat per una classe di equazioni integro-differenziali *non lineari* con derivata d'ordine superiore di Picone. Si stabiliscono condizioni sufficienti di risolubilità, si esamina il problema di stabilità delle soluzioni rispetto alla perturbazione delle funzioni note, si indica, relativamente al problema da noi considerato, una variante del metodo della sincronizzazione degli argomenti e si costruiscono infine alcuni algoritmi di risoluzione approssimata.

1. Equazioni integro-differenziali polivibranti.

Si consideri l'equazione integro-differenziale polivibrante di ordine k

$$(1)\quad L^k[v(\xi,\eta)]=f_1(\xi,\eta)+\lambda\iint_{R_1}K_1(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)f_2[\xi_0,\eta_0,v(\xi_0,\eta_0)]d\xi_0 d\eta_0,$$

---

*) Pervenuto in Redazione il 18 gennaio 1964.

Indirizzo degli AA.: Seminario matematico del Politecnico di Iasi (Romania) e Facoltà di Scienze dell'Università di Frunze (Russia).

ove λ è un parametro,

$$L[\cdot] \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \; f_1(\xi, \eta), \; f_2[\xi_0, \eta_0, v(\xi_0, \eta_0)],$$

e $K_1(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$ sono funzioni note continue per tutti i loro argomenti nel dominio

$$(\xi, \eta), \; (\xi_0, \eta_0) \in R_1 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2], \; \alpha \leqslant v \leqslant \beta,$$

mentre f_2 è una funzione non lineare rispetto a v.

L'equazione (1) si trasforma, mediante il cambiamento di variabili $\xi = \frac{1}{2}(x + y)$, $\eta = \frac{1}{2}(x - y)$, nell'equazione integro-differenziale non lineare con derivata d'ordine superiore di M. Picone [15]

$$\frac{\partial^{2k} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^k} = F_1(x, y) + \lambda \iint_R K_2(x, y, t, \tau) f[t, \tau, u(t, \tau)] dt d\tau, \tag{2}$$

ove si è posto

$$u(x, y) \equiv v\left[\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2}(x-y)\right], \; F_1(x, y) \equiv f_1\left[\frac{1}{2}(x + y), \frac{1}{2}(x - y)\right];$$

$$K_2(x, y, t, \tau) \equiv \frac{1}{2} K_1\left[\frac{1}{2}(x + y), \frac{1}{2}(x - y), \frac{1}{2}(t + \tau), \frac{1}{2}(t - \tau)\right];$$

$$f[t, \tau, u(t, \tau)] \equiv f_2\left[\frac{1}{2}(t + \tau), \frac{1}{2}(t - \tau), v\left[\frac{1}{2}(t + \tau), \frac{1}{2}(t - \tau)\right]\right];$$

$$R = [a, b] \times [c, d].$$

2. Problema di Goursat per l'equazione (2).

Cercheremo di determinare soluzioni $u(x, y)$ dell'equazione integro-differenziale (2) continue insieme con le $\partial^{i+j} u(x, y) \mid \partial x^i \partial y^j$, per $i, j = 0, 1, \ldots, k$, e soddisfacenti alle condizioni al contorno di Goursat

$$D^i u(x, y)|_{x=a} = \varphi_i(y), \; D^i u(x, y)|_{y=c} = \psi_i(x) \quad (i = 0, 1, \ldots, k - 1), \tag{3}$$

ove $\varphi_i(y)$, $\psi_i(x)$; $a \leqslant x \leqslant y$, $c \leqslant y \leqslant d$ sono funzioni continue note, che verificano le così dette condizioni di raccordo $\varphi_i(c) = \psi_i(a)$

e $D^i u(x, y) \equiv \dfrac{\partial^{2i} u(x, y)}{\partial x^i \partial y^i}$ è la derivata totale d'ordine i di Picone [15].

Eseguendo sopra l'equazione (1) k quadrature rispetto alle variabili x e y, rispettivamente negli intervalli a, x e c, y e tenendo conto delle condizioni (3), si ottiene

$$u(x, y) = F(x, y) + \lambda \int_R K(x, y, t, \tau) f[t, \tau, u(t, \tau)] dt d\tau \,. \tag{4}$$

L'equazione (4) è analoga a due dimensioni della nota equazione del tipo di Hammerstein [14]. Dalla costruzione dell'equazione (4) risulta che le soluzioni di essa $2k$ volte continuamente derivabili [1]) sono simultaneamente soluzioni del problema (2), (3).

Nell'ipotesi che la funzione $f(t, \tau, u)$ soddisfi, nel dominio considerato (x, y), (t, τ), $u \in Q = [R, \alpha \leqslant u \leqslant \beta]$, la condizione di Lipschitz rispetto all'argomento u:

$$| f(t, \tau, u_2(t, \tau)] - f[t, \tau, u_1(t, \tau)] \, | \leqslant \gamma(t, \tau) \, | u_2(t, \tau) - u_1(t, \tau) |, \tag{5}$$

ove $\gamma(t, \tau) > 0$ è una funzione nota, limitata e continua per $(t, \tau) \in R$, ha luogo il seguente:

TEOREMA 1. *Se è soddisfatta la disugliaglianza* (5) *e se*

$$\sup_g \iint_R | \lambda K(x, y, t, \tau) \, | \gamma(t, \tau) dt d\tau < 1, g = \{ | \lambda | \leqslant \lambda_1, Q \} \,, \tag{6}$$

il problema (2), (3) *possiede una sola soluzione* $2k$ *volte continuamente derivabile, che può essere costruita tramite il metodo di approssimazioni successive,*

$$u_n(x, y) = F(x, y) + \lambda \iint_R K(x, y, t, \tau) f[t, \tau, u_{n-1}(t, \tau)] dt d\tau,$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

---

[1]) In ciò che segue s'intende che una funzione $u(x, y)$ è $2k$ volte continuamente derivabile se possiede, continue, le $\partial^{i+j} u(x, y) / \partial x^i \partial y^j$, $(i, j = 1, 2, \dots, k)$.

$$u_0(x, y) = F(x, y)\,, \tag{7}$$

riuscendo

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x, y) = u(x, y)\,.$$

3. Soluzioni singolari rispetto a λ.

Consideriamo alcuni dettagli concernenti il problema di determinazione delle soluzioni singolari rispetto a λ in corrispondenza al caso in cui la funzione $f(t, \tau, u)$ ha la forma

$$f[t, \tau, u(t, \tau)] \equiv A(t, \tau)u(t, \tau) + B(t, \tau)u^2(t, \tau)\,. \tag{8}$$

In questo caso si ha

$$u(x, y) = \tag{9}$$
$$= F(x, y) + \lambda \iint_R K(x, y, t, \tau)[A(t, \tau)u(t, \tau) + B(t, \tau)u^2(t, \tau)]dt d\tau\,.$$

Determineremo le condizioni in cui la soluzione dell'equazione (9) può essere messa sotto la forma

$$u(x, y) = \lambda_0 \sigma_{-1}(x, y) : \lambda + \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \sigma_i(x, y)\,, \tag{10}$$

ove le funzioni σ_{-1}, σ_0, σ_1, ... sono da determinarsi.

Soluzioni del tipo (10), sono stati studiate recentemente per alcuni tipi di equazioni integro-differenziali dal K. T. Ahmedov [16], [17] ed altri autori, in corrispondenza al caso in cui $\lambda \to 0$.

