RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCO CHERSI

Ricerche per una teoria generale dell'interpolazione tra spazi lineari topologici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 34 (1964), p. 305-343

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1964__34__305_0>

RICERCHE PER UNA TEORIA GENERALE DELL' INTERPOLAZIONE TRA SPAZI LINEARI TOPOLOGICI

Memoria *) *di* FRANCO CHERSI (*a Pisa*) **)

Le teorie sull'interpolazione risalgono ad un classico teorema di M. Riesz (« Acta Math. », 49 (1926), p. 481, teor. VI). Negli anni recenti esse hanno assunto sviluppo sempre crescente, e molti procedimenti costruttivi, per ottenere spazi interpolatori tra spazi di Banach assegnati, sono stati introdotti da parecchi Autori, tra i quali Calderon, Gagliardo, Krein, Lions, Magenes, Peetre, Stein, Zygmund, Campanato, Stampacchia.

Per un'ampia informazione sull'argomento (con particolare riguardo ai procedimenti costruttivi) rimandiamo alla conferenza di E. Magenes al Congresso dell'U.M.I. (Genova, 1963).

I suddetti procedimenti hanno dato risultati utili a molti problemi dell'Analisi, ma hanno anche messo in luce la complicazione inerente a tali teorie: per esempio, è spesso difficile confrontare i risultati ottenuti con metodi diversi. Da ciò sorge

---

*) Pervenuto in Redazione il 15 gennaio 1964.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Pisa.

**) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 24 del Comitato per la Matematica del C.N.R., presso l'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste, nell'anno accademico 1962-63.

La materia dei paragrafi 1 e 2 era parzialmente contenuta nella tesi di laurea presentata dall'Autore nel novembre 1962 presso l'Università di Trieste. La presente pubblicazione riproduce, con modifiche solamente formali, un'edizione provvisoria presentata nell'ottobre 1963 in occasione del Congresso dell'U.M.I.

l'idea di cercare un'impostazione più generale del problema dell'interpolazione.

Una impostazione fra le più generali è stata data da E. Gagliardo in [3], dove viene fornito un procedimento che permette di costruire *tutti* gli spazi di interpolazione « quasi lineare » tra due spazi di Banach assegnati. Però non è detto che uno spazio d'interpolazione lineare sia anche d'interpolazione « quasi lineare », e quindi sia ottenibile col procedimento citato.

Nel presente lavoro la ricerca viene fondata sulla nozione di « terne fra loro coerenti ». Dato il tipo di impostazione, è riuscito spontaneo ambientare la trattazione dapprima nella categoria degli spazi lineari topologici e delle applicazioni lineari continue, per applicare poi i risultati così ottenuti allo studio del problema nella categoria degli spazi di Banach.

Nel n. 1 si danno alcune definizioni e si studiano proprietà generali delle terne d'interpolazione; nel n. 2 si dimostra che, data una terna d'interpolazione ed una coppia di spazi, esiste sempre almeno uno spazio, interpolatore tra questi, tale che la nuova terna sia « coerente » con quella data; nel n. 3 si dimostra la validità dello stesso enunciato per la categoria degli spazi di Banach, provando inoltre l'esistenza d'uno spazio « minimo » e di uno spazio « massimo » fra quelli che hanno la suddetta proprietà.

Al Congresso dell'U.M.I., nell'ottobre 1963, Gagliardo ha cortesemente informato l'Autore di avere ottenuto risultati che presentano analogie con quelli esposti nel n. 3 del presente lavoro. Tali risultati, non ancora pubblicati a quella data, erano stati annunciati nelle « Notices » della « Am. Math. Society », vol. 9, n. 4, Aug. 1962, sotto i nomi di N. Aronszajn ed E. Gagliardo.

1. Definizioni e proprietà generali.

Nel seguito avremo a che fare sempre con categorie insiemistiche, ossia categorie i cui oggetti siano insiemi (dotati di certe strutture), e le cui mappe siano applicazioni di questi.

Chiameremo « coppia » un diagramma del tipo seguente:

$$A \xrightarrow{\quad i \quad} B \quad \text{(diagramma 1)}$$

dove A, B sono oggetti, mentre i è una mappa iniettiva; ossia supporremo sempre che, riguardo alla struttura insiemistica, i sia un'inclusione.

Chiameremo « terna » un diagramma del tipo seguente:

$$A \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} B \tag{d. 2}$$

nel quale A, C, B sono oggetti, mentre i e j sono mappe iniettive, cioè inclusioni riguardo alla struttura insiemistica.

Per comodità indicheremo una coppia anche col simbolo (A, B), ed una terna col simbolo (A, C, B).

Siano (A, B), (A_1, B_1) due coppie nella stessa categoria, con le iniezioni i di A in B ed i_1 di A_1 in B_1.

Assegnata una mappa u di B in B_1, se esiste una mappa u^* di A in A_1 che renda commutativo il diagramma seguente

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "u^*"] & B \arrow[d, "u"] \\ A \arrow[r, "i_1"] & B_1 \end{tikzcd} \tag{d. 3}$$

allora u^* è unica, e come applicazione essa è la restrizione di u ad A (questo deriva facilmente dal fatto che i ed i_1, come applicazioni, sono inclusioni).

In tal caso diremo che la mappa u subordina la mappa u^*.

* * *

Siano (A, C, B) ed (A', C', B') due terne nella stessa categoria.

Definizione (1.1).

Diremo che le terne (A, C, B) ed (A', C', B') sono fra loro coerenti se accade quanto segue:

I. - Ogni mappa f di B in B', la quale subordini una mappa f^* di A in A', subordina anche una mappa f di C in C', che quindi

rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f^*"] & C \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\tilde{f}"] & B \arrow[d, "f"] \\ A' \arrow[r, "i'"] & C' \arrow[r, "j'"] & B' \end{tikzcd} \qquad \text{(d. 4)}$$

II. - ed ogni mappa φ di B' in B, la quale subordini una mappa φ^* di A' in A, subordina anche una mappa $\tilde{\varphi}$ di C' in C, che quindi rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] & C \arrow[r, "j"] & B \\ A' \arrow[r, "i'"] \arrow[u, "\varphi^*"] & C' \arrow[r, "j'"] \arrow[u, "\tilde{\varphi}"] & B' \arrow[u, "\varphi"] \end{tikzcd} \qquad \text{(d. 5)}$$

Definizione (1.2).

Chiameremo « *terna d'interpolazione* » *ogni terna* (A, C, B) *che sia coerente con sè stessa.*

In tal caso l'oggetto C, che per noi sarà sempre un insieme ed uno spazio, si chiama « spazio interpolatore » o « spazio d'interpolazione » tra A e B, secondo la terminologia già introdotta da vari Autori (p. es. E. Gagliardo, J. L. Lions).

In altre parole, (A, C, B) è una terna d'interpolazione se ogni mappa g di B in sè la quale subordini una mappa g^* di A in sè, subordina anche una mappa $\tilde{g}$ di C in sè.

ESEMPI.

Nella categoria degli insiemi e delle applicazioni, una terna (A, C, B) non può essere coerente con sè stessa, se entrambe le inclusioni di A in C e di C in B sono proprie: infatti in tal caso possiamo definire una applicazione g di B in B che porti A in A, ma porti un punto di C fuori di C.

Esempi di terne d'interpolazione (e, più in generale, di terne coerenti) si trovano nei lavori degli Autori citati nella prefazione. Riportiamo qui solo un esempio, relativo alla categoria degli spazi di Banach e delle applicazioni lineari limitate: fissati gli spazi di Banach $L^p(\Omega)$, $L^q(\Omega)$ dove Ω ha misura finita ed è $p > q > 1$, per ogni numero reale r tale che sia $p > r > q$ la terna $(L^p(\Omega), L^r(\Omega), L^q(\Omega))$ è una terna d'interpolazione (questo esempio deriva dal citato teorema di M. Riesz; si veda la formulazione che ne dà Gagliardo in [2], al n. 6, ed ivi si ponga $p_1 = p$, $q_1 = q$, $r_1 = r$, $\Omega_1 = \Omega$).

Numerosi esempi di terne (A, C, B) che non sono d'interpolazione si trovano in questioni di Analisi. Qui converrà esporre un esempio particolarmente semplice.

Sia h^1 lo spazio lineare delle successioni reali $\alpha = \{\alpha_k\}$ tali che converga la serie $\sum_1^\infty{}_k k^2\alpha_k^2$: con il prodotto scalare $(\alpha, \beta)_1 = \sum_1^\infty{}_k k^2\alpha_k\beta_k$ esso è uno spazio di Hilbert; sia h^0 lo spazio lineare delle successioni reali $\{\alpha_k\}$ tali che converga la serie $\sum_1^\infty{}_k\alpha_k$: è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare $(\alpha, \beta)_0 = \sum_1^\infty{}_k\alpha_k\beta_k$; sia C lo spazio lineare delle successioni reali $\{\alpha_k\}$ tali che convenga la serie

$$\sum_1^\infty{}_k S_k\alpha_k \quad \text{dove} \quad S_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ k^2 & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$$

è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$(\alpha, \beta)_- = \sum_1^\infty{}_k S_k\alpha_k\beta_k\,.$$

Muniti questi spazi delle norme relative, h^1 è contenuto in C, C in h^0 e le iniezioni sono continue. La terna (h^1, C, h^0) non è coerente con sè stessa.

Consideriamo infatti l'applicazione g di h^0 in h^0 definita nel modo seguente:

se $\qquad \alpha \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n} \ldots\}$

sia $\qquad g(\alpha) \equiv \{\alpha_2, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_3 \ldots \alpha_{2n}, \alpha_{2n-1} \ldots\}$;

g è lineare ed è limitata:

$$\| g(\alpha) \|_{h^0} = \| \alpha \|_{h^0} .$$

Inoltre essa subordina una applicazione lineare limitata di h^1 in h^1, poichè risulta

$$\| g(\alpha) \|_{h^1} \leqslant 2 \| \alpha \|_{h^1} ;$$

tuttavia si riconosce senza difficoltà che essa non muta C in sè.

* * *

D'ora in poi ambienteremo la trattazione nella categoria i cui oggetti sono gli spazi lineari topologici, sullo stesso corpo reale o complesso, e le cui mappe sono le applicazioni lineari continue; oppure in qualche sottocategoria di essa.

In particolare, per ogni coppia o terna le iniezioni saranno lineari e continue.

Indichiamo alcune proprietà generali delle terne di interpolazione nella predetta categoria.

Proposizione (1.3).

Data una coppia (A, B) di spazi lineari topologici, sia $\{C_k\}_{k\in K}$ una famiglia di spazi lineari topologici, ciascuno dei quali sia interpolare tra A e B: allora anche lo spazio $C = \bigcap_{k\in K} C_k$, dotato della topologia meno fine che renda continua l'iniezione canonica di C in C_k per ogni $k \in K$, è interpolatore tra A e B.

Dimostrazione.

Anzitutto C non è vuoto, perchè si ha $A \subset C_k, \forall k \in K$, ed è uno spazio lineare; la topologia τ meno fine su C che renda continua l'iniezione canonica di C in C_k per ogni $k \in K$ (topologia « riunione » di quelle subordinate dai C_k su C) è compatibile con la struttura lineare di C (vedi p. es. [1], cap. I, § 1, n. 9) (inoltre, se per ogni $k \in K$ C_k è localmente convesso anche C con la topologia τ è localmente convesso).

Un sistema fondamentale d'intorni di O per τ è formato dalle intersezioni finite degli insiemi del tipo $V_k \cap C$, dove $k \in K$ e V_k è un intorno d'un sistema fondamentale in C_k.

Ovviamente risulta $A \subset C \subset B$, e si vede facilmente che le iniezioni canoniche sono continue; quindi (A, C, B) è una terna.

