RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MICHEL MÉTIVIER

Génération de mesures dans un σ-anneau pseudo-topologique

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 34 (1964), p. 242-304

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1964__34__242_0>

GENERATION DE MESURES DANS UN σ-ANNEAU PSEUDO-TOPOLOGIQUE

Memoria *) *di* MICHEL METIVIER (*à Rennes*)

Introduction.

Le but du travail qui suit est d'étudier un schéma de génération de mesures à partir d'une classe très générale de fonctions d'ensembles ou de somas appelées étendues (Cf. II – 1 ci-après). Ce problème contient comme cas particulier un problème de prolongement de fonction d'ensembles en une mesure, problème déja fort étudié et au sujet duquel nous ne pouvons prétendre présenter des résultats surprenants. Les théorèmes d'extension d'une fonction additive en une mesure sont légion et, à plusieurs égards, nos théorèmes fondamentaux rendent seulement leur unité à un certain nombre de résultats disparates, comme l'attestent les chapitres III et IV consacrés aux applications.

Notons toutefois que dans [13] nous avons obtenu et utilisé pour l'étude de la convergence de martingales à valeurs dans un cône de mesures positives un théorème de génération ([13] théorème 1-4-7) qui est un cas particulier de nos deux théorèmes fondamentaux ici présentés (Théorèmes II-8-6 et II-9-2).

Signalons également que les résultats principaux de ce travail ont été publiés sans démonstration dans [12].

---

*) Pervenuta in Redazione il 12 dicembre 1963.
Indirizzo dell'A.: Institut de Mathématiques – Faculteé des Sciences – Rennes – Francia.

* * *

Les caractéristiques essentielles de la situation étudiée sont les suivantes:

a) Le cadre utilisé est essentiellement pseudo-topologique (voir la définition en 1-2): d'une part, comme le prouvent les exemples 1-2-3 et l'application III-4, les différentes pseudo-topologies que l'on peut définir à partir d'une topologie donnée se prêtent à un maniement très souple. D'autre part, dans le cadre abstrait, il arrive souvent que l'on utilise implicitement des pseudo-topologies très simples (Cf. IV-3 et IV-4. Voir aussi [7]). Le cadre pseudo-topologique permet ainsi dans de nombreux cas de réaliser une synthèse de résultats issus du cadre topologique et de résultats issus du cadre abstrait [1]).

b) La fonction d'ensembles ou de somas (étendue) destinée à engendrer une mesure est définie sur un ensemble de somas muni d'une structure algébrique pauvre (stabilité pour l'union finie, alors que les hypothèses usuelles postulent en général une structure de treillis, ou même de treillis booléen).

c) Diverses hypothèses de régularité ou continuité sont introduites séparément de facon à étudier leurs implications diverses quant à l'existence, l'unicité et la régularité des mesures engendrées.

Les moyen utilisés sont essentiellement des méthodes standart en théorie de la mesure, et des théorèmes d'extensions issus de [5[et adaptés au cadre pseudo-topologique.

* * *

Le plan est le suivant:

Le chapitre I précise les notations utilisées, donne les définitions relatives aux pseudo-toplogies et réexpose dans notre cadre les résultats de [5] qui seront utilisés dans la suite. Une hypothèse essentielle dans [5], celle de richesse est affaiblie

---

[1]) Il convient toutefois de noter que les théorèmes d'extension de [2], [3] et [15] ne semblent pas pouvoir s'insérer dans notre cadre.

systématiquement en étant remplacée par une notion de λ-richesse relative à une fonction λ donnée. Il en résulte quelques modifications dans les énoncés, et les aménagements necessaires aux démonstrations de [5] sont données dans I-3. Enfin I-4 précise une hypothèse dont le rôle sera d'assurer la σ-additivité des mesures engendrées.

Le chapitre II, après avoir donné les définitions relatives à la fonction de somas (étendue, resp. σ-étendue) avec laquelle on se propose d'engendrer un contenu (resp. une mesure) met en évidence le rôle joué par les différentes hypothèses, rôle qui peut se résumer essentiellement comme suit:

a) Toute étendue (resp. σ-étendue) permet d'engendrer un contenu (resp. une mesure) (Proposition II-3-3).

b) L'hypothèse de *-régularité (définition 1-4) a pour effet d'assurer la régularité de la mesure ou du contenu obtenu vis à vis de la pseudo-topologie (résultats 6-1, 7-3, 8-6-*a*).

c) Les hypothèses de continuité (définitions 1-2 et 1-5) permettent d'affirmer que la mesure engendrée est un prolongement (résultat 8-6-*b*).

d) L'hypothèse de densité (définition en I-2-5-*c*) assure l'unicité du prolongement obtenu (résultat 8-6-*c*).

Dans II-9 des conditions suffisantes pour qu'une étendue soit une σ-étendue sont recherchées. Le rôle d'une condition (condition [Ω]) introduite dans [5] y est souligné.

Il convient de noter que, lorsque la mesure engendrée à partir d'une étendue λ est une extension de λ, le domaine de cette extension est en général beaucoup plus vaste que le σ-anneau booléen engendré par le domaine de λ (domaine de l'extension minimale de λ). Dans le paragraphe II-10 on se restreint à cette extension minimale et on montre qu'elle est toujours unique, indépendamment de toute hypothèse pseudotopologique.