DEFINIZIONE. Una soluzione $u(x, y, \lambda)$ del problema (2), (3) si dice singolare rispetto a λ, se $u(x, y, \lambda) \to \infty$ per $\lambda \to 0$; $(x, y) \in R$.

In conformità con la definizione di cui sopra, se (10) è una soluzione dell'equazione integrale (9) e se $\sigma_{-1}, \sigma_0, \ldots, \sigma_n, \ldots$ sono funzioni limitate $2k$ volte continuamente derivabili, la (10) è una soluzione singolare rispetto a λ del problema (2), (3).

In seguito della sostituzione della (10) nell'equazione (9) si ottengono, per identificazione dei coefficienti delle medesime potenze di λ, le seguenti equazioni per la determinazione delle funzioni incognite σ_{-1}, σ_0, σ_1, ...:

$$
(11)\quad
\begin{aligned}
\sigma_{-1}(x, y) &= \lambda_0 \iint_R K(x, y, t, \tau)B(t, \tau)\sigma_{-1}^2(t, \tau)dtd\tau\,.\\
\sigma_0(x, y) &= F(x, y) + \lambda_0 \iint_R K(x, y, t, \tau)A(t, \tau)\sigma_{-1}(t, \tau)dtd\tau +\\
&\quad + 2\lambda_0 \iint_R K(x, y, t, \tau)B(t, \tau)\sigma_{-1}(t, \tau)\sigma_0(t, \tau)dtd\tau\,,\\
\sigma_1(x, y) &= \iint_R K(x, y, t, \tau)[A(t, \tau)\sigma_0(t, \tau) + B(t, \tau)\sigma_0^2(t, \tau)]dtd\tau +\\
&\quad + 2\lambda_0 \iint_R K(x, y, t, \tau)B(t, \tau)\sigma_{-1}(t, \tau)\sigma_1(t, \tau)dtd\tau\,,\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\sigma_{2n}(x, y) &= \iint_R K(x, y, t, \tau)[A(t, \tau)\sigma_{2n-1}(t, \tau) + 2B(t, \tau) \times\\
&\quad \times \{\sigma_0(t, \tau)\sigma_{2n-1}(t, \tau) + \ldots + \sigma_{n-1}(t, \tau)\sigma_n(t, \tau)\}]dtd\tau +\\
&\quad + 2\lambda_0 \iint_R K(x, y, t, \tau)B(t, \tau)\sigma_{-1}(t, \tau)\sigma_{2n}(t, \tau)dtd\tau\,.\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Il sistema (11) può essere trascritto brevemente così:

$$
(12)\quad \sigma_m(x, y) = f_m(x, y) + 2\lambda_0 \iint_R K(x, y, t, \tau)B(t, \tau)\sigma_{-1}(t, \tau)\sigma_m(t, \tau)dtd\tau,
$$

ove $f_m(x, y)$ è una funzione nota dipendente da σ_0, σ_1, ..., σ_{m-1}, A, B, K.

Supponiamo che: 1) la prima delle equazioni (11) possegga una soluzione non identicamente nulla (cioè che λ_0 sia un autovalore dell'equazione considerata); 2) λ_0 non sia un autovalore del nucleo

$$2K(x, y, t, \tau)B(t, \tau)\sigma_{-1}(t, \tau) \equiv G(x, y, t, \tau)\,.$$

Allora dalla (12) se ne deduce

$$\sigma_m(x, y) = f_m(x, y) + \lambda_0 \iint_R R(x, y, t, \tau, \lambda_0) f_m(t, \tau) dt d\tau \,, \tag{13}$$

ove $R(x, y, t, \tau, \lambda_0)$ è il nucleo risolvente del nucleo $G(x, y, t, \tau)$. Facendo uso delle formule (13) dimostriamo che, per λ sufficientemente piccolo, la serie $\sigma_0 + \lambda\sigma_1 + \lambda^2\sigma_2 + \ldots$ converge assolutamente ed uniformemente. Siano ν, r, ϱ numeri tali che nel dominio R abbiano luogo le disuguaglianze

$$\| F(x, y) \| \leqslant \varrho \,, \qquad \| \sigma_{-1}(x, y) \| \leqslant \nu \,,$$

$$\iint_R | R(x, y, t, \tau, \lambda_0) | \, dt d\tau \leqslant r \,, \qquad \iint_R | K(x, y, t, \tau) A(t, \tau) | \, dt d\tau > \varrho \,,$$

$$\iint_R | K(x, y, t, \tau) B(t, \tau) | \, dt d\tau \leqslant \varrho \,.$$

Se ne deduce per conseguenza

$$\| \sigma_0 \| \leqslant \varrho(1 + |\lambda_0| \nu)(1 + |\lambda_0| r) \,, \tag{14}$$

$$\| \sigma_1 \| \leqslant \varrho(1 + |\lambda_0| r) \| \sigma_0 \| (1 + \| \sigma_0 \|) \,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\| \sigma_{2n} \| \leqslant \varrho(1 + |\lambda_0| r)[\| \sigma_{2n-1} \| + 2(\| \sigma_0 \| \, \| \sigma_{2n-1} \| + \ldots + \\ + \| \sigma_{n-1} \| \, \sigma_n \|)] \,, \tag{15}$$

$$\| \sigma_{2n+1} \| \leqslant \varrho(1 + |\lambda_0| r)[\| \sigma_{2n} \| + 2(\| \sigma_0 \| \, \| \sigma_{2n} \| + \ldots + \\ + \| \sigma_{n-1} \| \, \| \sigma_{n+1} \| + \| \sigma_n \|^2)] \,, \tag{16}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Consideriamo l'equazione

$$\theta(\varphi, \lambda) \equiv \varphi - (1 + |\lambda_0| \nu) \times \\ \times \varrho(1 + |\lambda_0| r)\left[1 + \frac{\lambda}{1 + \nu |\lambda_0|} \varphi(1 + \varphi)\right] = 0 \,. \tag{17}$$

Poichè $\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}|_{\lambda=0} = 1$, l'equazione (17) possiede una soluzione non identicamente nulla in un intorno sufficientemente ristretto del punto $\lambda = 0$. Rappresentiamo questa soluzione sotto forma di una serie di potenze

$$\varphi = \alpha_0 + \lambda\alpha_1 + \lambda^2\alpha_2 + \dots + \lambda^n\alpha_n + \dots \tag{18}$$

Ne risulta:

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 = (1 + |\lambda_0|)\varrho(1 + |\lambda_0| r),\\
&\alpha_1 = \varrho(1 + |\lambda_0| r)\alpha_0(1 + \alpha_0),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\alpha_{2n} = \varrho(1 + |\lambda_0| r)(\alpha_{2n-1} + 2(\alpha_0\alpha_{2n-1} + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n)];\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{19}$$

e poichè $\| \sigma_n \| \leqslant \alpha_n$, si ha, per conseguenza, la convergenza della serie $\sigma_0 + \lambda\sigma_1 + \dots$ per $|\lambda| \ll 1$.