Proviamo ora che tale terna è coerente con sè stessa. Sia $\mathcal{G}$ l'insieme delle mappe g di B in B tali che ciascuna subordini una mappa g^* di A in A.

Per ogni $g \in \mathcal{G}$, è $g(C) \subset C$: infatti, sia $x \in C$; per definizione, $\forall\, k \in K$, $x \in C_k$ e quindi $g(x) \in C_k$ per ipotesi, da cui $g(x) \in \bigcap_{k \in K} C_k$.

Posto $\tilde{g} = g|_C$, $\tilde{g}$ è ovviamente lineare ed è l'applicazione di C in sè subordinata da g; resta da provare che $\tilde{g}$ è continua. Prendiamo un intorno di O in C: $V = \bigcap_1^n {}_i V_{k_i} \cap C$, dove V_{k_i} è un intorno in C_{k_i}; per ipotesi per ogni i esiste un intorno T_{k_i} in C_{k_i} tale che sia $g(T_{k_i}) \subset V_{k_i}$: allora $T = \bigcap_1^n {}_i T_{k_i} \cap C$ è un intorno in C ed è

$$g(T) = g\Big(\bigcap_1^n {}_i T_{k_i} \cap C\Big) \subset \bigcap_1^n {}_i g(T_{k_i}) \cap C \subset \bigcap_1^n {}_i V_{k_i} \cap C = V\,.$$

* * *

(1.4). Come in (1.3), sia $\{C_k\}_{k \in K}$ una famiglia di spazi lineari topologici, ciascuno dei quali sia interpolatore tra A e B; in più supponiamo che B sia localmente convesso. Sia ora D lo spazio lineare generato dalla riunione dei C_k: esso è un sottospazio lineare di B; sia i_k la inieizione canonica di C_k in D, τ_k la topologia di C_k. Su D esiste una topologia τ di spazio localmente convesso che è la più fine topologia localmente convessa che renda continue tutte le iniezioni i_k: un sistema fondamentale d'intorni di O per τ è costituito dagli insiemi V convessi, simmetrici e assorbenti tali che, per ogni k, $V \cap C_k$ sia un intorno per τ_k (v. [1], cap. II, § 2, n. 4; e cap. II, § 6, n. 2).

Per ipotesi, per ogni k è continua la iniezione di A in C_k, allora anche l'iniezione di A in D è continua; inoltre per ipotesi sono continue le iniezioni di C_k in B, per ogni k: allora la topologia localmente convessa che B subordina su D rende continue le iniezioni di C_k in D, per ogni k, e quindi è meno fine di τ: dunque l'iniezione di D, con la topologia τ, in B è continua, e quindi (A, D, B) è una terna.

Proposizione (1.4).

La terna (A, D, B) è coerente con sè stessa.

Dimostrazione.

Per ogni $g \in \mathcal{G}$, si ha $g(D) \subset D$; infatti, sia $x \in D$: $x = \sum_1^n {}_\alpha x_\alpha$ con $x_\alpha \in C_{k_\alpha}$, e $k_\alpha \in K$; $g(x) = \sum_1^n {}_\alpha g(x_\alpha)$, ma $g(x_\alpha) \in C_{k_\alpha}$ per ogni α, quindi $g(x) \in D$. Posto $\tilde{g} = g|_D$, proviamo che $\tilde{g}$ è continua. Sia V un intorno di O per τ in D: possiamo supporre che V appartenga al sistema fondamentale prima descritto; allora $g^{-1}(V)$ è convesso, simmetrico e assorbente (perchè g è lineare); oltre, per ogni k, $g^{-1}(V) \cap C_k = g^{-1}(V \cap C_k) \cap C_k$: ma per ipotesi $V \cap C_k$ è un intorno per τ_k, ed essendo C_k interpolatore anche $g^{-1}(V \cap C_k) \cap C_k$ è un intorno per τ_k. Dunque $g^{-1}(V)$ è un intorno per τ in D: $\tilde{g}$ è continua.

Proposizione (1.5).

Se C e D sono ambedue interpolatori tra A e B, ogni eventuale spazio E che sia interpolatore tra C e D è interpolatore anche tra A e B; in particolare questo è vero se $C = A$ o $D = B$.

* * *

(1.6) Siano (A, C, B), (A', C', B') due terne coerenti fra loro, e supponiamo che gli spazi B e B' siano completi.

Sia $\widehat{C}$ il completato di C, $\widehat{C'}$ il completato di C'; nelle ipotesi fatte, $\widehat{C}$ è contenuto in B, e $\widehat{C'}$ è contenuto in B'.

Proposizione (1.6).

Le terne $(A, \widehat{C}, B)$, $(A', \widehat{C'}, B')$ sono fra loro coerenti.

Dimostrazione.

Sia f una mappa di B in B' che subordini una mappa f^* di A in A'; per ipotesi esiste una $\tilde{f}$ di C in C' subordinata da f. La composizione di $\tilde{f}$ con l'immersione di C' in $\widehat{C'}$ fornisce una mappa l di C in $\widehat{C'}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "l"] & \widehat{C} \arrow[r] & B \arrow[d, "f"] \\ A' \arrow[r] & C' \arrow[r] & \widehat{C'} \arrow[r] & B' \end{tikzcd} \tag{d. 6}$$

ma l'immersione di C in $\widehat{C}$ è densa, e $\widehat{C'}$ è completo: quindi l si prolunga, in modo unico, a tutto $\widehat{C}$, ottenendo una mappa $\widehat{f}$ di $\widehat{C}$ in $\widehat{C'}$.

Bisogna ora dimostrare che è commutativo il diagramma seguente

$$\begin{tikzcd} \widehat{C} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\widehat{f}"] & B \arrow[d, "f"] \\ \widehat{C'} \arrow[r, "j'"] & B' \end{tikzcd} \tag{d. 7}$$

(j, j' sono iniezioni continue).

A tale scopo consideriamo quest'altro:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "l"] & \widehat{C} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\widehat{f}"] & B \arrow[d, "f"] \\ C' \arrow[r, "i'"] & \widehat{C'} \arrow[r, "j'"] & B' \end{tikzcd} \tag{d. 8}$$

(i, i' sono immersioni dense); tesi: $j'\,\widehat{f} = fj$.

Dimostrazione:

$$\widehat{f}i = l = i'\tilde{f}$$

per costruzione; ma anche

$$j'i'\tilde{f} = fji$$

per ipotesi; ne segue:

$$j'\widehat{f}i = fji$$

ed essendo i un'immersione densa, si deduce

$$j'\widehat{f} = fj\,.$$

Ciò prova che il diagramma 7 è commutativo; quindi f subordina la mappa $\widehat{f}$ di $\widehat{C}$ in $\widehat{C}'$.

Analogamente si dimostra che ogni mappa φ di B' in B, la quale subordini una mappa φ^* di A' in A, subordina anche una mappa $\widehat{\varphi}$ di $\widehat{C}'$ in $\widehat{C}$.

* * *

In particolare, se (A, C, B) è una terna d'interpolazione e lo spazio B è completo, anche $(A, \widehat{C}, B)$ è una terna d'interpolazione.

Da ciò segue un semplice esempio di terna d'interpolazione:

$$(A, \widehat{A}, B)$$

dove $\widehat{A}$ è il completato di A, e B è uno spazio completo: basta pensare che la terna (A, A, B) è banalmente coerente con sè stessa.

* * *

Ci si può chiedere se, per qualche sottocategoria, il fatto che gli spazi A e B appartengono ad essa implichi che ogni spazio interpolatore tra A e B debba appartenere ad essa. Questo non è vero per la sottocategoria degli spazi di Banach, come risulta dal seguente esempio, suggerito dal prof. J. L. Lions.

Sia $A = L^{p_1}(\Omega)$, $B = L^{p_0}(\Omega)$, dove Ω ha misura finita ed è $p_1 > p_0 > 1$; per ogni numero reale q tale che sia $p_1 \geqslant q \geqslant p_0$, la terna (L^{p_1}, L^q, L^{p_0}) è d'interpolazione.

Sia $q_n = p_1 - \frac{p_1 - p_0}{n}$ $(n \geqslant 1)$: $q_1 = p_0$, e per ogni n si ha $p_1 > q_{n+1} > q_n \geqslant p_0$.

Indichiamo con $\| \ \|_n$ la norma corrispondente allo esponente q_n, e con $\sum_n$ la sfera unitaria di L^{q_n} (la sfera «piena»).

Per ogni n, la terna $(L^{p_1}, L^{q_n}, L^{p_0})$ è d'interpolazione.

Sia $E = \bigcap\limits_{n \geqslant 1} L^{q_n}$, con la topologia «riunione» di quelle subordinate; per la (1.3) anche (L^{p_1}, E, L^{p_0}) è una terna d'interpolazione.

La topologia di E è definita dalla famiglia numerabile di norme:

$$\| x \|_n = \| x \|_{L^{q_n}} \qquad (n \geqslant 1)$$

Dimostriamo che tale topologia non può essere definita da una sola norma, e quindi che lo spazio E, pur essendo interpolatore tra due spazi di Banach, non è uno spazio di Banach. A tale scopo basta dimostrare che nessun insieme limitato in E può essere un intorno della origine.

Sia K un insieme limitato in E: $\forall n \geqslant 1$, $\exists \lambda_n > 0$ tale che

$$K \subset \lambda_n \Sigma_n .$$

Supponiamo per assurdo che K contenga un intorno

$$\delta \textstyle\sum_s \cap E \quad (\delta > 0 , \quad s \text{ intero} > 0) ;$$

allora $\forall n \geqslant 1$ $\exists \lambda_n > 0$ tale che $\delta \sum_s \cap E \subset \lambda_n \sum_n$: ciò implica la validità, per ogni $x \in E$, della diseguaglianza

$$\| x \|_n \leqslant \frac{\lambda_n}{\delta} \| x \|_s .$$

Ma questa è assurda quando si prende $n > s$ e quindi $q_n > q_s$: essendo E denso in L^{q_s}, essa infatti implicherebbe $L^{q_s} \subset L^{q_n}$ (mentre è L^{q_n} contenuto in L^{q_s}, ed i due spazi non sono isomorfi).

* * *

Per spazi lineari topologici di tipo particolare diamo ora due teoremi, che saranno utili nel seguito.

(1.7). Siano (A, B) ed (A_1, B_1) coppie di spazi di Fréchet (o, più in generale, di spazi metrizzabili completi), sullo stesso corpo, reale o complesso. Sia u una applicazione lineare di B in B_1, tale che $u(A) \subset A_1$; con ciò, posto $u^* = u|_A$, è commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "u^*"] & B \arrow[d, "u"] \\ A_1 \arrow[r, "i_1"] & B_1 \end{tikzcd} \qquad \text{(d. 9)}$$

(i, i_1 sono iniezioni continue).

TEOREMA (1.7).

Nelle ipotesi precedenti, se u è continua anche u^* è continua.

Dimostrazione.

Basta provare che le condizioni seguenti

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ in } A$$
$$\lim_{n\to\infty} u^*(x_n) = y \text{ in } A_1$$

implicano $y = 0$: allora u^* è continua, per il teorema del grafico chiuso (v. p. es. [1], cap. I).

Essendo i, i_1, u lineari e continue per ipotesi, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} i(x_n) = 0 \quad \text{in} \quad B,$$

e

$$\lim_{n\to\infty} u(i(x_n)) = u(0) = 0 \quad \text{in} \quad B_1;$$

inoltre

$$\lim_{n\to\infty} i_1(u^*(x_n)) = i_1(y) \quad \text{in} \quad B_1.$$

Ma $i_1(u^*(x_n)) = u(i(x_n))$; essendo B_1 separato (perchè metrizzabile) se ne deduce $\lim\limits_{n\to\infty} u(i(x_n)) = i_1(y)$ cioè $i_1(y) = 0$ e dunque $y = 0$.