Dans le § II-11, il est procédé à une « localisation » des théorèmes de prolongement précédents.

Le Chapitre III donne des applications des théorèmes fondamentaux II-8-6, II-9-2 et II-9-3 à la généralisation des résultats de [1], [8] et [9] au cas d'espaces topologiques quelconques, en mettant en évidence le rôle joué par les axiomes de séparation.

Le chapitre IV donne des applications dans le cadre abstrait.

Les définitions étant assez nombreuses, un index situé en fin d'article permettra de les retrouver aisément dans le texte en cas de besoin.

* * *

Nous nous devons, pour terminer, de remercier vivement Monsieur le Professeur Christian Pauc, qui a été à l'origine de nombreuses et très importantes modifications apportées en amélioration du manuscrit original.

CHAP. I

PSEUDO-TOPOLOGIES · FONCTIONS CROISSANTES · CAPACITES

1. Cadre de l'étude.

$\mathfrak{R}$ désignera dans tout ce qui suit un σ-treillis booléen, de plus petit élément $\varnothing$, avec ou sans unité. Si cet élément unité existe il sera désigné par U. Les éléments de $\mathfrak{R}$ sont appelés somas.

La relation d'ordre dans $\mathfrak{R}$ est notée $<$. Les opérations sup. et inf. dans $\mathfrak{R}$ sont notées $\vee$ et $\wedge$ et appelées respectivement réunion et intersection.

$\mathcal{C}$ étant une partie de $\mathfrak{R}$, l'idéal engendré par $\mathcal{C}$ dans $\mathfrak{R}$ sera noté $\overline{\mathcal{C}}$, sauf mention expresse du contraire.

Le complémentaire relatif d'un soma A par rapport à un soma B sera noté $B - A$ si $B > A$ et seulement dans ce cas. Lorsque $\mathfrak{R}$ possède une unité U on notera $\complement A$, le soma $U - A$.

Si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathfrak{R}$, on désignera par $\mathcal{A}_s$, $\mathcal{A}_d$, $\mathcal{A}_\sigma$, et $\mathcal{A}_\delta$, l'ensemble des réunions finies (resp. intersections finies, resp. unions dénombrables, resp. intersections dénombrables) d'éléments de $\mathcal{A}$.

2. Pseudo-topologie sur $\mathfrak{R}$.

2.1 DÉFINITION.

$\mathcal{O}$ et $\mathcal{F}$ étant deux parties de $\mathfrak{R}$, on dira que le couple $(\mathcal{O}, \mathcal{F})$ définit une pseudo-topologie lorsqu'il satisfait aux axiomes suivants:

(PT_1) $\mathcal{O}$ est un sous- σ -treillis de $\mathfrak{R}$ et $\mathcal{F}$ est un sous δ -treillis de $\mathfrak{R}$.

(PT_2) *Quel que soit* $(0, F) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}$, *on a*:

$$0 - 0 \wedge F \in \mathcal{O} \quad et \quad F - F \wedge 0 \in \mathcal{F}$$

(PT_3) *Quel que soit* $X \in \mathfrak{R}$, *il existe* $0 \in \mathcal{O}$ *tel que* $X < 0$.

Les éléments de $\mathcal{O}$ sont appelés *pseudo-ouverts* et les éléments de $\mathcal{F}$ *pseudo-fermés*. Lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre, nous supprimerons le préfixe pseudo, quitte à le rétablir lorsque seront en présence une topologie et une pseudo-topologie conduisant à des notions distinctes de fermés (pseudo-fermés), ouverts (pseudo-ouverts) etc...

2.2 Remarques.

2-2-*a* Il résulte de (PT_2) et (PT_3) que $\varnothing \in \mathcal{O}$ et $\varnothing \in \mathcal{F}$.

2-2-*b* Lorsque $\mathfrak{R}$ contient une unité U, une pseudo-topologie au sens de Nikodym (cf. [14]). est une pseudo-topologie au sens ci-dessus.La pseudo-topologie est alors entièrement définie par la donnée des pseudo-ouverts. Il n'en est pas de même dans e cas général.

2-3 Exemples usuels de pseudo-topologies.

2-3-*a* $\mathfrak{R}$ estl'ensemble des parties d'un espace topologique U. Les ouverts et les fermés de la topologie de U définissent évidemment une pseudo-topologie.

2-3-*b* $\mathfrak{R}$ est l'ensemble des parties d'un espace topologique U. On prend pour $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts qui sont des F_σ, $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fermés qui sont des G_δ. Alors $\mathcal{O}$ et $\mathcal{F}$ définissent une pseudo-topologie de Nikodym.

2-3-*c* $\mathcal{Q}$ désignant l'ensemble des quasi-compacts fermés d'un espace topologique T, on prend pour $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts de T inclus dans un élément de $\mathcal{Q}_\sigma$, et pour $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés inclus dans un élément de $\mathcal{O}$, $\mathfrak{R}$ étant alors l'ensemble des parties de T incluses dans un élément de $\mathcal{O}$.