Si può quindi enunciare il seguente:

TEOREMA 2. *La soluzione 2k volte continuamente derivabile dell'equazione integrale* (9) *risulta pure soluzione del problema* (2), (3). *Soluzione singolare rispetto a* λ *del problema* (2), (3), *essa può essere messa sotto la forma* (10) *se*:

1) *la funzione* $f(t, \tau, u)$ *ha la forma* (8);

2) $\sigma_{-1}(x, y)$ *è una soluzione non identicamente nulla dell'equazione integrale* (11_1);

3) λ_0 *non è un autovalore del nucleo*

$$G(x, y, t, \tau) \equiv 2K(x, y, t, \tau)B(t, \tau)\sigma_{-1}(t, \tau).$$

OSSERVAZIONI: *a*) In maniera analoga si può discutere il caso in cui

$$f[t, \tau, u(t, \tau)] \equiv \sum_0^n A_n(t, \tau)u^i(t, \tau) \qquad (n \geqslant 3). \tag{20}$$

Basta costruire la soluzione singolare rispetto a λ sotto la forma

$$u(x, y) \equiv (\lambda_0 : \lambda^{\frac{1}{n-1}})\sigma_{-1}(x, y) + \sum_0^\infty \lambda^{\frac{i}{n-1}}\sigma_i(x, y) .$$

b) Se la funzione $f(t, \tau, u)$ non ha la forma (8), il problema (2), (3) non possiede soluzioni singolari del tipo

$$(21) \qquad (\lambda_0 : \lambda)\sigma_{-1}(x, y) + \sum_0^\infty \lambda^i \sigma_i(x, y) .$$

Se λ_0 è un autovalore di rango 1 del nucleo $G(x, y, t, \tau)$, per poter determinare le funzioni $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ basta che le funzioni $F(x, y)$, $\iint_R K(x, y, t, \tau)\mu(t, \tau)dtd\tau$, ove $\mu(x, y)$ è una funzione continua arbitraria nel dominio R, siano ortogonali rispetto all'autofunzione $\delta(x, y)$ del nucleo $G(t, \tau, x, y)$.

Nell'ipotesi che abbia luogo la suddetta ortogonalità, si ha

$$\sigma_0(x, y) = F_a(x, y) + \lambda_0 \iint_R R_1(x, y, t, \tau, \lambda_0) F_a(t, \tau)dtd\tau + c_1 p(x, y) \equiv$$
$$\equiv d_0(x, y) + c_1 p(x, y) ,$$

ove si è posto

$$(22) \quad F_a(x, y) \equiv F(x, y) + \lambda_0 \iint_R K(x, y, t, \tau, \lambda_0) A(t, \tau)\sigma_{-1}(t, \tau)dtd\tau ,$$

e dove $R_1(x, y, t, \tau, \lambda_0)$ è il nucleo generalizzato risolvente del nucleo $G(x, y, t, \tau)$; $p(x, y)$ è l'autofunzione corrisponden all'autovalore λ_0 di questo nucleo e c_1 è una costante arbitraria. In virtù delle ipotesi fatte, la funzione $\sigma_1(x, y)$ può essere determinata tramite la formula

$$(23) \quad \sigma_1(x, y) = \iint_R K(x, y, t, \tau)[A(t, \tau)\sigma_0(t, \tau) + B(t, \tau)\sigma_0^2(t, \tau)]dtd\tau +$$
$$+ \lambda_0 \iint_R R_1(x, y, \alpha, \beta, \lambda_0)d\alpha d\beta \iint_R K(\alpha, \beta, t, \tau)[A(t, \tau)\sigma_0(t, \tau) +$$
$$+ B(t, \tau)\sigma_0^2(t, \tau)]dtd\tau + c_1 p(x, y) \equiv \sum_0^1 c_1^i p_i(x, y) .$$

In modo analogo si determinano le funzioni $\sigma_2(x, y)$, $\sigma_3(x, y)$, ...

Fissiamo il numero c_1. Allora, se la serie

$$\sum_1^\infty \lambda^i \sigma_i(x, y) \tag{24}$$

è convergente, la (10) risulta essere soluzione singolare rispetto a λ del problema considerato (2), (3).

I risultati conseguiti permettono di enunciare il seguente:

TEOREMA 3. *Affinchè la funzione* (10) *sia una soluzione singolare rispetto a λ del problema* (2), (3), *è sufficiente che l'autofunzione $\delta(x, y)$ del nucleo $G(t, \tau, x, y)$ soddisfi le uguaglianze*

$$\iint_R \delta(x, y)dxdy \iint_R K(x, y, t, \tau)\mu(t, \tau)dtd\tau = 0\ , \tag{25}$$

$$\iint_R \delta(x, y)F(x, y)dxdy = 0\ .$$

che la serie (24) *sia convergente per λ sufficientemente piccolo, $(x, y) \in R$ ed inoltre che:* 1) *l'equazione* (11_1) *abbia una soluzione non identicamente nulla*; 2) λ_0 *sia un autovalore di rango* 1 *del nucleo $G(x, y, t, \tau)$*.

OSSERVAZIONI. *a*) In seguito delle ipotesi formulate, la soluzione singolare rispetto a λ del problema (2), (3) non è unica.

b) Dal teorema dimostrato non risulta necessariamente che una soluzione singolare rispetto a λ del problema (2), (3) possa essere rappresentata soltanto nella forma (10). Tali soluzioni possono essere messe anche sotto le altre forme.

4. Problemi di stabilità rispetto alle perturbazioni delle funzioni note.

DEFINIZIONE: Diciamo che una soluzione del problema (2), (3) è stabile rispetto a piccole perturbazioni delle funzioni $F(x, y)$, $K(x, y, t, \tau)$ se per ogni $\varepsilon > 0$ possono essere indicati numeri $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che dalle

$$|F_1(x, y) - F(x, y)| < \delta_1, \iint_R |K_1(x, y, t, \tau) - K(x, y, t, \tau)|\,dtd\tau < \delta_2$$

segua

$$| u_1(x, y) - u(x, y) | < \varepsilon , \quad (x, y) \in R ,$$

ove

$$(28) \qquad u_1(x, y) = F_1(x, y) + \lambda \iint_R K(x, y, t, \tau) f[t, \tau, u_1(t, \tau)] dt d\tau .$$

Ha luogo il seguente:

TEOREMA 4. *La soluzione del problema* (2), (3) *è stabile nel dominio considerato se*: 1) *le funzioni* $F(x, y)$, $F_1(x, y)$, $K(x, y, t, \tau)$, $K_1(x, y, t, \tau)$ *soddisfano rispettivamente le disuguaglianze*: $| F_1(x, y) - F(x, y) | < \delta_1$, $| K_1(x, y, t, \tau) - K(x, y, t, \tau) | < \delta_3$; 2) *la funzione* $f(t, \tau, u)$ *soddisfa rispetto all'argomento* u *nel dominio* Q *alla condizione di Lipschitz con coefficiente* $\gamma_1(t, \tau)$ *e* 3) *sono soddisfatte le successive disuguaglianze* (29) *e* (31).