In particolare il teorema si applica al caso $A_1 = A$, $B_1 = B$.

* * *

(1.8). Siano (A, B), (A_1, B_1) coppie di spazi di Banach, sullo stesso corpo reale o complesso. In particolare può essere $A_1 = A$ e $B_1 = B$.

Sia $\mathcal{N}$ l'insieme delle applicazioni lineari continue u di B in B_1 tali che ciascuna subordini una applicazione lineare continua u^* di A in A_1 (necessariamente $u^* = u|_A$).

Per il teorema (1.7), $\mathcal{N}$ è l'insieme delle $u \in \mathfrak{L}\ (B, B_1)$ tali che $u(A) \subset A_1$; $\mathcal{N}$ è un sottospazio lineare di $\mathfrak{L}\ (B, B_1)$.

Sia $M(A, B; A_1, B_1)$ lo spazio delle coppie (u, u^*), con $u \in \mathcal{N}$, $u^* = u|_A$. M è un sottospazio lineare dello spazio $\mathfrak{L}(B, B_1) \times$ $\times\ \mathfrak{L}(A, A_1)$; si riconosce facilmente che M è uno spazio di Banach con la norma

$$\| (u, u^*) \|_M = \| u \| + \| u^* \| .$$

TEOREMA (1.8).

Siano (A, C, B) ed (A_1, C_1, B_1) due terne di spazi di Banach, coerenti fra loro; sia T l'applicazione dello spazio di Banach $M(A, B; A_1, B_1)$ nello spazio di Banach $\mathfrak{L}(C, C_1)$ così definita:

$$T(u, u^*) = \tilde{u} \quad \text{dove} \quad \tilde{u} = u|_C ;$$

ebbene T è lineare continua.

Dimostrazione.

La linearità di T si verifica banalmente. Per provare che T è continua ricorriamo al teorema del grafico chiuso.

Sia $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n, u_n^*) = 0$ in M e $\lim\limits_{n\to\infty} T(u_n, u_n^*) = \tilde{u}$ in $\mathfrak{L}(C, C_1)$; tesi: $\tilde{u} = 0$ cioè, $\forall x \in C$, $\tilde{u}(x) = 0$.

Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\ i\ } & C & \xrightarrow{\ j\ } & B \\ \Big\downarrow{\scriptstyle u_n^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tilde{u}_n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle u_n} \\ A_1 & \xrightarrow{\ i_1\ } & C_1 & \xrightarrow{\ j_1\ } & B_1 \end{array} \tag{d. 10}$$

Per ipotesi

$$\lim_{n\to\infty} \| (u_n, u_n^*) \|_M = 0$$

cioè

$$\lim_{n\to\infty} (\| u_n \| + \| u_n^* \|) = 0$$

da cui anche

$$\lim_{n\to\infty} \| u_n \| = 0 ,$$

cioè

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{L}(B, B_1):$$

quindi, $\forall x \in C$, è $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(j(x)) = 0$ in B_1. Inoltre, se $\tilde{u}_n = T(u_n, u_n^*)$, è $\lim\limits_{n\to\infty} j_1(\tilde{u}_n(x)) = j_1(\tilde{u}(x))$ in B_1 (perchè $\tilde{u}_n$ converge a $\tilde{u}$ in $\mathfrak{L}(C, C_1)$ e j_1 è continua); ma $j_1(\tilde{u}_n(x)) = u_n(j(x)) \forall n$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} j_1(\tilde{u}_n(x)) = \lim_{n\to\infty} u_n(j(x))$$

ossia

$$j_1(\tilde{u}(x)) = 0 , \quad \text{dunque} \quad \tilde{u}(x) = 0$$

perchè j_1 è biunivoca: e questo vale $\forall\, x \in C$.

Dunque T è continua, quando in $\mathfrak{L}(C, C_1)$ c'è la topologia della convergenza limitata; a maggior ragione T è continua se in $\mathfrak{L}(C, C_1)$ si pone una topologia meno fine.

COROLLARIO.

T trasforma un insieme limitato di M in un insieme limitato di $\mathfrak{L}(C, C_1)$.

In particolare, il teorema (1.8) ed il corollario si applicano ad una terna di spazi di Banach coerente con sè stessa.

Sarebbe interessante poter estendere il teorema (1.8) a due terne coerenti di spazi lineari topologici.

2. Costruzione d'una terna d'interpolazione coerente con una terna d'interpolazione assegnata.

In questo numero trattiamo il problema nella categoria degli spazi lineari topologici, sul corpo reale o complesso, e delle applicazioni lineari continue.

TEOREMA (2.1).

Assegnata una terna d'interpolazione (A, C, B) *ed una coppia* (A', B'), *esiste almeno uno spazio* C' *tale che* (A', C', B') *sia una terna coerente con quella assegnata e con sè stessa*; *ed anzi esiste lo spazio massimo* (*rispetto all'ordinamento per inclusione continua*) *fra quelli che hanno la suddetta proprietà.*

Per dimostrarlo, dapprima troveremo condizioni necessarie e sufficienti affinchè, data una terna (A, C, B) ed una coppia (A', B'), uno spazio C' formi con questa una terna (A', C', B') coerente con quella data; poi verificheremo che, se (A, C, B) è una terna d'interpolazione, esiste uno spazio massimo che soddisfa tali condizioni; infine che tale spazio rende la nuova terna coerente anche con sè stessa.

Indicheremo con $\mathcal{F}$ l'insieme di tutte le mappe f di B in B' tali che ciascuna f subordini una mappa f^* di A in A'; analogamente indicheremo con Φ l'insieme di tutte le mappe φ di B' in B tali che ciascuna φ subordini una mappa φ^* di A' in A.

Condizioni necessarie per C'.

Supponiamo che esista uno spazio C' il quale renda la terna (A', C', B') coerente con (A, C, B). Per il momento consideriamo gli spazi come insiemi: allora le mappe iniettive sono inclusioni, in base alle nostre definizioni di coppia e di terna.

Per ipotesi $\forall f \in \mathcal{F}$ è $f(C) \subset C'$, da cui $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(C) \subset C'$.

Analogamente, $\forall \varphi \in \Phi$ è $\varphi(C') \subset C$, ossia $C' \subset \varphi^{-1}(C)$, da cui $C' \subset \bigcap_{\varphi \in \Phi} \varphi^{-1}(C)$; insomma $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(C) \subset C' \subset \bigcap_{\varphi \in \Phi} \varphi^{-1}(C)$.

Si ha, ovviamente, $\bigcap_{\varphi \in \Phi} \varphi^{-1}(C) \subset B'$.

Se B è uno spazio separato localmente convesso, è anche $A' \subset \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(C)$, perchè per ogni $y \in A'$ esiste una mappa $f \in \mathcal{F}$ tale che $y \in f(C)$. Infatti sia $F(x)$ un funzionale lineare continuo definito su B, che valga 1 in un punto $\bar{x} \in C$ ($\bar{x} \neq 0$) (teorema di Hahn-Banach); preso $y \in A'$ e posto $f(x) = F(x)y$, f è una applicazione lineare continua di B in A', da cui si deduce che $f \in \mathcal{F}$; inoltre è $y = f(\bar{x})$, donde $y \in f(C)$. In tal caso, posto

$$C_0 = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(C) \quad \text{e} \quad C_2 = \bigcap_{\varphi \in \Phi} \varphi^{-1}(C)\,,$$

risulta

$$A' \subset C_0 \subset C' \subset C_2 \subset B'\,.$$

Se B non è separato localmente convesso, porremo

$$C_0 = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(C) \cup A'\,.$$

Per ipotesi C' è uno spazio lineare (sottospazio lineare di B'); quindi C' contiene lo spazio lineare C_1 generato da C_0, ed è contenuto nello spazio lineare C_2 (C_2 è uno spazio lineare perchè è l'intersezione degli spazi lineari $\varphi^{-1}(C)$):

$$A' \subset C_1 \subset C' \subset C_2 \subset B'\,.$$

Osservazione (2.1.1):

$$\forall f \in \mathcal{F}\,, \quad \text{è} \quad f(C) \subset C_1$$
$$\forall \varphi \in \Phi\,, \quad \text{è} \quad \varphi(C_2) \subset C\,.$$

(2.1.2). Per ipotesi C' è uno spazio lineare topologico e la sua topologia τ' è tale da rendere continue le seguenti applicazioni lineari:

l'inclusione j' di C' in B';
tutte le applicazioni $\tilde{\varphi}$ di C' in C, al variare di φ in Φ;
l'inclusione i' di A' in C';
tutte le applicazioni $\bar{f}$ di C in C', al variare di f in $\mathcal{F}$.

Per ogni $\varphi \in \Phi$, chiamiamo φ_2 la restrizione di φ a C_2: per l'Oss. (2.1.1) φ_2 è un'applicazione lineare di C_2 in C; chiamiamo j_2 l'inclusione di C_2 in B'.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] & C \arrow[rr, "j"] & & B \\ A' \arrow[u, "\varphi^*"] \arrow[r, "i'"] & C' \arrow[u, "\tilde{\varphi}"] \arrow[r, "e_2"] & C_2 \arrow[ul, "\varphi_2"'] \arrow[r, "j_2"] & B' \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd} \qquad \text{(d. 11)}$$

Detta e_2 l'inclusione di C' in C_2, e considerando per ora le applicazioni come lineari solamente, si ha:

$\tilde{\varphi} = \varphi_2 e_2$ (perchè φ_2 e $\tilde{\varphi}$ sono restrizioni della stessa φ)
$j' = j_2 e_2$.

Su C_2 sia τ_2 la topologia meno fine che renda continue j_2 e φ_2 per ogni $\varphi \in \Phi$. Tale topologia esiste, ed è compatibile con la struttura di spazio lineare di C_2.

Per la dimostrazione di questo, si veda [1], cap. I, § 1, n. 9: lì si parla d'uno spazio lineare E, avente una applicazione lineare f_i in ciascuno spazio E_i d'una famiglia di spazi lineari topologici; il nostro caso si riduce a quello ponendo $C_2 = E$, e prendendo la famiglia (E_i) costituita da B' e da un modello di C per ciascuna applicazione φ_2, al variare di φ.

Un sistema fondamentale d'intorni di 0 per τ_2 è costituito dagli insiemi seguenti:

(α) $T \cap C_2$, dove T varia in un sistema fondamentale $\{T\}$ d'intorni di O in B';

(β) $\varphi^{-1}(V)$, al variare di V in un sistema fondamentale $\{V\}$ d'intorni di O in C ed al variare di φ in Φ;

(γ) intersezioni finite dei predetti.

Si riconosce facilmente che la topologia subordinata da τ_2 su C' è la meno fine topologia su C' che renda continue j' e $\tilde{\varphi}$ per ogni $\varphi \in \Phi$. Ricordando le proprietà (2.1.2) della topologia τ' di C', concludiamo che τ' è più fine di quella subordinata da τ_2 su C'.