2-3-*d* $\mathcal{Q}$ désignant l'ensemble des quasi-compacts fermés d'un espace topologique T, $\mathcal{O}$ est l'ensemble des ouverts qui sont des éléments de $\mathcal{Q}_\sigma$, $\mathfrak{R}$ est l'ensemble des parties de T incluses dans un élément de $\mathcal{O}$, et $\mathcal{F}$ est l'ensemble des quasi-compacts fermés inclus dans un élément de $\mathcal{O}$ et qui sont en outre des G_δ.

2-3-*e* T étant localement compact, $\mathfrak{R}$ est l'ensemble des parties de Baire au sens restreint (σ-treillis Booléen, engendré par les compacts qui sont des G_δ), $\mathcal{O}$ et $\mathcal{F}$ sont respectivement les ouverts et les fermés appartenant à $\mathfrak{R}$.

2-3-*f* $\mathfrak{R}$ est un σ-treillis booléen quelconque avec unité U, et $\mathcal{G}$ est une partie de $\mathfrak{R}$ contenant U. On peut prendre $\mathcal{O} = \mathcal{G}_{d\sigma}$, et $\mathcal{F}$ ensemble des complémentaires des éléments de $\mathcal{O}$.

2-3-*g* $\mathcal{U}$ est un σ-treillis booléen quelconque et $\mathcal{G}$ et $\mathcal{D}$ sont deux parties de $\mathcal{U}$ telles que $\mathcal{D} \subset \overline{(\mathcal{G}_\sigma)}$ et telles que quel que soit $(G, D) \in \mathcal{G} \times \mathcal{D}$ on ait $G - G \wedge D \in \mathcal{G}$ et $D - D \wedge G \in \mathcal{D}$. Soit $\mathfrak{R} = \overline{(\mathcal{G}_\sigma)}$. Les sous-ensembles $\mathcal{O}$ et $\mathcal{F}$ suivants de $\mathfrak{R}$ sont l'ensemble des ouverts et l'ensemble des fermés d'une pseudo-topologie sur $\mathfrak{R}$: $\mathcal{O} = \mathcal{G}_{\sigma d}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{D}_{s\delta}$ (voir la démonstration de cette propriété en III 4-1).

2.4 Classes compactes.

2-4-*a* Définition: *Un soma X est dit $\vee$-compact pour une pseudo-topologie donnée si tout recouvrement ouvert dénombrable de X contient un recouvrement fini.*

2-4-*b* Définition: *Un ensemble $\mathcal{C}$ de somas sera dit une classe $\wedge$-compacte si tout sous-ensemble-dénombrable de $\mathcal{C}$ dont l'intersection est $\varnothing$, contient un sous-ensemble fini dont l'intersection est $\varnothing$.* ([f. [11]).

2-4*c* Lemme: *La trace sur un $\vee$-compact de tout ensemble de fermés est une classe $\wedge$-compacte.*

2-4-*d* Lemme: *Si $\mathcal{C}$ est une classe $\wedge$-compacte telle que:*

$$\left.\begin{array}{c} 0 \in \mathcal{O} \\ C \in \mathcal{C} \end{array}\right\} \Rightarrow C - C \wedge 0 \in \mathcal{C}_\delta .$$

Tout $C \in \mathcal{C}$ est un $\vee$-compact.

2-4-*e* Lemme: *Si $\mathcal{C}$ est un ensemble de $\vee$-compacts fermés, $\overline{\mathcal{C}} \cap \mathcal{F}$ est un ensemble de $\vee$-compacts fermés.*

En effet tout élément de $\overline{\mathcal{C}} \cap \mathcal{F}$ est de la forme $C' \wedge F$ avec

$C' \in \mathcal{C}_s$ et $F \in \mathcal{F}$; C' est trivialement un $\vee$-compact. Soit $0 \in \mathcal{O}$ tel que $C' < 0$. Pour voir que $C' \wedge F$ est un $\vee$-compact, il suffit d'associer à tout recouvrement ouvert $\{0_n\}$ de $C' \wedge F$, le recouvrement ouvert $\{(0 - C' \wedge F)\} \cup \{0_n\}$ de C' et d'utiliser la $\vee$-compacité de C'.

2.5 Continuité d'une fonction définie dans $\mathfrak{R}$.

Nous utiliserons les trois définitions suivantes:

2-5-*a* Nous dirons qu'une fonction φ, définie sur $\mathcal{E} \subset \mathfrak{R}$, à valeurs dans $\overline{R}$ (droite numérique achevée) est *continue à droite*, si, quel que soit $A \in \mathcal{E}$ et quel que soit le voisinage V de $\varphi(A)$ il existe $0 \in \mathcal{O}$ tel que pour tout $A' \in \mathcal{E}$, vérifiant $A < A' < 0$ on ait $\varphi(A') \in V$.

2-5-*b* $\mathcal{C}$ étant un sous-ensemble de $\mathcal{F}$, nous dirons qu'une fonction φ, définie sur $\mathcal{E} \subset \mathfrak{R}$ à valeurs dans $\overline{R}$ est $\mathcal{C}$-*continue* si, quel que soit $A \in \mathcal{E}$ et quel que soit le voisinage V de $\varphi(A)$, il existe $(C, 0) \in \mathcal{C} \times \mathcal{O}$ tel que $C < A < 0$ et tel que pour tout $A' \in \mathcal{E}$ vérifiant $C < A' < 0$ on ait $\varphi(A') \in V$.