Infatti, si ha

$$| u_1(x, y) - u(x, y) | \leqslant | F_1(x, y) - F(x, y) | +$$

$$+ | \lambda | \iint_R | K_1(x, y, t, \tau) f(t, \tau, u_1) - K(x, y, t, \tau) f(t, \tau, u) | dt d\tau \leqslant$$

$$\leqslant | F_1(x, y) - F(x, y) | + |\lambda| \iint_R | [K_1(x, y, t, \tau) - K(x, y, t, \tau)] f(t, \tau, u) +$$

$$+ K_1(x, y, t, \tau)[f(t, \tau, u_1) - f(t, \tau, u)] | dt d\tau \leqslant | F_1(x, y) - F(x, y) | +$$

$$+ | \lambda | \iint_R [| K_1(x, y, t, \tau) - K(x, y, t, \tau) | \, | f(t, \tau, u) | +$$

$$+ | K_1(x, y, t, \tau) | \gamma_1(t, \tau) | u_1 - u |] dt d\tau .$$

Sia

$$(29) \qquad l = 1 - \sup_{Q} \iint_R | \lambda K_1(x, y, t, \tau) | \gamma(t, \tau) dt d\tau > 0, \ \sup_{Q} | f(t, \tau, u) | \leqslant N.$$

Ne risulta

$$(30) \qquad \sup_R | u_1(x, y) - u(x, y) | \leqslant (\delta_1 + | \lambda | \delta_3 N) : l > \varepsilon ,$$

se, ad esempio, hanno luogo le

$$\delta_1 < \varepsilon l : 2 , \qquad \delta_3 < \varepsilon l : (2 \mid \lambda \mid N) . \tag{31}$$

Sia $u_2(x, y)$ una soluzione dell'equazione integrale

$$u_2(x, y) = F_0(x, y) + \lambda \iint_R K(x, y, t, \tau) f_0[t, \tau, u_2(t, \tau)] dt d\tau . \tag{32}$$

Allora

$$\begin{aligned} | u_2(x, y) - u(x, y) | &\leqslant | F_0(x, y) - F(x, y) | + \iint_R | \lambda K(x, y, t, \tau) \times \\ &\times [f_0(t, \tau, u_2) - f(t, \tau, u)] | dt d\tau \leqslant | F_0(x, y) - F(x, y) | + \\ &+ \iint_R | \lambda K(x, y, t, \tau) [f_0(t, \tau, u_2) - f(t, \tau, u_2)] dt d\tau + \\ &+ \iint_R | \lambda K(x, y, t, \tau) \gamma_1(t, \tau) | u_2(t, \tau) - u(t, \tau) | dt d\tau , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup_R | u_2(x, y) - u(x, y) | &\leqslant \sup_g [| F_0(x, y) - F(x, y) | + \\ &+ \iint_R | \lambda K(x, y, t, \tau) [f_0(t, \tau, u_2) - f(t, \tau, u_2)] | dt d\tau : l . \end{aligned} \tag{33}$$

Per conseguenza, se

$$\sup_R | F_0(x, y) - F(x, y) | < l\varepsilon : 2 . \tag{34}$$

$$\sup_R | f_0(t, \tau, u_2) - f(t, \tau, u_2) | < l\varepsilon : (2K_0) . \tag{35}$$

ove

$$K_0 = \sup_g \iint_R | \lambda K(x, y, t, \tau) | dt d\tau ; \tag{36}$$

$$l = 1 - \sup_g \iint_R | \lambda K(x, y, t, \tau) | \gamma_1(t, \tau) dt d\tau > 0 ,$$

si ha

$$| u_2(x, y) - u(x, y) | < \varepsilon , \quad (x, y) \in R . \tag{37}$$

Si conclude anche col:

TEOREMA 5. *Se* $u_2(x, y)$ *è una soluzione dell'equazione integrale perturbata* (32), *la soluzione del problema* (2), (3) *risulta stabile rispetto alle piccole perturbazioni delle funzioni* F *e* f *non appena siano soddisfatte le ineguaglianze* (34)-(36).

5. Alcune valutazioni concernenti le soluzioni $u(x, y)$.

Supponiamo che per il nucleo $K_2(x, y, t, \tau)$ sia

$$K_2(x, y, t, \tau) \equiv \begin{cases} 0\,, & a \leqslant x \leqslant t\,;\quad c \leqslant y \leqslant \tau\,, \\ K(x, y, t, \tau) \not\equiv 0\,, & a \leqslant t \leqslant x;\quad c \leqslant \tau \leqslant y\,. \end{cases} \tag{38}$$

Allora l'equazione integrale (4) prende la forma

$$u(x, y) = F(x, y) + \lambda \int\!\!\int_{ac}^{xy} K(x, y, t, \tau) f[t, \tau, u(t, \tau)]\,dt d\tau\,. \tag{39}$$

Stabiliremo in ciò che segue alcune valutazioni per la soluzione $u(x, y)$ dell'equazione (39) e del problema (2), (3).

Dalla (39) si ricava

$$|\,u(x, y)\,| \leqslant \Psi(x, y) + \int\!\!\int_{ac}^{xy} |\,\lambda\,|\,K_0(x, y, t, \tau)\,|\,f[t, \tau, u(t, \tau)]\,|\,dt d\tau\,, \tag{40}$$

ove

$$\Psi(x, y) \equiv |\,F(x, y)\,|\,,\quad K_0(x, y, t, \tau) \equiv$$
$$\equiv |\,K(x, y, t, \tau)\,|;\quad a \leqslant x \leqslant b\,,\quad c \leqslant y \leqslant d\,.$$

Integrando (40) rispetto a x si ottiene

$$\int_a^x |\,u(t, y)\,|\,dt \leqslant \int_a^x \Psi(t, y)\,dt +$$
$$+\,|\,\lambda\,| \int_a^x d\xi \int\!\!\int_{ac}^{\xi y} K_0(\xi, t, y, \tau)\,|\,f[t, \tau, u(t, \tau)]\,|\,dt d\tau \equiv$$
$$\equiv \pi(x, y) + |\,\lambda\,| \int\!\!\int_{ac}^{xy} M(x, y, t, \tau)\,|\,f[t, \tau, u(t, \tau)]\,dt d\tau\,.$$

Se nel dominio $g = \{\alpha \leqslant u \leqslant \beta,\ R(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ si ha: 1) tutte le funzioni note del problema (2), (3) sono ben determinate e continue; 2) hanno luogo le disuguaglianze

$$(41) \qquad | f[t, \tau, u(t, \tau)] | < c_0(t, \tau) \, | u(t, \tau) | ;$$

$$\{| M(x, y, t, \tau) |, K_0(x, y, t, \tau)\} \leqslant c_0(x, \tau);\ c_0(t, \tau) r_0(x, \tau) \leqslant d_0(x, \tau);$$

3) $\pi(x, y) \leqslant c_1(x) > 0$, ove $c_1(x)$, $0 \leqslant c_0(t, \tau)$, $0 \leqslant r_0(x, \tau)$ sono funzioni note continue, allora

$$(42) \qquad \int_a^x | u(t, y) | dt \leqslant c_1(x) + | \lambda | \iint_{ac}^{xy} d_0(x, \tau) \, | u(t, \tau) | \, dt d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c_1(x) \exp \Big[| \lambda | \int_c^y d_0(x, \tau) d\tau \Big] \equiv c_1(x) p(x, y, \lambda) ,$$

$$(43) \qquad | \lambda | \iint_{ac}^{xy} d_0(x, \tau) \, | u(t, \tau) | \, dt d\tau \leqslant c_1(x) [\varrho(x, y, \lambda) - 1] \equiv$$

$$\equiv \sigma(x, y, \lambda),\ (x, y),\ \lambda \in g .$$

Tenendo conto della (40), la (43) permette una valutazione di $| u(x, y) |$. Si può scrivere

$$(44_a) \qquad | u(x, y) | \leqslant \psi(x, y) + \sigma(x, y, \lambda) \equiv T(x, y, \lambda),\ (x, y),\ \lambda \in g .$$