Per l'Oss. (2.1.1), ogni mappa $f \in \mathcal{F}$ subordina una applicazione lineare f_1 di C in C_1; diciamo i_1 l'inclusione di A' in C_1, ed e_1 l'inclusione di C_1 in C':

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\quad i \quad} & & & C & \xrightarrow{j} & B \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & & \swarrow{\scriptstyle f_1} & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ A' & \xrightarrow{i_1} & C_1 & \xrightarrow{e_1} & C' & \xrightarrow{j'} & B' \end{array} \qquad \text{(d. 12)}$$

Considerando per ora le applicazioni solo come lineari, si ha:

$$i' = e_1 i_1$$

$$\tilde{f} = e_1 f_1 \quad \text{(perchè } \tilde{f},\ f_1 \text{ sono restrizioni della stessa } f\text{).}$$

Diciamo τ_1 la topologia più fine su C_1 che renda continue i_1 ed f_1 per ogni $f \in \mathcal{F}$. Gli aperti per τ_1 sono tutti e soli gli insiemi $\mathcal{a}_1 \subset C_1$ tali che:

$$\begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}, & f_1^{-1}(\mathcal{a}_1) \text{ sia aperto in } C \\ \text{e} & \\ \mathcal{a}_1 \cap A' & \text{sia aperto in } A'. \end{cases}$$

Si vede facilmente che la famiglia degli insiemi predetti è chiusa rispetto alla riunione, rispetto alla intersezione finita, e contiene C_1. (Non sappiamo, in generale, se la topologia τ_1 sia compatibile con la struttura lineare di C_1).

Per le proprietà (2.1.2) della topologia τ' di C', se $\mathcal{C}'$ è un aperto per τ' valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}, & \tilde{f}^{-1}(\mathcal{C}') \text{ è aperto in } C \\ \mathcal{C}' \cap A' & \text{è aperto in } A'. \end{cases}$$

Consideriamo ora la traccia $\mathcal{C}' \cap C_1$:

$$\forall\, f \in \mathcal{F}\,,\ f_1^{-1}(\mathcal{C}' \cap C_1) = \tilde{f}^{-1}(\mathcal{C}')$$

(perchè $f(C) \subset C_1$), quindi è aperto in C; inoltrd $(\mathcal{C}' \cap C_1) \cap A' = \mathcal{C}' \cap A'$ che è aperto in A'.

Quindi ogni aperto per τ' ha una traccia su C_1 che è un aperto per τ_1: dunque τ_1 è più fine della topologia subordinata da τ' su C_1.

In conclusione: affinchè uno spazio lineare topologico C' renda la terna (A', C', B') coerente con quella assegnata (A, C, B), sono *necessarie* le seguenti condizioni:

(2.1.3) $\begin{cases} C_1 \subset C' \subset C_2; \\ \text{la topologia } \tau_1 \text{ sia più fine di quella subordinata} \\ \text{da } \tau', \text{ e } \tau' \text{ sia più fine di quella subordinata da } \tau_2. \end{cases}$

Le condizioni (2.1.3) sono anche *sufficienti.*

Infatti supponiamo che C' sia tale da soddisfarle. Allora l'inclusione di A' in C', tramite C_1, è continua, ed è continua l'inclusione di C' in B', tramite C_2; ogni mappa $f \in \mathcal{F}$ subordina un'applicazione lineare di C in $C' : \tilde{f} = e_1 f_1$, la quale risulta continua perchè composta di applicazioni continue; ed ogni mappa $\varphi \in \Phi$ subordina un'applicazione lineare di C' in $C : \tilde{\varphi} = \varphi_2 e_2$, la quale risulta continua perchè composta di applicazioni continue.

Ma affinchè esista almeno uno spazio lineare topologico C' che soddisfi le condizioni (2.1.3), sono necessarie e sufficienti le seguenti:

(2.1.4) $\begin{cases} C_1 \subset C_2 \\ \text{la topologia } \tau_1 \text{ sia più fine di quella subordi-} \\ \text{nata da } \tau_2. \end{cases}$

La necessità è ovvia; la sufficienza si vede ponendo $C' = C_2$, che è uno spazio lineare topologico. Inoltre il massimo spazio C' che possa soddisfare le (2.1.3) è proprio C_2 (massimo rispetto all'ordinamento per inclusione continua).

COROLLARIO.

Ponendo $A' = A$ e $B' = B$, dalle (2.1.4) si ricavano condizioni necessarie e sufficienti affinchè la terna (A, C, B) sia coerente con sè stessa. Se $A' = A$ e $B' = B$, l'insieme $\mathcal{F}$ e l'insieme Φ (che coincidono) comprendono ciascuno l'applicazione identica I di B su B; allora

$$\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(C) \supset I(C) = I^{-1}(C) \supset \bigcap_{\varphi \in \Phi} \varphi^{-1}(C) ,$$

da cui $C_1 \supset C_2$; inoltre l'applicazione identica di C_2 in C e l'applicazione identica di C in C_1 sono continue, quindi la topologia τ_2 è più fine di τ_1. Confrontando questi risultati con le (2.1.4) si trovano le condizioni necessarie e sufficienti affinchè (A, C, B) sia una terna d'interpolazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = C_2 \\ \tau_1 = \tau_2 . \end{array} \right. \tag{2.1.5}$$

* * *

Ebbene: *se la terna assegnata* (A, C, B) *è una terna d'interpolazione, le condizioni* (2.1.4) *sono soddisfatte.*

Infatti, $\forall f \in \mathcal{F}$ e $\forall \varphi \in \Phi$ la mappa composta $\varphi f = g$ di B in B subordina una mappa $g^* = \varphi^* f^*$ di A in A; allora g subordina una mappa $\tilde{g}$ di C in C, cioè $g(C) \subset C$ e, posto $\tilde{g} = g|_C$, $\tilde{g}$ è continua.

Quindi, $\forall f \in \mathcal{F}$ e $\forall \varphi \in \Phi$, si ha $\varphi f(C) \subset C$, da cui $f(C) \subset \varphi^{-1}(C)$: ne consegue $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(C) \subset \bigcap_{\varphi \in \Phi} \varphi^{-1}(C)$ donde $C_1 \subset C_2$.

Dimostriamo ora che τ_1 è più fine della topologia subordinata da τ_2 su C_1. Quest'ultima è compatibile con la struttura lineare di C_1, ed è la meno fine topologia su C_1 che renda continua, per ogni $\varphi \in \Phi$, l'applicazione lineare $\varphi_2 e$ di C_1 in C, dove con e indichiamo l'inclusione di C_1 in C_2. Per il nostro scopo basta provare che essa rende continua l'inclusione i_1 di A' in C_1 e l'applicazione lineare f_1 di C in C_1 per ogni $f \in \mathcal{F}$: allora infatti τ_1 sarà più fine di essa, per definizione.

Fissata una applicazione appartenente ad $\mathcal{F}$, che chiameremo

u, consideriamo, per ogni $\varphi \in \Phi$, la mappa φu di B in B: questa subordina una mappa $(\varphi u)^*$ di A in A, e quindi una mappa $\widetilde{\varphi u}$ di C in C (per l'ipotesi che (A, C, B) sia una terna d'interpolazione). Ma, essendo $u(C) \subset C_1$, posto $u_1 = u|_C$, si ha $\widetilde{\varphi u} = \varphi_2 e u_1$; per ogni $\varphi \in \Phi$, $\varphi_2 e u_1$ è continua: poichè la topologia subordinata da τ_2 su C_1 è la meno fine che renda continua $\varphi_2 e$ per ogni $\varphi \in \Phi$, se ne deduce che u_1 è continua (vedi [1], cap. I, § 1, n. 9, corollario 1).

La continuità di i_1 si prova in modo analogo, osservando che $\varphi_2 e i_1 = i\varphi^*$ che è continua.

Perciò almeno C_2, con la topologia τ_2, è uno spazio lineare topologico tale che (A', C_2, B') sia una terna coerente con (A, C, B), ed è il massimo fra tali spazi.

Per dimostrare il teorema (2.1) resta ora da provare che la terna (A', C_2, B') è coerente con sè stessa.

Sia g una mappa di B' in B' che subordini una mappa g^* di A' in A'. Per ogni $\varphi \in \Phi$, anche la mappa composta φg di B' in B appartiene all'insieme Φ, quindi subordina un'applicazione lineare continua $(\varphi g)_2$ di C_2 in C (essendo (A', C_2, B') coerente con (A, C, B)). Allora si ha $\varphi g(C_2) \subset C$ per ogni $\varphi \in \Phi$, quindi $g(C_2) \subset \bigcap_{\varphi \in \Phi} \varphi^{-1}(C) = C_2$.

Posto $g_2 = g|_{C_2}$, si ha $(\varphi g)_2 = \varphi_2 g_2$; quindi $\varphi_2 g_2$ è continua per ogni $\varphi \in \Phi$, ed è continua anche l'applicazione lineare $j_2 g_2$ (perchè eguale a $g j_2$; j_2 è l'inclusione di C_2 in B'); ricordando la definizione della topologia τ_2 di C_2, si deduce che g_2 è continua (vedi [1], cap. I, § 1, n. 9, cor. 1).

Dalle (2.1.3) segue che C_2 è lo spazio massimo fra i C', quindi il teorema (2.1) è completamente dimostrato.

* * *

Indichiamo altre proprietà dello spazio C_2, munito della topologia τ_2.

(2.2.1). Se B' è separato, lo è anche C_2, perchè l'inclusione di C_2 in B' è continua; per lo stesso motivo è separato ogni altro spazio che sia contenuto in C_2 con topologia più fine.

(2.2.2). Se B' e C sono localmente convessi, anche C_2 è localmente convesso. Per accertarsene, si ricordi la definizione d'un sistema fondamentale d'intorni per τ_2 (si veda (α), (β) in (2.1.)).

TEOREMA (2.2.3).

Se B' e C sono spazi separati completi e B è separato, lo spazio C_2, con la topologia τ_2, è separato completo.

Dimostrazione.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] & C \arrow[r, "j"] & B \\ A' \arrow[u, "\varphi^*"] \arrow[r, "i'"] & C_2 \arrow[u, "\tilde{\varphi}"] \arrow[r, "j'"] & B' \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd} \qquad \text{(d. 13)}$$

Anzitutto C_2 è separato. Sia poi $\mathcal{H}$ un filtro di Cauchy su C_2; per la continuità dell'iniezione j', $j'(\mathcal{H})$ è un filtro di Cauchy su B', quindi converge ad un punto y' in B'. Per ogni $\varphi \in \Phi$, $\varphi j'(\mathcal{H})$ converge a $\varphi(y')$; inoltre, posto $\tilde{\varphi} = \varphi|_{C_2}$, $\tilde{\varphi}$ è continua, $\tilde{\varphi}(\mathcal{H})$ è un filtro di Cauchy su C, quindi converge ad un punto x_φ in C; $j\tilde{\varphi}(\mathcal{H})$ converge a $j(x_\varphi)$ in B. Essendo $\varphi j' = j\tilde{\varphi}$, si ha $\varphi(y') = j(x_\varphi)$. Dunque, per ogni $\varphi \in \Phi$, $\varphi(y') \in j(C)$, donde

$$y' \in \bigcap_{\varphi \in \Phi} \varphi^{-1}[j(C)] = j'\Big[\bigcap_{\varphi \in \Phi} \tilde{\varphi}^{-1}(C)\Big]$$

(si tenga presente che j e j', in quanto applicazioni, sono inclusioni): ovvero $y' = j'(y_0)$ con $y_0 \in C_2$.

Da $\varphi(y') = j(x_\varphi)$ segue $\varphi j'(y_0) = j(x_\varphi)$, ossia $j\tilde{\varphi}(y_0) = j(x_\varphi)$, e quindi $\tilde{\varphi}(y_0) = x_\varphi$.

Dimostriamo ora che il filtro $\mathcal{H}$ converge a y_0 nella topologia τ_2. Come intorno di y_0 si può prendere $y_0 + T \cap C_2$, dove T è un intorno di O in B', oppure $y_0 + \tilde{\varphi}^{-1}(V)$, con $\varphi \in \Phi$ e V intorno di O in C; nel primo caso esiste $H \in \mathcal{H}$ tale che sia $j'(H) \subset y' + T$ (perchè $j'(\mathcal{H})$ converge ad y'), ossia $j'(H - y_0) \subset T$, da cui: $H - y_0 \subset T \cap C_2$, e $H \subset y_0 + T \cap C_2$; nel secondo caso esiste $K \in \mathcal{H}$ tale che $\tilde{\varphi}(K) \subset x_\varphi + V$ (perchè $\tilde{\varphi}(\mathcal{H})$ converge ad x_φ), cioè $\tilde{\varphi}(K) - x_\varphi = \tilde{\varphi}(K - y_0) \subset V$: allora $K - y_0 \subset \tilde{\varphi}^{-1}(V)$, dunque $K \subset y_0 + \tilde{\varphi}^{-1}(V)$.