2-5-*c* $\mathcal{C}$ étant un sous-ensemble de $\mathcal{F}$, $\mathcal{E} \subset \mathfrak{R}$ *sera dit* $\mathcal{C}$-*dense dans* $\mathfrak{R}$ si quel que soit $(C, 0) \in \mathcal{C} \times \mathcal{O}$ tel que $C < 0$ il existe $A \in \mathcal{E}$ vérifiant $C < A < 0$.

2.6 Pseudo-topologie induite.

Soit $N \in \mathfrak{R}$, on appelle *pseudo-topologie induite sur* $\{\overline{N}\}$ par la pseudo-topologie de $\mathfrak{R}$, la pseudo-topologie sur $\{\overline{N}\}$ (idéal et sous σ-treillis booléen d'unité N de $\mathfrak{R}$) définie par les familles $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{F}'$ suivantes d'ouverts $\mathcal{O}' = \{N \wedge 0\}_{0 \in \mathcal{O}}$ et de fermés $\mathcal{F}' = \{N \wedge F\}_{F \in \mathcal{F}}$.

3. Extension au cadre pseudo-topologique de résultats de [14].

3.1 Définitions.

3-1-*a* Nous appellerons *capacité sur* $\mathcal{E} \subset \mathfrak{R}$, toute fonction définie sur $\mathcal{E}$, à valeurs dans $\overline{R}$, croissante et continue à droite.

3-1-*b* φ étant une fonction croissante sur $\mathcal{E}$ (resp. une capacité sur $\mathcal{E}$) on appellera *fonction intérieure* (resp. *capacité intérieure*) la fonction φ^* définie sur $\mathcal{R}$ par $\varphi^*(X) = \sup\{\varphi(A);\ A \subset \mathcal{E},\ A < X\}$, et on appellera *fonction extérieure* (resp. *capacité extérieure*) la fonction φ^* définie sur $\mathcal{R}$ par:

$$\varphi^*(X) = \inf\{\varphi^*(0);\ 0 \in \mathcal{O},\ X < 0\}.$$

3-1-*c* φ étant une capacité sur $\mathcal{E}$, un soma $X \in \mathcal{R}$ sera dit capacitable si $\varphi_*(X) = \varphi^*(X)$.

3.2 Proposition.

Si φ est une capacité sur $\mathcal{E}$, tout $0 \in \mathcal{O}$ est capacitable.

Si $\mathcal{E}$ est stable pour $\vee$, tout $A \in \mathcal{E}$ est capacitable.

La démonstration de cette proposition se transpose immédiatement de celle de [5] p. 175.

3.3 Classes de fonctions croissantes.

Les classes de fonction croissantes, définies dans [15] p. 175-176 sont définies indépendamment de toute considération topologique et sont donc directement utilisables dans notre cadre. Nous rappellerons toutefois deux définitions qui nous seront utiles par la suite.

3-3-*a* Lorsque $\mathcal{E}$ est stable pour $\vee$, on appelle *fonction alternée d'ordre* $\mathcal{A}_{1,0}$ sur $\mathcal{E}$, toute fonction φ croissante sur $\mathcal{E}$ satisfaisant à la condition suivante (que nous désignerons dans toute la suite par $[\alpha]$):

$[\alpha]$ *Pour toute suite croissante (X_n) de somas de $\mathcal{R}$, on a* $\lim\limits_n \varphi^*(X_n) = \varphi^*(\bigvee\limits_n X_n)$.

3-3-*b*. Lorsque $\mathcal{E}$ est stable pour $\vee$, une fonction croissante φ sur $\mathcal{E}$ est dite alternée d'ordre $\mathcal{A}_{1,b}$, si elle vérifie l'axiome suivant (que nous désignerons dans toute la suite par $[\beta]$):

$[\beta]$ *Quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$, tel que les conditions $A_1 \in \mathcal{E}$, $A_2 \in \mathcal{E}$, $E \in \mathcal{E}$ et $\varphi(A_2) - \varphi(A_1) \leqslant \eta$* impliquent:

$$\varphi(A_2 \vee E) - \varphi(A_1 \vee E) \leqslant \varepsilon.$$

Le résultat suivant qui présente un intérêt pour la validité de résultats utiles dans la suite n'est pas énoncé dans [5].

3-3-c Proposition: *Si φ est une fonction croissante sur $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ étant stable pour $\vee$, et si φ vérifie [β], on a la propriété suivante:*

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il est possible de déterminer une suite dénombrable (η_n) de nombres > 0 telle que l'on ait l'implication:

$$\left.\begin{array}{lll} (A_i, A_i') \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \textit{quel que soit} & i = 1 \ldots \\ A_i < A_i' & \textit{quel que soit} & i = 1 \ldots \\ \varphi(A_i') - \varphi(A_i) < \eta_i & \textit{quel que soit} & i = 1 \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(\bigvee_{i=1}^{n} A_i') - \varphi(\bigvee_{i=1}^{n} A_i) < \varepsilon \quad \textit{quel que soit } n.$$