Si ha inoltre

$$(44_b) \qquad \left| \frac{\partial^{i+j} u(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right| \leqslant \left| \frac{\partial^{i+j} F(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right| + | \lambda | \iint_{ac}^{xy} \left| \frac{\partial^{i+j} K(x, y, t, \tau)}{\partial x^i \partial y^j} \right| \cdot$$

$$\cdot\, c_0(t, \tau) T(t, \tau, \lambda) dt d\tau ,\quad (i, j = 0, 1, \ldots, k - 1);\ (x, y),\ \lambda \in g;$$

$$| D^k u(x, y) | \leqslant | F(x, y) | +$$

$$+ | \lambda | \iint_{ac}^{xy} | K_2(x, y, t, \tau) | \, c_0(t, \tau) T(t, \tau, \lambda) dt d\tau .$$

Per conseguenza, ha luogo il seguente:

TEOREMA 6. *Se* 1) *la funzione* $K_2(x, y, t, \tau)$ *è rappresentata tramite* (38); 2) *sono valide nel dominio* Q *le disuguaglianze* (41), *allora la soluzione del problema* (2), (3) *e le sue derivate possono essere valutate secondo le relazioni* (44_1) *e* (44_2).

Sia $u_0(x, y)$ una soluzione dell'equazione integrale

$$(45)\quad u_0(x, y) = F(x, y) + \lambda \int_a^x\!\!\int_c^y K(x, y, t, \tau) f_0[t, \tau, u_0(t, \tau)]\,dt\,d\tau$$

e supponiamo che nel dominio Q sia soddisfatta la disuguaglianza

$$(46)\quad |f[t, \tau, u_2(t, \tau)] - f[t, \tau, u_1(t, \tau)]| \leqslant r_1(t, \tau)\,|u_2(t, \tau) - u_1(t, \tau)|\,,$$

ove $r_1(t, \tau)$ è una funzione nota, non negativa per tutti $(t, \tau) \in R$.

Risulta allora

$$|u(x, y) - u_0(x, y)| \leqslant |\lambda| \int_a^x\!\!\int_c^y |K(x, y, t, \tau)[f[t, \tau, u(t, \tau)] -$$

$$- f[t, \tau, u_0(t, \tau)] + f[t, \tau, u_0(t, \tau)] - f_0[t, \tau, u_0(t, \tau)]]|\,dt\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda|\, S(x, y) + |\lambda| \int_a^x\!\!\int_c^y |K(x, y, t, \tau)[u(t, \tau) - u_0(t, \tau)]|\, r_1(t, \tau)\,dt\,d\tau\,,$$

ove si è posto

$$S(x, y) \equiv \int_a^x\!\!\int_c^y K(x, y, t, \tau)\{f[t, \tau, u_0(t, \tau)] - f_0[t, \tau, u_0(t, \tau)]\}\,dt\,d\tau\,.$$

Dalle (47) si ricava

$$\int_a^x |u(t, y) - u_0(t, y)|\,dt \leqslant |\lambda| \int_a^x S(t, y)\,dt +$$

$$+ |\lambda| \int_a^x d\xi \int_a^\xi\!\!\int_c^y |K(\xi, y, t, \tau)|\, u(t, \tau) - u_0(t, \tau)[r_1(t, \tau)\,dt\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| c_1(x) + |\lambda| \iint_{ac}^{xy} d_0(x, t) \,|\, u(t, \tau) - u_0(t, \tau) \,|\, dt d\tau \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| [c_1(x) + c_2(x) \iint_{ac}^{xy} |\, u(t, \tau) - u_0(t, \tau) \,|\, dt d\tau]\,; \; d_0(x, \tau) \leqslant c_2(x)\,,$$

ove $0 < c_2(x)$; $c_1(x)$ e $d_0(x, y)$ godono delle proprietà utilizzate nella dimostrazione del teorema precedente. Per conseguenza, si ha

$$\iint_{ac}^{xy} |\, u(t, \tau) - u_0(t, \tau) \,|\, dt d\tau \leqslant \{\exp[c_2(x) \,|\lambda|\, (y - c)] - 1\} : [|\lambda| c_2(x)]$$

e

$$|\, u(x, y) - u_0(x, y) \,| \leqslant |\lambda| \, S(x, y) +$$

$$+ |\lambda| \iint_{ac}^{xy} |\, K(x, y, t, \tau) \,|\, r_1(t, \tau) \,|\, u(t, \tau) - u_0(t, \tau) \,|\, dt d\tau \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \, S(x, y) + c(x, y)\{\exp[c_2(x) \,|\lambda|\, (y - c)] - 1\} : c_2(x)\,,$$

ove

$$c(x, y) \geqslant |\, K(x, y, t, \tau) \,|\, r_1(t, \tau)\,; \; (x, y), \; (t, \tau) \in R\,.$$

Si ha quindi il seguente:

Teorema 7. *Se* 1) $u_0(x, y)$ *è la soluzione dell'equazione integrale* (45); 2) *la funzione* f *soddisfa nel dominio* Q *alla disuguaglianza di Lipschitz* (46), *allora la deviazione tra le funzioni* $u_0(x, y)$ *e* $u(x, y)$ *soddisfa, per tutti gli* $(x, y) \in R = \{a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$, *alla disuguaglianza* (48).

Osservazione. Supponiamo, senza ledere la generalità, che per un dato λ nel dominio R sussista la disuguaglianza

$$l = 1 - \sup_R \iint_{ac}^{xy} |\, \lambda K(x, y, t, \tau) \,|\, r_1(t, \tau) dt d\tau > 0 \; ^{2)}\,.$$

[2]) Nel caso contrario, è necessario eseguire nella (47) n sostituzioni tali che sia

$$l_n = 1 - \sup_R \iint_{ac}^{xy} \lambda^n K_n(x, y, t, \tau) dt d\tau > 0\,,$$

ove $K_n(.)$ è il nucleo iterato d'ordine n rispetto al nucleo $K(x, y, t, \tau)$.

Si ottiene per conseguenza

$$| u(x, y) | - u_0(x, y) | \leqslant | \lambda | \sup_R S(x, y) : l , \quad (x, y) \in R .$$