* * *

TEOREMA (2.3).

Per la sottocategoria degli spazi localmente convessi vale lo stesso enunciato del teorema (2.1); *inoltre esiste il minimo* (*rispetto all'ordinamento per inclusione continua*) *degli spazi* C'.

Dimostrazione.

Lo spazio C_2, con la topologia τ_2, è il massimo degli spazi C' (teorema (2.1) e proprietà (2.2.2)).

Sullo spazio lineare C_1 sia $\bar{\tau}_1$ la più fine topologia localmente convessa che renda continue i_1 ed f_1 per ogni $f \in \mathcal{F}$ (vedi diagramma 12): essa esiste, ed un sistema fondamentale $\mathcal{U}$ d'intorni di O per $\bar{\tau}_1$ è costituito dagli insiemi U convessi, simmetrici ed assorbenti tali che:

$$\begin{cases} \forall f \in \mathcal{F},\ f_1^{-1}(U) & \text{sia un intorno di } O \text{ in } C \\ U \cap A' & \text{sia un intorno di } O \text{ in } A'. \end{cases}$$

Per la dimostrazione di questo, si veda [1], cap. II, § 2, n. 2, per gli spazi sul corpo reale, e cap. II, § 6, n. 2 per l'estensione al corpo complesso.

Diciamo $\overline{C}_1$ lo spazio lineare topologico localmente convesso ottenuto munendo C_1 della topologia $\bar{\tau}_1$.

Dimostriamo che $\overline{C}_1$ soddisfa alle condizioni (2.1.3).

Sappiamo già che $C_1 \subset C_2$ (teorema 2.1), e τ_1 è più fine di $\bar{\tau}_1$ per definizione; basta verificare che $\bar{\tau}_1$ è più fine della topologia subordinata da τ_2. Sia W un intorno di O per τ_2: possiamo supporre che W sia convesso, simmetrico ed assorbente in C_2. La sua traccia $W \cap C_1$ è un insieme convesso, simmetrico ed assorbente in C_1; per il teorema (2.1) τ_1 è più fine di τ_2, quindi $W \cap C_1$ è un intorno di O per τ_1: ma allora, $\forall f \in \mathcal{F}$, $f^{-1}(W \cap C_1)$ è un intorno di O in C, e $W \cap C_1 \cap A'$ è un intorno di O in A' (dato che τ_1 rende continua ogni applicazione f_1 e l'inclusione j_1): quindi $W \cap C_1$ è un intorno di O per $\bar{\tau}_1$.

Insomma $\bar{C}_1$ soddisfa alle (2.1.3), perciò $(A', \bar{C}_1, B')$ è una terna coerente con (A, C, B).

Dimostriamo ora che $(A', \bar{C}_1, B')$ è coerente con sè stessa.

Supponiamo dapprima che lo spazio B sia anche separato: in tal caso C_1 è lo spazio lineare generato da $C_0 = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(C)$. Sia $\mathcal{G}'$ l'insieme delle mappe g di B' in B' tali che ciascuna subordini una mappa g^* di A' in A'. Presa una qualunque $g \in \mathcal{G}'$, sia dapprima $y \in C_0$: esistono $x \in C$ ed $f \in \mathcal{F}$ tali che $y = f(x)$; $g(y) = gf(x)$, ma $gf \in \mathcal{F}$, quindi $gf(C) \subset C_1$ (per l'Oss. 2.1.1), perciò $gf(x) = g(y) \in C_1$. Sia ora $z \in C_1 : z = \sum_1^n {}_i\lambda_i y_i$ con $y_i \in C_0$; $g(z) = \sum_1^n {}_i\lambda_i g(y_i)$, ma $g(y_i) \in C_1 : g(z) \in C_1$.

Insomma $g(C_1) \subset C_1$; posto $g_1 = g|_{C_1}$, verifichiamo che g_1 è continua nella topologia $\bar{\tau}_1$. Sia U un intorno del sistema fondamentale $\mathcal{U}$ descritto sopra: allora $g_1^{-1}(U)$ è un insieme convesso, simmetrico ed assorbente in C_1 (perchè tale è U_1 e g_1 è lineare); per ogni $f \in \mathcal{F}$, $f_1^{-1} g_1^{-1}(U) = (gf)_1^{-1}(U)$, ma $gf \in \mathcal{F}$: allora $(gf)_1^{-1}(U)$ è un intorno di O in C; $g_1^{-1}(U) \cap A' = g^{*-1}(U \cap A')$ che è un intorno in A' (perchè lo è $U \cap A'$, e g^* è continua): dunque $g_1^{-1}(U)$ è un intorno di O per $\bar{\tau}_1$.

Se B non è separato, C_1 è lo spazio lineare generato da $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(C) \cup A'$; in tal caso, per dimostrare che $g(C_1) \subset C_1$, basta ricordare anche il fatto che $g(A') \subset A'$.

Infine, che $\bar{C}_1$ sia il minimo spazio localmente convesso verificante la tesi del teorema si vede dalle (2.1.3) e dalla definizione di $\bar{\tau}_1$.

(2.4). Condizione sufficiente per l'unicità di C' è $C_1 = C_2$; anzi, nella sottocategoria degli spazi localmente convessi, $\bar{C}_1 = C_2$ è condizione necessaria e sufficiente per l'unicità di C'.

Tali condizioni appaiono difficili da verificare.

Se esiste un isomorfismo di B su B' che subordini un isomorfismo di A su A', allora C' è isomorfo a C.

Infatti, sia f l'isomorfismo suddetto: $f \in \mathcal{F}$, quindi f subordina una mappa $\tilde{f}$ di C in C'. Esiste poi $\varphi \in \Phi$ tale che φf sia l'identità su B; φ subordina $\tilde{\varphi}$ di C' in C: $\tilde{\varphi}\tilde{f}$ è l'identità su C.

Analogamente si vede che $\tilde{f}\tilde{\varphi}$ è l'identità su C'. Dunque C e C' sono isomorfi.

TEOREMA (2.5).

Assegnate una famiglia di terne d'interpolazione tutte coerenti fra loro (A_k, C_k, B_k), $k \in K$, ed una coppia (A', B'), esiste almeno uno spazio C' tale che (A', C', B') sia una terna coerente con sè stessa e con ciascuna terna della famiglia assegnata, ed anzi esiste il massimo (rispetto all'ordinamento per inclusione continua) degli spazi aventi la suddetta proprietà.

Per la sottocategoria degli spazi localmente convessi vale lo stesso enunciato, ma in essa esiste anche il minimo degli spazi C'.

Condurremo la dimostrazione secondo uno schema analogo a quello usato per il teorema (2.1).

Per ogni $k \in K$ sia $\mathcal{F}_k$ l'insieme delle mappe f di B_k in B' tali che ciascuna subordini una f^* di A_k in A', e sia Φ_k l'insieme delle mappe φ di B' in B_k tali che ciascuna subordini una φ^* di A' in A_k.

Si vede facilmente, come in (2.1), che per C' è necessaria la seguente condizione:

$$\bigcup_{\substack{f \in \mathcal{F}_j \\ j \in K}} f(C_j) \subset C' \subset \bigcap_{\substack{\varphi \in \Phi_h \\ h \in K}} \varphi^{-1}(C_h)\,.$$

Poniamo:

$$C_2 = \bigcap_{\substack{\varphi \in \Phi_h \\ h \in K}} \varphi^{-1}(C_h)$$

C_2 è un sottospazio lineare di B'.

Sia C_1 lo spazio lineare generato da $\bigcup_{\substack{f \in \mathcal{F}_j \\ j \in K}} f(C_j)$, se per qualche $j \in K$ lo spazio B_j è separato localmente convesso; altrimenti C_1 sia lo spazio lineare generato da $\bigcup_{\substack{f \in \mathcal{F}_j \\ j \in K}} f(C_j) \cup A'$. In ogni caso si ha $A' \subset C_1$.

Per ogni $j \in K$ e per ogni $f \in \mathcal{F}_j$, si ha $f(C_j) \subset C_1$; per ogni $h \in K$ e per ogni $\varphi \in \Phi_h$ si ha $\varphi(C_2) \subset C_h$.

Tenendo presente anche il fatto che dev'essere $A' \subset C' \subset B'$, si ha la seguente condizione necessaria per C':

$$C_1 \subset C' \subset C_2 . \tag{2.5.1}$$

Su C_2 sia τ_2 la topologia meno fine che renda continua l'inclusione di C_2 in B', e la restrizione di φ a C_2 per ogni $\varphi \in \Phi_h$ e per ogni $h \in K$; τ_2 è compatibile con la struttura lineare di C_2.

Su C_1 sia τ_1 la topologia più fine che renda continue l'inclusione di A' in C_1, e la restrizione di f a C_j per ogni $f \in \mathcal{F}_j$ e per ogni $j \in K$. Tale topologia esiste, ma in generale non sappiamo se sia compatibile con la struttura lineare di C_1. Gli aperti per τ_1 sono tutti e soli gli insiemi $\mathfrak{a}_1$ che soddisfano simultaneamente alle due seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \forall j \in K, \ \ \forall f \in \mathcal{F}_j : f^{-1}(\mathfrak{a}_1) \cap C_j \ \text{ è aperto in } \ C_j; \\ \mathfrak{a}_1 \cap A' \ \text{ è aperto in } \ A'. \end{cases}$$

Supponiamo che C', con la topologia τ', renda la terna (A', C', B') coerente con ciascuna terna assegnata. Intanto è $C_1 \subset C' \subset C_2$, per la (2.5.1). La topologia che τ_2 subordina sullo spazio lineare C' è la meno fine che renda continua l'inclusione di C' in B', e l'applicazione $\tilde{\varphi} = \varphi|_{C'}$, $\forall \varphi \in \Phi_h$, $\forall h \in K$: quindi τ' è più fine di essa. D'altra parte τ' subordina su C_1 una topologia che rende continue l'inclusione di A' in C_1 e la restrizione di f a C_j $\forall f \in \mathcal{F}_j$, $\forall j \in K$: quindi τ_1 è più fine di essa.

Da ciò ricaviamo l'altra condizione necessaria per C':

(2.5.2). Le inclusioni di C_1 in C' e di C' in C_2 siano continue.

Si vede facilmente che le condizioni (2.5.1) e (2.5.2) sono anche sufficienti affinchè (A', C', B') sia una terna coerente con ciascuna terna assegnata. Basta ricordare che, $\forall j \in K$, ogni mappa $f \in \mathcal{F}_j$ subordina una mappa di C_j in C_1, e $\forall h \in K$ ogni mappa $\varphi \in \Phi_h$ subordina una mappa di C_2 in C_h.

Lo spazio C_2, con la topologia τ_2, è uno spazio lineare topologico. Dimostriamo che almeno esso soddisfa alle condizioni (2.5.1) e (2.5.2), cioè che $C_1 \subset C_2$ e l'inclusione è continua.

Qualunque siano $j \in K$, $f \in \mathcal{F}_j$, $h \in K$ e $\varphi \in \Phi_h$, la mappa composta φf di B_j in B_h subordina una $\varphi^* f^*$ di A_j in A_h; essendo le terne d'indici j e h coerenti per ipotesi, φf subordina una applicazione di C_j in C_h: allora $\varphi f(C_j) \subset C_h$, ed $f(C_j) \subset \varphi^{-1}(C_h)$.