En effet, choisissons η_i de telle sorte que pour tout $(A, A', E) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ tel que $A < A'$ et $\varphi(A') - \varphi(A) < \eta_i$ on ait $\varphi(A' \vee E) - \varphi(A \vee E) < \frac{\varepsilon}{2^i}$ et $\eta_i < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Considérons une suite $((A_i, A_i'))_i$ telle que $(A_i, A_i') \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ $A_i < A_i'$ et $\varphi(A_i') - \varphi(A_i) < \eta_i$. Nous allons montrer que, quel que soit n:

$$\varphi(\bigvee_{i=1}^{n} A_i') - \varphi(\bigvee_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^n} \leqslant \varepsilon,$$

et

$$\varphi\left[(\bigvee_{i=1}^{n} A_i') \vee E\right] - \varphi\left[(\bigvee_{i=1}^{n} A_i) \vee E\right] \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^n},$$

quel que soit $E \in \mathcal{E}$.

Or ces deux inégalités sont vraies pour $n = 1$ par hypothèse. Le fait qu'elles soient vraies pour n quelconque résulte immédiatement des deux formules de récurrence:

$$\varphi(\bigvee_{i=1}^{n} A_i') - \varphi(\bigvee_{i=1}^{n} A_i) = \varphi\left[(\bigvee_{i=1}^{n-1} A_i') \vee A_n'\right] - \varphi\left[(\bigvee_{i=1}^{n-1} A_i') \vee A_n\right] + \\ + \varphi\left[(\bigvee_{i=1}^{n-1} A_i') \vee A_n\right] - \varphi\left[(\bigvee_{i=1}^{n-1} A_i) \vee A_n\right],$$

et

$$\varphi\left[(\bigvee_{i=1}^{n} A_i') \vee E\right] - \varphi\left[(\bigvee_{i=1}^{n} A_i) \vee E\right] = \varphi\left[(\bigvee_{i=1}^{n-1} A_i') \vee E \vee A_n'\right] - \\ - \varphi\left[(\bigvee_{i=1}^{n-1} A_i') \vee E \vee A_n\right] + \varphi\left[(\bigvee_{i=1}^{n-1} A_i') \vee E \vee A_n\right] - \varphi\left[(\bigvee_{i=1}^{n-1} A_i) \vee E \vee A_n\right].$$

3.4 Notion de richesse relative.

3-4-*a* La notion de richesse définie dans [5] s'exprime dans notre cadre de la façon suivante: un ensemble $\mathcal{E}$ est dit riche, si, quel que soit $A \in \mathcal{E}$ et quels que soient $0_1 \in \mathcal{O}$ et $0_2 \in \mathcal{O}$ tels que $A < 0_1 \vee 0_2$, il existe $A_1 \in \mathcal{E}$ et $A_2 \in \mathcal{E}$ tels que $A_1 < 0_1$, $A_2 < 0_2$ et $A < A_1 \vee A_2$.

Dans le cas où $\mathcal{O}$ et $\mathcal{F}$ sont les ouverts et les fermés d'une topologie séparée, le résultat suivant qui nous sera utile dans les applications est démontré: tout idéal dans $\mathcal{F}$ constitué par des compacts est riche ([5] p. 182).

Nous généraliserons un peu en la relativisant cette notion de richesse, de telle sorte que certains résultats de [5], utiles pour nous, soient conservés.

3-4-*b* Définition: *φ étant une fonction-croissante sur un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathfrak{R}$, stable pour $\vee$, $\mathcal{E}$ sera dit φ-riche si, quel que soit $(A, 0_1, 0_2) \in \mathcal{E} \times \mathcal{O} \times \mathcal{O}$ tel que $A < 0_1 \vee 0_2$, et quel que soit $\alpha < \varphi(A)$, il existe $(A_1, A_2) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ vérifiant $A_1 < 0_1$, $A_2 < 0_2$ et $\varphi(A_1 \vee A_2) \geqslant \alpha$.*

Dans [5], la propriété suivante qui résulte immédiatement de la définition de richesse est utilisée dans la démonstration du lemme 17.8 p. 183:

quel que soit $A \in \mathcal{E}$ et $\{0_i\}_{i=1\dots n}$, avec $0_i \in \mathcal{O}$ et $A < \bigvee_{i=1}^{n} 0_i$, il existe $\{A_i\}_{i=1\dots n}$, avec $A_i \in \mathcal{E}$ telle que $A_1 < 0_i$ et $A < \bigvee_{i=1}^{n} A_i$. Nous démontrons une propriété analogue pour la φ-richesse.

3-4-*c* Proposition: *Si φ est une fonction croissante alternée d'ordre $\mathcal{A}_{1,b}$ définie sur un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathfrak{R}$, stable pour $\vee$ et φ-riche, on a la propriété suivante: quel que soit $A \in \mathcal{E}$, quelle que soit la suite $(0_i)_{i=1\dots n}$ telle que $0_1 \in \mathcal{O}$ et $A < \bigvee_{i=1}^{n} 0_i$ et quel que soit $\alpha < \varphi(A)$, il existe n somas $A_i \in \mathcal{E}$ tels que $A_i < 0_i$ pour tout $i = 1 \dots, n$, et $\varphi(\bigvee_{i=1}^{n} A_i) \geqslant \alpha$.*

DÉMONSTRATION: La propriété est vraie par hypothèse pour $n = 2$ (hypothèse $\mathcal{E}$ est φ-riche). Nous la démontrons par récurrence pour n quelconque.