Epperò, se per un $| \lambda | = 0$ dato sussiste la

$$S(x, y) < l\varepsilon : | \lambda | ,$$

risulta

$$| u(x, y) - u_0(x, y) | < \varepsilon , \quad (x, y) \in R .$$

6. Un metodo di approssimazioni successive.

Consideriamo il caso in cui

$$(49) \qquad | F(x, y) | \geqslant 0 , \ \lambda > 0 , \ K(x, y, t, \tau) \geqslant 0 , \ f(t, \tau, u) \geqslant 0 ,$$

per (x, y), (t, τ), $u \in Q$ e supponiamo che la funzione f possegga la derivata rispetto al terzo argomento, e che questa non sia negativa,

$$\frac{\partial f}{\partial u} \geqslant 0 , \quad (t, \tau) , \ u \in Q .$$

Supponiamo inoltre che $v_0(x, y)$ sia una funzione continua, tale che sussista la disuguaglianza

$$(50) \quad T[v_0] \equiv v_0(x, y) - F(x, y) - \lambda \int_a^x \!\! \int_c^y K(x, y, t, \tau) f[t, \tau, v_0(t, \tau)] \, dt d\tau \equiv$$

$$\equiv r_0(x, y, \lambda) \leqslant 0 , \quad (x, y) , \ \lambda \in g .$$

Allora, se è soddisfatta la condizione

$$(51) \qquad \mu_0 = 1 - \sup_g \lambda \int_a^x \!\! \int_c^y K(x, y, t, \tau) \frac{\partial f}{\partial u} \, dt d\tau > 0 ,$$

risulta

$$v_0(x, y) \leqslant u(x, y) , \quad (x, y) \in R .$$

Ponendo

$$(52)\quad v_i(x, y) = F(x, y) + \lambda \iint_{ac}^{xy} K(x, y, t, \tau) f[t, \tau, v_{i-1}(t, \tau)]\, dt d\tau ,$$

si trova

$$v_0(x, y) \leqslant v_1(x, y) \leqslant \dots \leqslant v_n(x, y) \leqslant \dots \leqslant u(x, y) ,$$

a causa del fatto che

$$v_1(x, y) - v_0(x, y) = - r_0(x, y, \lambda) \leqslant 0 , \dots, v_n(x, y) - v_{n-1}(x, y) =$$

$$= \lambda \iint_{ac}^{xy} K(x, y, t, \tau) \frac{\partial f}{\partial u} [u_{n-1}(t, \tau) - u_{n-2}(t, \tau)]\, dt d\tau \geqslant 0 ,$$

$$v_1(x, y) - u(x, y) = \lambda \iint_{ac}^{xy} K(x, y, t, \tau) \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} [v_0(t, \tau) - u(t, \tau)]\, dt d\tau \leqslant 0, \dots,$$

$$v_n(x, y) - u(x, y) = \lambda \iint_{ac}^{xy} K(x, y, t, \tau) \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}} [v_{n-1}(t, \tau) - u(t, \tau)]\, dt d\tau \leqslant 0, \dots$$

In modo analogo, se una funzione continua $w_0(x, y)$ soddisfa nel dominio R, alla disuguaglianza

$$(53)\quad w_0(x, y) - F(x, y) - \lambda \iint_{ac}^{xy} K(x, y, t, \tau) f[t, \tau, w_0(t, \tau)]\, dt d\tau \geqslant 0 ,$$

$$(x, y) ,\ \lambda \in Q ,$$

risulta per tutti gli $(x, y) \in R$, $w_0(x, y) \geqslant u(x, y)$ e, di conseguenza, per tutti gli $(x, y) \in R$ risulta [11]: $v_0(x, y) \leqslant u(x, y) \leqslant$ $\leqslant w_0(x, y)$.

Le funzioni $w_i(x, y)$, definite tramite le

$$(54)\quad w_i(x, y) = F(x ,y) + \lambda \iint_{ac}^{xy} K(x, y, t, \tau) f[t, \tau, w_i(t, \tau)]\, dt d\tau ,$$

soddisfanno alle

$$u(x, y) \leqslant \ldots \leqslant w_n(x, y) \leqslant \ldots \leqslant w_1(x, y) \leqslant w_0(x, y) .$$

Epperò hanno luogo le valutazioni

$$\left.\begin{array}{l} | \, v_n(x, y) - u(x, y) \, | \\ \\ | \, w_n(x, y) - u(x, y) \, | \end{array}\right\} \leqslant | \, v_n(x, y) - w_n(x, y) \, | \tag{55}$$

$$(n = 1, 2, \ldots) \quad (x, y) \in R ,$$

e in virtù della (51) risultano pure le uguaglianze al limite

$$\lim_{n \to \infty} v_n(x, y) = \lim_{n \to \infty} w_n(x, y) = u(x, y) . \tag{56}$$

Se $K(x, y, t, \tau) \leqslant 0$, (x, y), $(t, \tau) \in R$ e se sono soddisfatte tutte le altre condizioni imposte a λ, f, F, r_0, v_0, sussistono le disuguaglianze

$$v_{2i}(x, y) \leqslant u(x, y) \leqslant v_{2i+1}(x, y) .$$

Infatti,

$$v_1(x, y) - u(x, y) = \lambda \iint_{ac}^{xy} K(x, y, t, \tau) \frac{\partial f}{\partial u} [v_0(t, \tau) - u(t, \tau)] dt d\tau \geqslant 0 .$$

$$v_2(x, y) - u(x, y) = \lambda \iint_{ac}^{xy} K(x, y, t, \tau) \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} [v_1(t, \tau) - u(t, \tau)] dt d\tau \leqslant 0 ,$$

. . . .

$$v_{2i}(x, y) - u(x, y) = \lambda \iint_{ac}^{xy} K(x, y, t, \tau) \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}} [v_{2i-1}(t, \tau) - u(t, \tau)[dt d\tau \leqslant 0 ,$$

$$v_{2i+1}(x, y) - u(x, y) = \lambda \iint_{ac}^{xy} K(x, y, t, \tau) \frac{\partial f}{\partial \bar{\bar{u}}} [v_{2i}(t, \tau) - u(t, \tau)[dt d\tau \geqslant 0 ,$$

. . . .

epperò

$$\lim_{i \to \infty} v_{2i}(x, y) = \lim_{i \to \infty} v_{2i+1}(x, y) = u(x, y) ;$$

$$\left.\begin{array}{l}|u(x, y)-v_{2i}(x, y)| \\ |u(x, y)-v_{2i+1}(x, y)|\end{array}\right\} \leqslant |v_{2i}(x, y)-v_{2i+1}(x, y)|, \ (x, y) \in R . \tag{57}$$

Si può concludere per conseguenza col seguente:

TEOREMA 8. *Il processo di approssimazione successive, costruito tramite le formule* (52) *e* (54), *converge verso la soluzione del problema* (2), (3), *assolutamente ed uniformemente ed hanno luogo le valutazioni* (55) *non appena sono soddisfatte le disuguaglianze* (39) *e* (41) *e le funzioni note* $v_0(x, y)$, $w_0(x, y)$, *continue nel dominio* R, *soddisfano alle disuguaglianze*

$$(58) \qquad T[v_0] \leqslant 0, \quad (59) \quad T[w_0] \geqslant 0,(x, y), \ \lambda \in Q .$$

7. Il metodo delle equazioni integrali.

Supponiamo che il problema (2), (3) possegga una sola soluzione $2k$ volte continuamente derivabile. Utilizzeremo in ciò che segue un metodo di risoluzione approssimata del problema propostoci elaborato da uno degli autori [12] ed applicato alla risoluzione di vari problemi spettanti alla meccanica tecnica delle vibrazioni.

Nel caso del problema considerato, il metodo consiste nel tradurre il problema in un'equazione integrale equivalente e nel risolvere questa mediante qualche procedimento di approssimazione. Rappresentiamo all'uopo l'integrale che apparisce nella (4) tramite qualche formula di cubatura. Allora la funzione $v_{nm}(x, y)$ che soddisfa l'equazione

$$\begin{aligned} (60) \qquad & v(x, y) = F(x, y) + \\ & + \lambda \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} K(x, y, x_i, y_j) f[x_i, y_j, v(x_i, y_j)], \ (x_i. \ y_j) \in R . \end{aligned}$$

(esattamente oppure approssimativamente), ove c_{ij} sono i coefficienti della formula di cubatura scelta, si considera come la soluzione approssimata del problema (2), (3).