Da ciò segue $\bigcup_{\substack{f \in \mathcal{F}_j \\ j \in K}} f(C_j) \subset \bigcap_{\substack{\varphi \in \Phi_h \\ h \in K}} \varphi^{-1}(C_h)$ quindi $C_1 \subset C_2$.

Come in (2.1) si verifica che τ_1 è più fine della topologia subordinata da τ_2 su C_1, utilizzando il fatto che, per ogni $j \in K$ ed $f \in \mathcal{F}_j$, e per ogni $h \in K$ e $\varphi \in \Phi_h$ la mappa φf di B_j in B_h subordina una applicazione continua di C_j in C_h.

Dunque la terna (A', C_2, B') è coerente con ciascuna terna assegnata.

Dalle (2.5.1) e (2.5.2) segue che C_2 è il massimo dei C'.

Ora dimostreremo che la terna (A', C_2, B') è coerente con sè stessa.

Per ogni $k \in K$, esiste uno spazio massimo $C_{2,k}$ che renda la terna $(A', C_{2,k}, B')$ coerente con (A_k, C_k, B_k) e con sè stessa (teorema 2.1); sia $\tau_{2,k}$ la sua topologia. Lo spazio C_2, definito sopra, è l'intersezione dei $C_{2,k}$ al variare di k in K, munito della topologia riunione di quelle subordinate dalle $\tau_{2,k}$. Per ogni $k \in K$, $C_{2,k}$ è interpolatore tra A' e B'; allora anche C_2 è interpolatore tra A' e B', in base alla (1.3).

Nella sottocategoria degli spazi localmente convessi, C_2, con la topologia τ_2, è localmente convesso; inoltre in essa sullo spazio C_1 possiamo porre la topologia localmente convessa $\bar{\tau}_1$, la più fine che renda continue l'inclusione di A' in C_1 e la restrizione di f a C_j, $\forall f \in \mathcal{F}_j$ e $\forall j \in K$. Come in (2.3) si dimostra che lo spazio localmente convesso $\overline{C_1}$ così ottenuto è compreso, algebricamente e topologicamente, tra C_1 e C_2; esso quindi rende la terna $(A', \overline{C}_1, B')$ coerente con ciascuna terna assegnata. Dalle (2.5.1), (2.5.2) e dalla definizione di $\bar{\tau}_1$ segue che $\overline{C}_1$ è il minimo spazio localmente convesso avente la suddetta proprietà.

Dimostreremo infine che la terna $(A', \overline{C}_1, B')$ è coerente con sè stessa.

Per ogni $k \in K$ esiste uno spazio localmente convesso minimo $\overline{C}_{1,k}$ che renda la terna $(A', \overline{C}_{1,k}, B')$ coerente con (A_k, C_k, B_k) e con sè stessa (teorema 2.3). Si osservi che $\overline{C}_1$, come spazio lineare, coincide con quello generato da $\bigcup_{k\in K} \overline{C}_{1,k}$; $\bar{\tau}_1$ è la più fine topologia localmente convessa che renda continue tutte le inclusioni dei $\overline{C}_{1,k}$ in $\overline{C}_1$. Essendo $\overline{C}_{1,k}$ interpolatore tra A' e B' per ogni k, dalla (1.4) si ha che anche $\overline{C}_1$ è interpolatore tra A' e B'.

3. Costruzione d'una terna d'interpolazione coerente con una terna d'interpolazione assegnata, nella categoria degli spazi di Banach.

Tutto il seguito sarà dedicato alla dimostrazione del seguente teorema.

TEOREMA 3.

Nella categoria degli spazi di Banach, sul corpo reale o complesso, e delle applicazioni lineari limitate, assegnate una terna d'interpolazione (A, C, B) *ed una coppia* (A', B'), *esiste almeno uno spazio* C' *tale che* (A', C', B') *sia una terna coerente con* (A, C, B) *e con sè stessa; anzi esistono il massimo ed il minimo (rispetto all'ordinamento per inclusione continua) di tali spazi.*

Osservazione (3.1).

Sia (A, C, B) una terna di spazi di Banach; senza alterare le topologie possiamo determinare le norme in modo che, $\forall x \in A$, sia $\| x \|_C \leqslant \| x \|_A$, e $\forall x \in C$ sia $\| x \|_B \leqslant \| x \|_C$. Detta $\sum_X$ la sfera $\| \ \| \leqslant 1$ nello spazio X, è allora $\sum_A \subset \sum_C \subset \sum_B$. Nel seguito per ogni terna assegnata supporremo che sia così; e per ogni data coppia (A', B') supporremo che sia $\| y \|_{B'} \leqslant \| y \|_{A'}$, $\forall y \in A'$, e quindi $\sum_{A'} \subset \sum_{B'}$.

Osservazione (3.2).

Sullo stesso corpo, reale o complesso, siano (A, C, B) ed (A', C', B') due terne di spazi lineari topologici, in cui A, B, A' e B' siano spazi di Banach. Nell'insieme $\mathcal{F}$ delle mappe f di B in B', tali che ciascuna subordini una mappa f^* di A in A', sia $\mathcal{F}_1$ il sottoinsieme seguente:

$$\mathcal{F}_1 = \{f : f \in \mathcal{F}, \quad \|f\| \leqslant 1, \quad \|f^*\| \leqslant 1\}.$$

Nell'insieme Φ delle mappe φ di B' in B, tali che ciascuna subordini una φ^* di A' in A, sia Φ_1 il sottoinsieme seguente:

$$\Phi_1 = \{\varphi : \varphi \in \Phi, \quad \|\varphi\| \leqslant 1, \quad \|\varphi^*\| \leqslant 1\}.$$

Ebbene: condizione necessaria e sufficiente affinchè le terne (A, C, B) ed (A', C', B') siano coerenti, è che lo siano rispetto alle mappe di $\mathcal{F}_1$ e di Φ_1.

La necessità è ovvia. La sufficienza si prova facilmente, alterando le mappe mediante moltiplicazione per opportune costanti.

In particolare, sia (A, C, B) una terna in cui A e B siano spazi di Banach. Chiameremo (anche nel seguito) $\mathcal{G}_1$ l'insieme delle mappe g di B in B, tali che ciascuna subordini una mappa g^* di A in A, e tali che sia $\|g\| \leqslant 1$, $\|g^*\| \leqslant 1$. Condizione necessaria e sufficiente affinchè (A, C, B) sia coerente con sè stessa è che lo sia rispetto alle mappe di $\mathcal{G}_1$.

* * *

Sia (A, C, B) una terna d'interpolazione di spazi di Banach ed (A', B') una coppia di spazi di Banach.

Mediante i procedimenti esposti nel n. 2, costruiamo gli spazi lineari topologici $\overline{C}_1$ e C_2, facendo però variare le mappe negli insiemi $\mathcal{F}_1$ e Φ_1. È facile constatare che questa limitazione non altera gli spazi $\overline{C}_1$ e C_2, nè in senso algebrico nè in senso topologico.

In base ai risultati del n. 2, nelle presenti ipotesi C_2 risulta localmente convesso, separato e completo; $\overline{C}_1$ è localmente convesso, separato e contenuto in C_2 con topologia più fine. Inoltre $\overline{C}_1$ è uno spazio tonnelé (si veda [1], cap. III, § 1, n. 2, e si tenga conto della definizione di $\bar{\tau}_1$).

Ciascuna delle due terne (A', C_2, B') ed $(A', \overline{C}_1, B')$ è coerente con (A, C, B) e con sè stessa.

Ora ci proponiamo di costruire degli spazi *normati* compresi, algebricamente e topologicamente, tra $\overline{C}_1$ e C_2.

Per ogni $f \in \mathcal{F}_1$ e per ogni $\varphi \in \Phi_1$ la mappa composta φf di B in B subordina una mappa $\varphi^* f^*$ di A in A, e quindi anche una mappa $\widetilde{\varphi f}$ di C in C. Inoltre, $\forall f \in \mathcal{F}_1$ e $\forall \varphi \in \Phi_1$, si ha

$$\| \varphi f \| \leqslant \| \varphi \| \| f \| \leqslant 1 \quad \text{e} \quad \| \varphi^* f^* \| \leqslant \| \varphi^* \| \| f^* \| \leqslant 1 ;$$

allora l'insieme seguente di coppie

$$\{(\varphi f, \varphi^* f^*) : f \in \mathcal{F}_1, \ \varphi \in \Phi_1\}$$

è limitato in $M(A, B; A, B)$ (vedi 1.8). Allora, per il teorema (1.8), è limitato in $\mathfrak{L}(C, C)$ l'insieme

$$\{\widetilde{\varphi f} : f \in \mathcal{F}_1, \ \varphi \in \Phi_1\}$$

quindi esiste $h > 0$ tale che, per ogni $f \in \mathcal{F}_1$ e per ogni $\varphi \in \Phi_1$, sia $\| \widetilde{\varphi f} \| \leqslant h$.

Allora, $\forall x \in C$, per ogni $f \in \mathcal{F}_1$ e per ogni $\varphi \in \Phi_1$ si ha $\| \widetilde{\varphi f}(x) \|_C \leqslant \leqslant h \| x \|_C$, da cui $\varphi f(\Sigma_C) \subset h \Sigma_C$ ed $f(\Sigma_C) \subset h \varphi^{-1}(\Sigma_C)$; quindi

$$\bigcup_{f \in \mathcal{F}_1} f(\Sigma_C) \subset h \bigcap_{\varphi \in \Phi_1} \varphi^{-1}(\Sigma_C) . \tag{3.3}$$

Proveremo ora che è

$$\Sigma_{A'} \subset k \bigcup_{f \in \mathcal{F}_1} f(\Sigma_C) \tag{3.4}$$

con $k > 0$ opportuno.

Fissato un $\bar{x} \in \Sigma_C$, $\bar{x} \neq 0$, sia $k > 0$ tale che $\| k\bar{x} \|_B = 1$; detto $z = k\bar{x}$, $z \in k\Sigma_C$. Esiste un funzionale lineare continuo $F(x)$ definito in B, tale che sia $F(z) = 1$, $\| F \| = 1/\| z \|_B = 1$ (per il teorema di Hahn-Banach). Sia $y \in \Sigma_{A'}$: posto $f(x) = F(x)y$, si ha $f(z) = y$, quindi $y \in f(k\Sigma_C) = kf(\Sigma_C)$. Questa f è un'applicazione lineare continua di B in A', da cui si deduce che $f \in \mathcal{F}$; inoltre si ha

$$\| f \|_{\mathfrak{L}(BA')} = \| F \| \, \| y \|_{A'} \leqslant 1 ,$$

ed a maggior ragione $\| f \|_{\mathfrak{L}(B\,B')} \leqslant 1$, $\| f^* \|_{\mathfrak{L}(A\,A')} \leqslant 1$ (si tenga conto dell'Oss. (3.1)): quindi $f \in \mathcal{F}_1$. Per ogni $y \in \Sigma_{A'}$ esiste dunque una $f \in \mathcal{F}_1$ tale che $y \in kf(\Sigma_C)$, il che implica la (3.4).