Soient $0'_i = 0_i$ pour $i = 1, \ldots, n-2$ et $0'_{n-1} = 0_{n-1} \vee 0_n$. On peut par hypothèse déterminer $A_1 \ldots A'_{n-1}$ tels que $A_i < 0'_i$ et $\varphi(\bigvee_{i=1}^{n-1} A_1) \geqslant \alpha + \varepsilon$, ε étant quelconque > 0 pourvu que $\alpha + + \varepsilon < \varphi(A)$.

1ER CAS: Si $\varphi(A'_{n-1}) = +\infty$ on peut déterminer A_{n-1} et A_n tels que $A_{n-1} < 0_{n-1}$, $A_n < 0_n$ et $\varphi(A_{n-1} \vee A_n) \geqslant \alpha$. La famille $A_1 \ldots A'_{n-2}$, A_{n-1}, A_n répond à la question puisque:

$$\varphi(A'_i \vee \ldots \vee A'_{n-2} \vee A_{n-1} \vee A_n) \geqslant \varphi(A_{n-1} \vee A_n) \geqslant \alpha .$$

2E CAS: Si $\varphi(A'_{n-1}) < +\infty$; $\eta > 0$ étant donné, on peut trouver $0''_{n-1} \in \mathcal{O}$ tel que $A'_{n-1} < 0''_{n-1}$ et $\varphi^*(0''_{n-1}) \leqslant \varphi(A'_{n-1}) + \eta/2$. On peut déterminer alors A_{n-1} et A_n tels que $A_{n-1} < 0''_{n-1} \vee 0_{n-1}$ $A_n < 0''_{n-1} \vee 0_n$ et $\varphi(A_{n-1} \vee A_n) \leqslant \varphi(A'_{n-1}) - \eta/2$; posons alors $A'_i = A_i$ pour $1 = 1 \ldots n-2$ et évaluons:

$$\Delta = \varphi(\bigvee_{i-1}^{n-1} A'_i) - \varphi(\bigvee_{i=1}^{n} A_i) = \varphi\left[A'_{n-1} \vee (\bigvee_{i=1}^{n-2} A'_i)\right] -$$
$$- \varphi\left[A_{n-1} \vee A_n \vee (\bigvee_{i=1}^{n-2} A'_i)\right] \leq \varphi\left[A'_{n-1} \vee A_{n-1} \vee A_n \vee (\bigvee_{i=1}^{n-2} A'_n)\right] -$$
$$- \varphi\left[A_{n-1} \vee A_n \vee (\bigvee_{i=1}^{n-2} A'_i)\right].$$

φ étant d'ordre $\mathcal{A}_{1,b}$ on peut déterminer η de telle sorte que l'inégalité:

$$\varphi(A'_{n-1} \vee A_{n-1} \vee A_n) - \varphi(A_{n-1} \vee A_n) \leqslant \eta/2,$$

entraîne $\Delta \leq \varepsilon$ quel qu'ait été le choix des $A_1 \ldots A'_{n-1}$ la propriété désirée résulte donc de la majoration:

$$\varphi(A'_{n-1} \vee A_{n-1} \vee A_n) - \varphi(A_{n-1} \vee A_n) \leqslant \varphi^*(0''_{n-1}) -$$
$$- \varphi(A'_{n-1}) + \eta/2 \leqslant \eta,$$

entraînant donc l'inégalité $\varphi(\bigvee_{i=1}^{n} A_i) \geqslant \alpha$ pour un choix convenable de η.

Compte tenu de la proposition 3-4-c et de la remarque qui précède, une transposition immédiate des résultats obtenus dans [5] p. 182 à 185 donne en particulier les résultats suivants utilisés dans la suite.

3.5 LEMME: *Soit φ une fonction croissante sur $\mathcal{E} \subset \mathfrak{R}$, $\mathcal{E}$ étant stable pour $\vee$, soit I un ensemble d'indices et soit ε un nombre positif donné. On suppose en outre qu'on a ou bien $I = \{1, 2\}$ ou bien la conjonction des deux hypothèses: I est fini quelconque et φ est alternée d'ordre $\mathcal{A}_{1,b}$.*

3-5-a Alors, quel que soit $(X_i) \in \mathfrak{R}^I$ tel que $\varphi^*(\bigvee_{i \in I} X_i) < +\infty$ il existe $(0_i) \in \mathcal{O}^I$ tel que $X_i < 0_i$ pour tout $i \in I$ et $\varphi^*(\bigvee 0_i) - \varphi^*(\bigvee_{i \in J} X_i) \leqslant \varepsilon$ quel que soit $J \subset I$.

3-5-b Si $\mathcal{E}$ est φ-riche, quel que soit $(0_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}^I$ tel que $\varphi^*(\bigvee_{i \in J} 0_i) < +\infty$ il existe $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{E}^I$ tel que: $0_i > A_i$ quel que soit $i \in I$ et $\varphi^*(\bigvee_{i \in J} 0_i) - \varphi^*(\bigvee_{i \in J} A_i) \leqslant \varepsilon$ quel que soit $J \subset I$.