Sostituendo nella (60) $x = x_\alpha$, $y = y_\beta$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n$; $\beta = 1, 2, \dots, m$), $(x_\alpha, y_\beta) \in R$, si ottiene il seguente sistema di equazioni numeriche non lineari

$$(61)\qquad v(x_\alpha, y_\beta) = F(x_\alpha, y_\beta) + \\ + \lambda \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} K(x_\alpha, y_\beta, x_i, y_j) f[x_i, y_j, v(x_i, y_j)] \\ (\alpha = 1, 2, \ldots, n;\ \beta = 1, 2, \ldots, m)\,.$$

Sia $\varrho_{ij}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$, una soluzione (esatta oppure approssimata) del sistema (61). Allora

$$(62)\qquad v_{nm}(x, y) = F(x, y) + \lambda \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} K(x, y, x_i, y_j)\, f[x_i, y_j, \varrho_{ij}(\lambda)]$$

risulta, generalmente parlando, una soluzione approssimata del problema (2), (3).

8. Il metodo di sincronizzazione della variazione degli argomenti.

Talvolta si riesce a trovare una soluzione esatta oppure approssimata del problema (2), (3) utilizzando il seguente procedimento di sincronizzazione della variazione degli argomenti [3]). Dalla (4) si ottiene

$$(63)\qquad \iint_R [u(x, y) - \lambda f[x, y, u(x, y)] \iint_R K(t, \tau, x, y)\, dt d\tau - \\ - F(x, y)]\, dx dy = 0\,.$$

Alcune delle soluzioni dell'equazione (4) sono pure soluzioni dell'equazione funzionale

$$(64)\qquad v(x, y) - \lambda f[x, y, v(x, y)] \iint_R K(t, \tau, x, y)\, dt d\tau = F(x, y)\,.$$

[3]) Il metodo di sincronizzazione della variazione degli argomenti è stato indicato nel caso di una sola dimensione dal F. S. Hadzimullaev (vedasi, ad es., [13]). Giova notare esplicitamente che il metodo di costruzione della funzione $v(x, y)$ esposto nel testo può condurre ad una soluzione che presenti singolarità oppure che sia addirittura estranea al problema considerato. Soluzioni estranee vicine possono essere assunte come soluzioni iniziali approssimate.

Per conseguenza, l'equazione (64) può essere utilizzata per la scelta delle soluzioni del problema (2), (3). Supponiamo che si sia stabilito che una soluzione dell'equazione (64) è pure soluzione dell'equazione (4) e che nel dominio g è soddisfatta l'ineguaglianza

$$\sup_{g} |\, \lambda\Delta(x, y) f[x, y, v(x, y)] < 1 \,, \tag{65}$$

ove si è posto

$$\Delta(x, y) \equiv \iint_R K(t, \tau, x, y)\, dt d\tau \,.$$

Allora la soluzione del problema (2), (3) può essere costruita tramite iterazioni successive secondo le formule

$$v_n(x, y) = F(x, y) + \lambda\Delta(x, y) f[x, y, v'_{n-1}(x, y)] \,, \tag{66}$$

non appena $v_n(x, y)$ non presenta singolarità alcuna e soddisfa le condizioni al contorno (3). La soluzione mentovata si costruisce invece mediante le formule

$$u_n(x, y) = F(x, y) + \lambda \iint_R K(x, y, t, \tau) f[t, \tau, v_n(t, \tau)]\, dt d\tau \,, \tag{67}$$

quando $v_n(x, y)$ non soddisfa alle condizioni precedenti.

Osservazioni. *a*) Il problema (3) per la equazione integro-differenziale non lineare (2) può essere ricondotto tramite il metodo di sincronizzazione della variazione degli argomenti al medesimo problema al contorno (3) spettante all'equazione differenziale non lineare

$$D^k v(x, y) - \lambda f[x, y, v(x, y)] \iint_R K_k(t, \tau, x, y)\, dt d\tau = F(x, y) \,. \tag{68}$$

b) Alcune modificazioni dei ragionamenti di cui sopra conducono alla considerazione nell'ordine delle idee di questa nota del problema (3) relativo all'equazione integro-differenziale

$$D^k u(x, y) = F[x, y, u(x, y)] + \lambda \iint_R K(x, y, t, \tau) f[t, \tau, u(t, \tau)]\, dt d\tau. \tag{69}$$

c) In un'altra nota [28], contenente alcune estensioni ed altri nuovi problemi, si studiano le condizioni di esistenza e di unicità delle soluzioni $2k$ volte continuamente derivabili del problema di Dirichlet

$$u(A)\,\big|_{FrR} = 0\,, \quad D^i u(A)\,\big|_L = \varphi_i(A)\,, \qquad A \equiv (x, y),\ (i = 1, 2, \ldots, k-1)\,, \tag{70}$$

per l'equazione integro-differenziale non lineare alle derivate parziali

$$D^k u(A) - pD^\nu u(A) = f_0(A) + \lambda \int_{ab}^{xy}\!\!\int K(A, B) f(B, u(B)] dB\,, \tag{71}$$

ove $\varphi_i(A)$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$, $K(A, B)$, $f[B, u(B)]$, $f_0(A)$ sono funzioni note continue per tutti (x, y), $(t, \tau) \in R$; $u \in g_0$; $K(A, B) \equiv \equiv K(x, y; t, \tau)$; λ è un parametro, $f_0(A) \equiv f_0(x, y)$; $f[B, u(B)] \equiv \equiv f[t, \tau, u(t, \tau)]$, $p =$ const.,

$$dB \equiv dt d\tau\,; \quad L = \begin{cases} x = a, & b \leqslant y \leqslant d \\ y = b, & a \leqslant x \leqslant c\,; \end{cases}$$

$$D^i u(A) \equiv \frac{\partial^{2i} u(A)}{\partial x^i \partial y^i} \quad (i = 0, 1, \ldots, \nu, \ldots, k)\,;$$

FrR è la frontiera del dominio rettangolare $R = [a, c] \times [b, d]$ e $\nu < k$; ν, k certi numeri, mentre nella [19] si stabiliscono prendendo il punto di partenza dal vasto insieme di recentissimi risultati conseguiti nell'ambito del calcolo delle variazioni dell'Illustre accademico Linceo M. Picone [20], [21] e dal ben noto scienziato R. Bellman [22], [23] — nuove equazioni funzionali della programmazione dinamica spettanti alle funzioni di Green, $M(A, B)$, introdotti dagli autori di questo scritto [24], [25] e già utilizzati da parecchi altri scienziati nello studio di vari problemi al contorno non ellittici [26], [30] [4]).

[4]) Gli Autori alludono in particolar modo ai risultati estremamente interessanti conseguiti durante il recentissimo simposio sovietico-americano di Novosibirsk consacrato alle equazioni differenziali alle derivate parziali [31].

BIBLIOGRAFIA

[1] MANGERON D., KRIVOŠEIN L. E.: *Sopra una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone.* (*A Mauro Picone nel suo* 75° *compleanno*). Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat. (8), XXXI, 1-2, pp. 27-32, 1961.