Proveremo inoltre che è

$$\bigcap_{\varphi \in \Phi_1} \varphi^{-1}(\Sigma_B) \subset p\Sigma_{B'} ,$$

con $p > 0$ opportuno, da cui, essendo $\Sigma_C \subset \Sigma_B$, seguirà

$$\bigcap_{\varphi \in \Phi_1} \varphi^{-1}(\Sigma_C) \subset p\Sigma_{B'} . \tag{3.5.}$$

Basta dimostrare che

$$y \notin p\Sigma_{B'} \Rightarrow y \notin \bigcap_{\varphi \in \Phi_1} \varphi^{-1}(\Sigma_B) .$$

Fissiamo un $w \in A$ con $\| w \|_B > 1$, e sia $p \geqslant \| w \|_A$. Proviamo che, per ogni $y \notin p\Sigma_{B'}$, esiste $\varphi \in \Phi_1$ tale che $\varphi(y) \notin \Sigma_B$. Per ipotesi è $\| y \|_{B'} > p$; sia $\Gamma(\eta)$ un funzionale lineare continuo definito in B', tale che sia $\Gamma(y) = 1$ e $\| \Gamma \| = 1/\| y \|_{B'}$. Sia $\varphi(\eta) = \Gamma(\eta)w$: questa φ è un'applicazione lineare continua di B' in A, quindi appartiene a Φ; $\| \varphi \|_{\mathfrak{L}(B'A)} = \| \Gamma \| \, \| w \|_A = \dfrac{\| w \|_A}{\| y \|_{B'}} < \dfrac{\| w \|_A}{p} \leqslant 1$, da cui si deduce che $\varphi \in \Phi_1$ (tenendo conto dell'Oss. (3.1)); ebbene,

$$\| \varphi(y) \|_B = | \Gamma(y) | \, \| w \|_B = \| w \|_B > 1 ,$$

dunque $\varphi(y) \notin \Sigma_B$.

Poniamo

$$\Sigma_1 = k \bigcup_{f \in \mathcal{F}_1} f(\Sigma_C)$$

e

$$\Sigma_2 = kh \bigcap_{\varphi \in \Phi_1} \varphi^{-1}(\Sigma_C) .$$

Dalle (3.3), (3.4) e (3.5) risulta

$$\Sigma_{A'} \subset \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset l\,\Sigma_{B'} \qquad (3.6.)$$

dove

$$l = khp > 0 .$$

Σ_2 è un sottoinsieme di C_2, ed è convesso, simmetrico, stellato (perchè tale è Σ- e le applicazioni φ sono lineari); Σ_1 è un sottoinsieme di C_1.

Proposizione (3.7).

Detto D_2 lo spazio lineare generato da Σ_2, gli insiemi omotetici $\lambda\Sigma_2$ (al variare di $\lambda > 0$) costituiscono in esso un sistema fondamentale d'intorni di 0 per una topologia ϑ_2 definibile da una *norma*; D_2, munito di essa, è compreso algebricamente e topologicamente tra $\overline{C_1}$ e C_2.

Dimostrazione.

Anzitutto è $D_2 \subset C_2$. Gli insiemi della famiglia $\mathfrak{R} = \{\lambda\Sigma_2 : \lambda > 0\}$ hanno le seguenti proprietà:

costituiscono una base di filtro;
sono simmetrici e stellati;
se $U \in \mathfrak{R}$ e $\mu \neq 0$, $\mu U = |\mu|\, U \in \mathfrak{R}$;
sono convessi.

Proviamo ora che in D_2 essi sono anche assorbenti.

Sia $y \in D_2 : y = \sum_1^n {}_i \mu_i x_i$ con $x_i \in \Sigma_2$ per ogni i; possiamo supporre $\mu_i \geqslant 0\ \forall i$, essendo Σ_2 simmetrico, e $\sum_1^n {}_i \mu_i = m > 0$.

Consideriamo $\dfrac{1}{m} y = \sum_1^n {}_i \dfrac{\mu_i}{m} x_i$: si ha $\dfrac{\mu_i}{m} \geqslant 0\ \forall i$, e $\sum_1^n {}_i \dfrac{\mu_i}{m} = 1$: quindi $\dfrac{1}{m} y \in \Sigma_2$ perchè Σ_2 è convesso, donde $y \in m\Sigma_2$.

Osservazione (3.7.1).

D_2 coincide con l'insieme dei punti di C_2 assorbibili da Σ_2 (la dimostrazione è banale).

Dunque gli insiemi $\{\lambda\Sigma_2\}$ costituiscono un sistema fondamentale d'intorni di 0 per una topologia ϑ_2, munito della quale D_2 è uno spazio localmente convesso. Inoltre in tale spazio esiste un intorno di 0 limitato (Σ_2 stesso), quindi basterà dimostrare che lo spazio è separato per concludere che la sua topologia può essere definita da una norma (vedi [1], cap. III, § 2, n. 1).

Ora dimostreremo che D_2, con la topologia ϑ_2, è compreso tra $\overline{C}_1$ e C_2 in senso algebrico e topologico.

Detto $\overline{\Sigma}_1$ l'inviluppo convesso simmetrico stellato di Σ_1, dalla (3.6) si ricava $\overline{\Sigma}_1 \subset \Sigma_2$ (essendo Σ_2 convesso, simmetrico e stellato). Proviamo che $\overline{\Sigma}_1$ è assorbente in C_1.

Sia $y \in C_1$: $y = \sum_1^n {}_i\mu_i y_i$ con $y_i \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}_1} f(C)$, cioè $y_i = f_i(x_i)$ con $x_i \in C$, $f_i \in \mathcal{F}_1$, per $i = 1, \dots n$. Essendo Σ_c assorbente in C, per ogni i $\exists \lambda_i > 0$ tale che $x_i \in \lambda_i \Sigma_c$; detto $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i$, $x_i \in \lambda\Sigma_c$ per ogni i (perchè Σ_c è stellato); allora $y_i = f_i(x_i) \in \lambda f_i(\Sigma_c)$. Per ogni i $y_i \in \lambda \bigcup_{f \in \mathcal{F}_1} f(\Sigma_c) = \varrho\Sigma_1$, quindi $y_i \in \varrho\overline{\Sigma}_1$ $\forall i$, con $\varrho > 0$. Essendo $\varrho\overline{\Sigma}_1$ simmetrico e convesso, si dimostra, come nel caso di Σ_2, che $y = \sum_1^n {}_i\mu_i y_i$ appartiene a $m\varrho\overline{\Sigma}_1$, con $m > 0$ opportuno.

Quindi $\overline{\Sigma}_1$ è assorbente in C_1; ne consegue $C_1 \subset D_2$: $\forall y \in C_1$, $\exists t > 0$ tale che $y \in t\overline{\Sigma}_1$; ma $t\overline{\Sigma}_1 \subset t\Sigma_2 \subset D_2$; $y \in D_2$. Dunque si ha $C_1 \subset D_2 \subset C_2$.

Proviamo che la topologia $\bar{\tau}_1$ è più fine di quella subordinata da ϑ_2. Poichè è $\overline{\Sigma}_1 \subset \Sigma_2$, basta provare che $\overline{\Sigma}_1$ è un intorno di 0 per $\bar{\tau}_1$. $\overline{\Sigma}_1$ è convesso, simmetrico, stellato ed assorbente in C_1; $\forall f \in \mathcal{F}_1$, $kf(\Sigma_c) \subset \overline{\Sigma}_1$, donde $k\Sigma_c \subset f^{-1}(\overline{\Sigma}_1)$, per cui $f^{-1}(\overline{\Sigma}_1) \cap C$ è un intorno di 0 in C; infine $\Sigma_{A'} \subset \overline{\Sigma}_1$, quindi $\overline{\Sigma}_1 \cap A'$ è un intorno di 0 in A'. Dunque $\overline{\Sigma}_1$ è un intorno di 0 per $\bar{\tau}_1$.

Proviamo ora che ϑ_2 è più fine della topologia subordinata da τ_2, cioè che, per ogni intorno U d'un sistema fondamentale di C_2, esiste $\lambda > 0$ tale che $\lambda\Sigma_2 \subset U$.

Può essere $U = T \cap C_2$, con $T = \mu\Sigma_{B'}$ e $\mu > 0$: essendo $\Sigma_2 \subset l\,\Sigma_{B'}$ (vedi 3.6) e $\Sigma_2 \subset C_2$, esiste $\lambda' > 0$ per cui sia $\lambda'\Sigma_2 \subset U$. Oppure può essere $U = \varphi^{-1}(V) \cap C_2$, con $\varphi \in \Phi_1$ e $V = \varrho\Sigma_c$; $\Sigma_2 = kh \bigcap_{\varphi\in\Phi} \varphi^{-1}(\Sigma_c) \subset kh\varphi^{-1}(\Sigma_c)$, $\forall\varphi \in \Phi_1$, e $\Sigma_2 \subset C_2$; esiste allora $\lambda'' > 0$ tale che $\lambda''\Sigma_2 \subset U$. Dai due casi precedenti si passa al caso generale per intersezione.

Insomma si ha:

$$\overline{C}_1 \subset D_2 \subset C_2 \tag{3.7.2}$$

in senso algebrico e topologico.

Perciò D_2 è uno spazio separato; dunque la sua topologia può essere definita da una norma.

Dalla (3.7.2) si ha che la terna (A', D_2, B') è coerente con (A, C, B).

Proposizione (3.8).

La terna (A', D_2, B') è coerente anche con sè stessa.

Dimostrazione.

Sia $\mathcal{G}_1'$ l'insieme delle mappe g di B' in B' tali che ciascuna subordini una mappa g^* di A' in A' e sia $\| g \| \leqslant 1$, $\| g^* \| \leqslant 1$. Proviamo che, $\forall g \in \mathcal{G}_1'$, si ha $g(D_2) \subset D_2$, e posto $\tilde{g} = g|_{D_2}$, $\tilde{g}$ è continua (oltre che lineare, com'è ovvio).

Basta dimostrare che è $g(\Sigma_2) \subset \Sigma_2$: infatti D_2 è lo spazio delle combinazioni lineari dei punti di Σ_2, e g è lineare; inoltre un sistema fondamentale d'intorni di 0 è costituito dagli omotetici di Σ_2.

Per ogni $g \in \mathcal{G}_1'$ e per ogni $\varphi \in \Phi_1$ la mappa composta φg di B' in B subordina una $\varphi^* g^*$ di A' in A, ed è $\| \varphi g \| \leqslant 1$, $\| \varphi^* g^* \| \leqslant 1$: quindi $\varphi g \in \Phi_1$.

Fissata ora una qualunque $g \in \mathcal{G}_1'$, sia

$$y \in \Sigma_2 = kh \bigcap_{\varphi\in\Phi_1} \varphi^{-1}(\Sigma_c)\,,$$

cioè $\varphi(y) \in kh\Sigma_c$ $\forall\varphi \in \Phi_1$; ma $\forall\varphi \in \Phi_1$, posto $\psi = \varphi g$, è anche

$\psi \in \Phi_1$: allora $\varphi g(y) = \psi(y) \in kh\Sigma_c$, $\forall \varphi \in \Phi_1$; quindi $g(y) \in \in kh \bigcap \varphi^{-1}(\Sigma_c) = \Sigma_2$, e dunque $g(\Sigma_2) \subset \Sigma_2$.

(3.9). Munito D_2 d'una norma che definisca la topologia ϑ_2, sia $\widehat{D}_2$ lo spazio completato: è uno spazio di Banach, contenuto in C_2 (perchè C_2 è completo). Per la proprietà (1.6), anche la terna $(A', \widehat{D}_2, B')$ è coerente con sè stessa e con quella assegnata (A, C, B) (si osservi che C è completo per ipotesi).

Proposizione (3.10).

$\widehat{D}_2$ è il massimo (rispetto all'ordinamento per inclusione continua) degli spazi di Banach contenuti in C_2, quindi è il massimo spazio di Banach che renda la nuova terna coerente con (A, C, B).

Dimostriamo anzitutto che non può esservi uno spazio di Banach contenuto in C_2, contenente $\widehat{D}_2$, e diverso da $\widehat{D}_2$ (questo non dà ancora l'enunciato (3.10), perchè non sappiamo se gli spazi in questione formino un insieme totalmente ordinato per inclusione continua).