3.6 LEMME: *Soit φ une fonction croissante sur $\mathcal{E} \subset \mathfrak{R}$, $\mathcal{E}$ étant stable pour $\vee$ et φ-riche.*

3-6-a Soit I un ensemble fini d'indices, $\mathfrak{J}$ un sous-ensemble de l'ensemble de ses parties, et $\Phi(\{x_J\})$ une fonction numérique finie et continue définie dans $R^{\mathfrak{J}}$ (R désignant la droite numérique). On suppose que pour tout $(A_i)_{i \in I} \in E^I$ tel que $\varphi(\bigvee_{i \in I} A_i) < +\infty$ on a $\Phi(\{x_J\}) \leqslant 0$, lorsque l'on pose pour tout $J \in \mathfrak{J}$: $x_J = \varphi(\bigvee_{i \in J} A_i)$. Dans ces conditions, si $I = \{1, 2\}$ ou si, I étant fini quelconque φ est de plus alternée d'ordre $\mathcal{A}_{1,b}$ on a la conclusion suivante:

Quel que soit $(X_i)_{i \in I} \in \mathfrak{R}^I$ tel que $\varphi^*(\bigvee_{i \in I} X_i) < +\infty$ les nombres $x_J = \varphi^*(\bigvee_{i \in J} X_i)$ définis pour tout $J \in \mathfrak{J}$ sont tels que $\Phi(\{x_J\}) \geqslant 0$.

3-6-b Si φ est alternée d'ordre $\mathcal{A}_{1,b}$ sur $\mathcal{E}$, φ^* est également d'ordre $\mathcal{A}_{1,b}$ sur $\mathfrak{R}$.

3.7 EXTENSION D'UNE CAPACITÉ.

Rappelons que dans [5] on appelle *extension à* $\mathcal{E}_2 \subset \mathfrak{R}$ d'une fonction f_1 définie sur $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$, la fonction f_2 définie sur $\mathcal{E}_2$ comme restriction à $\mathcal{E}_2$ de la fonction f_1^* définie sur $\mathfrak{R}$. Les théorèmes d'extension de [5] se transposent facilement. Nous utiliserons dans la suite la propriété suivante (cf. [5] p. 180).

PROPOSITION: *Si f_2 est l'extension à $\mathcal{E}_2$ d'une capacité f_1 définie sur $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$, la fonction croissante f_2 est une capacité sur $\mathcal{E}_2$, et si les éléments de $\mathcal{E}_2$ sont f_1-capacitables, il y a identité entre f_1-capacitabilité, et f_2-capacitabilité.*

3.8 RESTRICTION D'UNE CAPACITÉ.

Conformément à [5] p. 189, si $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$ et si φ_2 est une capacité sur $\mathcal{E}_2$, la restriction de φ_2 à $\mathcal{E}_1$ désignée par φ_1 est une capacité et nous avons la transposition suivante immédiate de [5] (20-1 p. 190):

Si $N \in \mathfrak{R}$ est tel que $N \vee 0$ est φ_2-capacitable quel que soit $0 \in \mathcal{O}$, et si $\mathcal{E}_1 = \{\overline{N}\} \cap \mathcal{E}_2$ alors $\varphi_{1*}(X)$ et $\varphi_{2*}(X)$ coincident ainsi que $\varphi_1^*(X)$ et $\varphi_2^*(X)$ pour tout $X \in \{\overline{N}\}$. (1)

4 – La condition $[\Omega]$.

4.1 Nous introduisons systématiquement au chap. II § 9, sous le nom de $[\Omega]$ une hypothèse utilisée dans [5] p. 218: une fonction croissante φ sur $\mathcal{E}$ sera dite posséder la propriété $[\Omega]$ si: pour toute suite croissante (0_n) d'ouverts on a:

$$\lim_n \varphi^*(0_n) = \varphi^*[\bigvee_n 0_n].$$

Compte tenu des propositions 3-3-*c* et 3-5-*b* il est facile de reprendre dans notre cadre la démonstration du théorème 28-1 de [5] p. 217, dans le cas où φ est alternée d'ordre $\mathcal{A}_{1,b}$. Nous exprimons ainsi la partie de ce théorème qui nous sera utile dans la suite:

(1) On rappelle (Cf. supra 2-6) que $\{\overline{N}\}$ désigne l'idéal des somas $X < N$.

4.2 THÉORÈME: *Toute fonction monotone croissante* φ *sur* $\mathfrak{R}$, *telle que pour tout* $X \in \mathfrak{R}$ *on ait* $\varphi(X) = \inf\{\varphi(0) : 0 > X, 0 \in \mathcal{O}\}$ *et vérifiant simultanément* $[\Omega]$ *et* $[\beta]$, *vérifie* $[\alpha]$ (Voir 3-3-*a* et 3-3-*b*).

5 – Contenus et mesures.

Dans tout ce qui suit, un contenu sera toujours une fonction positive additive définie sur un treillis booléen, et une mesure désignera toujours un contenu σ-additif défini sur un σ-treillis-booléen.

CHAP. II

GENERATION D'UN CONTENU OU D'UNE MESURE PAR UNE ETENDUE

Dans tout ce chap. II, $\mathcal{R}$ est supposé muni d'une pseudo-topologie $(\mathcal{O}, \mathcal{F})$.