[2] MANGERON D., KRIVOŠEIN L. E.: *Sur quelques problèmes d'approximation relatifs à une nouvelle classe d'équations intégro-différentielles.* Bull. Acad. Polonaise Sci., Série sci. math., astr. et phys., IX, 10, pp. 707-712, 1961.

[3] MANGERON D., KRIVOŠEIN L. E.: *Mnogoclennyi metod v resenii zadac po integro-differential'nym uravneniam. I. Primenenie polinomov S. N. Bernsteina.* (*Il metodo polinomiale nella risoluzione dei problemi relativi alle equazioni integro-differenziali. I. Applicazione dei polinomi di S. N. Bernstein*). Bul. Inst. politeth. Iasi, n.s., 7, (11), 3-4, pp. 27-42, 1961.

[4] MANGERON D., KRIVOŠEIN L. E.: *Problemi di Goursat e di Dirichlet per una classe di equazioni integro-differenziali a derivate totali.* Rend. Accad. Sci. Fis., Mat., Napoli, (4), XXVIII, pp. 213-224, 1961.

[5] MANGERON D., KRIVOŠEIN L. E.: *Ob odnom klasse integro-differential'nyh uravnenii v polnyh proizvodnyh.* (*Sopra una classe di equazioni integro-differenziali a derivate totali*). Bul. Inst. politehn. Iasi, n.s., 7 (11), 1-2, pp. 25-34, 1961.

[6] MANGERON D., KRIVOŠEIN L. E.: *Il metodo polinomiale nei problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone.* Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat. (8), XXXII, 3, pp. 306-312, 1962.

[7] MANGERON D., KRIVOŠEIN L. E.: *Sur l'évaluation des erreurs de détermination des solutions d'une classe d'équations intégro-différentielles aux dérivées totales.* C.r. Acad. Sci., Paris, 253, pp. 1190-1192, 1961. - *Approximation par les polynomes de Bernstein des solutions de certains problèmes à la frontière pour les équations intégro-différentielles d'ordre supérieur.* C. r. Acad. Sci., Paris, 254, pp. 3624-3626, 1962.

[8] MANGERON D., KRIVOŠEIN L. E.: *Risoluzione di una classe di problemi al contorno.* Revue de Math. pures et appl., Acad. Rép. Pop. Roumaine, VII, 4, pp. 603-615, 1962.

[9] MANGERON D., KRIVOŠEIN L. E.: *Valutazione degli errori commessi in alcuni metodi di calcolo numerico delle soluzioni di una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate*

totali d'ordine superiore. Rand. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat., (8), XXXIV, 2, pp. 123-129, 1963.

[10] MANGERON D., KRIVOŠEIN L. E.: *Sopra i problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali lineari a derivate parziali con derivata d'ordine superiore di Picone*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XXXIII, pp. 226-266, 1963.

[11] CAPLYGUINE S. A.: *Novyi metod priblizennogo integrirovania differential'nyh uravnenii*. (*Nuovo metodo d'integrazione con approssimazione delle equazioni differenziali*). Fizmatgiz, Moskva-Leningrad, 1-103, 1950.

[12] MANGERON D.: *The integral equations method in non linear mechanics*. Proc. Intern. Sympos. non linear oscillations, I, pp. 347-350, 1963. Kiev, Acad. Sci. Ukrainian. SSR.

[13] HADZIMULLAEV F. S.: *O metode sinhronizatii izmenenia argumentov* (*Sul metodo di sincronizzazione della variazione degli argomenti*). Doklady Akad. Nauk Uzb. SSR, 5, pp. 10-64, 1962.

[14] HAMMERSTEIN A.: *Zur einer Klasse der Integlragleichungen*. Acta Math., 54, 117-176, 1930.

[15] PICONE M.: *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica*. Ann. Sci. de l'Univ. de Jassy, I-e section (Math., Phys., Chimie), XXVI, 1, pp. 183-232, 1940.

[16] AHMEDOV K. T.: *Smesannaia zadaca dlia integro-differential'nyh uravnenii*. (*Il problema misto per le equazioni integro-differenziali*). Azerb. un-t. Ser. fis.-matem. i him. n., 4, 3-12, 1961.

[17] AHMEDOV K. T.: *Ob osobyh reseniah odnogo klassa integro-differential'nyh uravnenii*. (*Sopra le soluzioni singolari concernenti una classe di equazioni integro-differenziali*). Doklady AN SSSR, 128, 3, 443-446, 1959.

[18] MANGERON D., KRIVOŠEIN L. E.: *Alcuni problemi concernenti la risoluzione dei problemi al contorno spettanti ad una classe di equazioni non lineari integro-differenziali a derivate parziali. Problemi del tipo di Picone*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova (in stampa).

[19] MANGERON D., E COLL.: *Functional equations in the theory of dynamic programming. The variation of Green's functions for the polydimensional case*. J. Math. An. and. appl., (in stampa).

[20] PICONE M.: *Criteri di secondo grado sufficienti per il minimo assoluto di un integrale pluridimensionale del primo ordine nel vettore minimante*. Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat., 32, 1, 3-12, 1962.

[21] PICONE M.: *Criteri sufficienti per il minimo assoluto di un integrale pluridimensionale del primo ordine nel vettore minimante*. Atti Accad. Naz. dei Lincei, Mem. Cl. Sci. fis., mat. e nat., Sez. I, 6, 11, 281-337, 1962.

[22] BELLMAN R.: *On the Maximum Transform*. J. Math. An. and appl., 6, 1, 67-74, 1963.

[23] BELLMAN R., KALABA R.: *Dynamic programming applied to control processes governed by general functional equations*. Proc. Nat. Acad. Sci., 48, 10, 1735-1737, 1962.

[24] MANGERON D.: *Sur les problèmes à la frontière concernant une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*. C. r. Acad. Sci., Paris, 204, 94-96, 544-546, 1022-1024, 1937.

[25] MANGERON D.: *Sur une classe de problèmes à la frontière non ellitiques d'ordre supérieur*. C. r. Acad. Sci., Paris, 255, 2894-2896, 1962.

[26] BEREZANSKI IU. M.: *O kraevyh zadacah dlia obscih differential'nyh operatorov v castnyh proizvodnyh*. (*Sui problemi al contorno concernenti operatori differenziali generali a derivate parziali*). Doklady Akad. Nauk SSSR, 122, 6, 959-962, 1958.

[27] KARPILOVSKA E. B.: *O shodimosti metoda kollokatii*. (*Sulla convergenza del metodo di collocamento*). Doklady Akad. Nauk SSSR, 151, 4, 766-769, 1963.

[28] MANARESI F.: *Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di una equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XXIII, pp. 163-212, 1954.

[29] POLI L., DELERUE P.: *Le calcul symbolique à deux variables et ses applications*. Gauthier-Villars, Paris, 1954, pp. 49-50.

[30] DE GIORGI E.: *Un teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo ad equazioni differenziali a derivate parziali di tipo parabolico*. Scritti Matematici offerti a Mauro Picone. Bologna, Azzoguidi, pp. 781-787, 1955.

[31] OVSIANNIKOV L. V., ZELENIAK T. I.: *Sovetsko-amerikanskii simposium matematikov v Novosibirske*. (*Simposio sovieto-americano dei matematici a Novosibirsk*). Vestnik Akad. Nauk SSSR, 11, 93-96, 1963.