Sia E uno spazio di Banach contenuto in C_2 e contenente $\widehat{D}_2$; per le (2.1.3) la terna (A', E, B') è coerente con (A, C, B). Per il teorema (1.8), l'applicazione lineare T così definita:

$$T(\varphi, \varphi^*) = \tilde{\varphi}$$

risulta continua tra $M(A', B'; A, B)$, spazio delle coppie (φ, φ^*) con la norma $\| \varphi \| + \| \varphi^* \|$, ed $\mathfrak{L}(E, C)$ dotato della usuale struttura di Banach.

In $M(A', B'; A, B)$ sia $H = \{(\varphi, \varphi^*) : \varphi \in \Phi_1\}$: è un insieme limitato, quindi $T(H)$ è limitato in $\mathfrak{L}(E, C)$. Perciò, $\forall V$ intorno di 0 in C, l'insieme $\bigcap_{\tilde{\varphi} \in T(H)} \tilde{\varphi}^{-1}(V)$ assorbe ogni insieme limitato di E (v. [1], cap. III, § 3, n. 4). In particolare $\bigcap_{\varphi \in \Phi_1} \varphi^{-1}(\Sigma_c)$ assorbe ogni punto di E, quindi Σ_2 assorbe ogni punto di E: allora $E \subset D_2$. Ma essendo $\widehat{D}_2 \subset E$ per ipotesi, come spazi lineari essi coincidono; l'inclusione di $\widehat{D}_2$ in E è biunivoca su e continua, quindi anche l'inversa è continua, per un noto teorema di Banach: insomma $E = \widehat{D}_2$ (nel senso che hanno anche topologie equivalenti).

Perciò $\widehat{D}_2$ è un elemento massimale nell'insieme, parzialmente ordinato per inclusione continua, degli spazi di Banach contenuti in C_2.

Dimostriamo ora che $\widehat{D}_2$ è proprio il massimo. Sia G uno spazio di Banach contenuto in C_2; sia H lo spazio lineare generato da $\widehat{D}_2 \cup G$, munito della norma

$$\| u \|_H = \inf_{\substack{v+w=u \\ v\in\widehat{D}_2, w\in G}} (\| v \|_{\widehat{D}_2} + \| w \|_G) :$$

con ciò H è uno spazio di Banach contenente $\widehat{D}_2$ e G. Come spazio lineare H è contenuto in C_2 perchè è il minimo spazio lineare contenente $\widehat{D}_2$ e G. Proviamo che l'inclusione di H in C_2 è continua. Sia U un intorno di 0 in C_2; esiste un intorno Z tale che $Z + Z \subset U$. Essendo continue le inclusioni di $\widehat{D}_2$ e di G in C_2, esiste un intorno

$$V = \{v : \| v \|_{\widehat{D}_2} \leqslant \varepsilon\}$$

tale che $V \subset Z$, ed esiste un intorno

$$W = \{w : \| w \|_G \leqslant \eta\}$$

tale che $W \subset Z$. Consideriamo in H l'intorno

$$T = \left\{ u : \| u \|_H \leqslant \frac{\min(\varepsilon, \eta)}{2} \right\} .$$

Se $u \in T$, $u = v + w$ e $\inf\limits_{v+w=u} (\| v \|_{\widehat{D}_2} + \| w \|_G) \leqslant \dfrac{\min(\varepsilon, \eta)}{2}$:

esiste una coppia (v, w) tale che $v + w = u$ e

$$\| v \|_{\widehat{D}_2} + \| w \|_G \leqslant \min(\varepsilon, \eta)$$

allora $\| v \|_{\widehat{D}_2} \leqslant \min(\varepsilon, \eta)$ e $\| w \|_G \leqslant \min(\varepsilon, \eta)$:

$v \in V \subset Z$, $w \in W \subset Z$, quindi $v + w \in Z + Z \subset U$: dunque $T \subset U$.

Insomma H è uno spazio di Banach compreso tra $\widehat{D}_2$ e C_2: ne segue $H = \widehat{D}_2$, quindi G è contenuto in $\widehat{D}_2$. Con ciò la (3.10) è dimostrata.

Proposizione (3.11).

Sullo spazio lineare C_1 gli insiemi $\lambda\overline{\Sigma}_1$, al variare di $\lambda > 0$, formano un sistema fondamentale d'intorni di 0 per una topologia ϑ_1 di spazio *normato*; detto D_1 lo spazio C_1 munito di essa, si ha $\overline{C}_1 \subset D_1 \subset D_2$, in senso algebrico e topologico.

Dimostrazione.

Gli insiemi $\lambda\overline{\Sigma}_1 (\lambda > 0)$ formano una base di filtro, e sono simmetrici, stellati, convessi, e assorbenti in C_1 (perchè tale è $\overline{\Sigma}_1$, come abbiamo visto in (3.7)); quindi costituiscono un sistema fondamentale d'intorni per una topologia ϑ_1 localmente convessa. Diciamo D_1 lo spazio lineare C_1 munito di tale topologia.

In senso algebrico, è $C_1 = D_1 \subset D_2$; $\overline{\Sigma}_1$ è un intorno di 0 per $\bar{\tau}_1$, quindi $\bar{\tau}_1$ è più fine di ϑ_1; $\overline{\Sigma}_1 \subset \Sigma_2$, quindi ϑ_1 è più fine della topologia subordinata da ϑ_2; dunque si ha $\overline{C}_1 \subset D_1 \subset D_2$, in senso algebrico e topologico.

D_1 è separato (perchè lo è D_2), ed ha un intorno di 0 limitato: $\overline{\Sigma}_1$; allora la sua topologia può essere definita da una norma (vedi [1], cap. III, § 2, n. 1).

Proposizione (3.12).

La terna (A', D_1, B') è coerente con (A, C, B).
Infatti da $\overline{C}_1 \subset D_1 \subset D_2$ segue $\overline{C}_1 \subset D_1 \subset C_2$.

Proposizione (3.13).

La terna (A', D_1, B') è coerente con sè stessa.

Dimostrazione.

Come spazio lineare, D_1 coincide con C_1; perciò $\forall g \in \mathcal{G}'_1$, si ha $g(D_1) \subset D_1$ (vedi teorema (2.3)). Posto $\tilde{g} = g|_{D_1}$, per dimostrare che $\tilde{g}$ è continua basta provare che $g(\overline{\Sigma}_1) \subset \overline{\Sigma}_1$.

$\overline{\Sigma}_1$ è l'inviluppo convesso simmetrico stellato di $k \bigcup_{f \in \mathcal{F}_1} f(\Sigma_c)$ $(k > 0)$. Consideriamo l'insieme

$$g\{\bigcup_{f \in \mathcal{F}_1} f(\Sigma_c)\} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}_1} gf(\Sigma_c) \;;$$

si vede facilmente che, $\forall f \in \mathcal{F}_1$, anche $gf \in \mathcal{F}_1$: al variare di f in $\mathcal{F}_1$, gf varia in un insieme contenuto in $\mathcal{F}_1$; quindi si ha

$$\bigcup_{f \in \mathcal{F}_1} gf(\Sigma_c) \subset \bigcup_{f \in \mathcal{F}_1} f(\Sigma_c),$$

ossia

$$g\{\bigcup_{f \in \mathcal{F}_1} f(\Sigma_c)\} \subset \bigcup_{f \in \mathcal{F}_1} f(\Sigma_c).$$

Da questa segue $g(\overline{\Sigma}_1) \subset \overline{\Sigma}_1$, per la linearità di g.

(3.14). Munito D_1 d'una norma che definisca la topologia ϑ_1, sia $\widehat{D}_1$ lo spazio completato: è uno spazio di Banach. Per la (1.6), anche la terna $(A', \widehat{D}_1, B')$ è coerente con sè stessa e con (A, C, B).

Proposizione (3.15).

$\widehat{D}_1$ è il minimo spazio di Banach che contenga $\overline{C}_1$, quindi il minimo spazio di Banach che renda la nuova terna coerente con (A, C, B).

Dapprima dimostriamo che non può esservi uno spazio di Banach contenente $\overline{C}_1$, contenuto in $\widehat{D}_1$, e diverso da $\widehat{D}_1$.

Sia F uno spazio di Banach contenente $\overline{C}_1$ e contenuto in $\widehat{D}_1$: allora F soddisfa alle (2.1.3), e la terna (A', F, B') è coerente con (A, C, B). Dal teorema (1.8) si ricava che l'insieme $\{\tilde{f} : f \in \mathcal{F}_1\}$ è limitato in $\mathcal{L}(C, F)$; perciò è limitato in F l'insieme $\bigcup_{f \in \mathcal{F}_1} \tilde{f}(\Sigma_c)$ (vedi [1], cap. III, § 3, n. 4). Quindi, preso un intorno V di 0 in F, e supposto che V sia simmetrico, stellato e convesso, esiste $\lambda > 0$ tale che sia $\lambda \overline{\Sigma}_1 \subset V$: ciò implica che D_1 è contenuto in F, con inclusione continua. Allora è anche $\widehat{D}_1 \subset F$ (perchè F è completo): dunque $F = \widehat{D}_1$ (coincidono come spazi lineari, ed hanno topologie equivalenti).

Perciò $\widehat{D}_1$ è un elemento minimale nell'insieme, parzialmente ordinato per inclusione continua, degli spazi di Banach contenenti $\overline{C}_1$. Dimostriamo che esso è proprio il minimo. Sia G uno spazio di Banach contenente $\overline{C}_1$; sia H lo spazio lineare $\widehat{D}_1 \cap G$, munito della norma $\| u \|_H = \| u \|_{\widehat{D}_1} + \| u \|_G$. Con ciò H è uno spazio di Banach, contenuto in $\widehat{D}_1$ ed in G. Come spazio lineare, C_1 è contenuto in H; proviamo che la inclusione è continua.

Sia T un intorno di 0 in H:

$$T = \{u : u \in H , \| u \|_{\widehat{D}_1} + \| u \|_G\} \leqslant \varepsilon ;$$

preso in $\widehat{D}_1$ l'intorno $V = \{u : \| u \|_{\widehat{D}_1} \leqslant \varepsilon/2\}$ ed in G l'intorno $W = \{u : \| u \|_G \leqslant \varepsilon/2\}$, esiste in $\overline{C}_1$ un intorno Z tale che sia $Z \subset V$ e $Z \subset W$ (per ipotesi). Per ogni $u \in Z$ si ha $\| u \|_H \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2$, quindi $Z \subset T$. Allora H è compreso tra $\overline{C}_1$ e $\widehat{D}_1$, quindi $H = \widehat{D}_1$, da cui segue $\widehat{D}_1 \subset G$, con inclusione continua.

* * *

Nella costruzione della teoria esposta fin qui si sono presentate molte questioni che sono rimaste finora insolute.

Segnaliamone alcune.

Sappiamo che ogni spazio compreso tra $\overline{C}_1$ e C_2 rende la nuova terna coerente con quella data, ma non sappiamo se ogni spazio compreso tra $\overline{C}_1$ e C_2 sia interpolatore tra A' e B', o no.

Non sappiamo se gli spazi interpolatori tra due spazi dati formino una catena, rispetto all'inclusione, o no.

Abbiamo visto che D_1, come spazio lineare, coincide con C_1; non sappiamo se D_2, come spazio lineare, coincida con C_2, o no.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bourbaki N.: *Espaces Vectoriels Topologiques*. Paris, Hermann, (1953 e 1955).

[2] Gagliardo E.: *Interpolazione di spazi di Banach e applicazioni*. Univ. di Genova, Pubbl. dell'Istituto di Matematica, (1960).

[3] Gagliardo E.: *Una struttura unitaria in diverse famiglie di spazi funzionali* (Parte I). Univ. di Genova, Pubbl. dell'Istituto di Matematica, (1962).