1 – Définitions.

1.1 Soit $\mathcal{E}$ une partie de $\mathcal{R}$, stable pour $\vee$, telle que $\varnothing \in \mathcal{E}$. On dira que la fonction λ, définie sur $\mathcal{E}$, à valeurs dans $\overline{R}^+$ et croissante est une *étendue sur* $\mathcal{E}$ si les axiomes suivants sont vérifiés.

(E_1) $\mathcal{E}$ est λ-riche.

(E_2) λ est simplement sous-additive. Autrement dit, quel que soit $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ on a $\lambda(A \vee B) < \lambda(A) + \lambda(B)$.

(E_3) λ est simplement additive. Autrement dit, quel que soit $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ tel que $A \wedge B = \varnothing$ on a $\lambda(A \vee B) = \lambda(A) + \lambda(B)$.

1.2 Une étendue λ sur $\mathcal{E}$ sera dite étendue continue à droite, ou *étendue-capacité,* si λ est continue à droite pour la pseudo-topologie sur $\mathcal{R}$.

1.3 Une étendue λ sur $\mathcal{E}$ sera appelée *étendue régulière,* si $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ et si λ est continue à droite.

1.4 $\mathcal{K}$ étant une partie de $\mathcal{F}$, une étendue λ sur $\mathcal{E}$ sera dite $\mathcal{K}$ *-*-régulière* si elle satisfait aux deux axiomes suivants:

(R_1) Quel que soit $A \in \mathcal{E}$:

$$\lambda^*(A) = \sup \{\lambda^*(H);\ H < A,\ H \in \mathcal{K}\}.$$

(R_2) Pour tout couple $(H_1, H_2) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ et tel que $H_1 \wedge \wedge H_2 = \varnothing$ on a $\lambda^*(H_1 \vee H_2) = \lambda^*(H_1) + \lambda^*(H_2)$.

Une étendue λ sur $\mathcal{E}$ sera dite *-régulière s'il existe $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ tel que λ soit $\mathcal{K}$-*-régulière.

1.5 Une étendue λ sur $\mathcal{E}$ sera appelée *étendue* $\mathcal{C}$-*continue*, si la fonction λ sur $\mathcal{E}$ est $\mathcal{C}$-continue (cf. I, 2-5-*b*).

1.6 Une étendue λ sur $\mathcal{E}$ sera dite *σ-étendue* si elle vérifie l'axiome [α] (cf. I-3-3-*a*).

2 – Remarques.

2.1 Il résulte de (E_3) que toute étendue λ possède la propriété $\lambda(\varnothing) = \lambda(\varnothing) + \lambda(\varnothing)$ d'où $\lambda(\varnothing) = 0$ si λ n'est pas constante et égale à $+\infty$, cas sans intérêt que nous écarterons toujours.

2.2 Dans beaucoup d'applications l'hypothèse (E_1) est entraînée trivialement par l'une des deux hypothèses suivantes:

a) $\mathcal{E}$ est riche (par exemple $\mathcal{E}$ est une famille héréditaire de compacts d'un espace topologique. Cf. [14]).

b) $\mathcal{E}$ est $\mathcal{C}$ (cf. I-2-5-*c*), $\mathcal{C}$ étant une partie de $\mathcal{F}$, riche pour la pseudo-topologie envisagée, et λ est $\mathcal{C}$-continue. En effet soit $E \subset 0_1 \vee 0_2$, soit $\alpha < \lambda(E)$ et soit $\mathcal{C} \ni C < E$ de telle sorte que $A \in \mathcal{E}$ et $A > C$ impliquent $\lambda(A) > \alpha$. L'hypothèse de richesse sur $\mathcal{C}$ permet alors de trouver $C_1 \in \mathcal{C}$, $C_2 \in \mathcal{C}$ de telle sorte que $C_1 < 0_1$, $C_2 < 0_2$ et $C < C_1 \vee C_2$. En vertu de la $\mathcal{C}$-densité de $\mathcal{E}$, il existe $E_1 \in \mathcal{E}$ et $E_2 \in \mathcal{E}$ tels que $C_1 < E_1 < 0_1$ et $C_2 < E_2 < 0_2$. D'où $(E_1 \vee E_2) > C$ et par suite $\lambda(E_1 \vee E_2) > \alpha$.

Aux chapitres III et IV nous trouverons toutefois de nombreux exemples où la λ-richesse est impliquée par des hypothèses de types plus particuliers (qui masquent ainsi la parenté profonde de certains résultats).

2.3 Si λ est une étendue $\mathcal{C}$-continue sur $\mathcal{E}$ et si $\mathcal{E}$ est $\mathcal{C}$-dense dans $\mathcal{R}$ (voir définition en I-2-5-*c*), λ vérifie [R_1] (relativement à $\mathcal{C}$):

En effet, puisque $\lambda(A) = \lambda^*(A)$ (en vertu de I-3-2) et puisque λ^* est croissante, il suffit de voir qu'on a $\lambda(A) \leq \sup\{\lambda^*(C); C < A, C \in \mathcal{C}\}$ quel que soit $A \in \mathcal{E}$. Or, quel que soit l'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[\ni \lambda(A)$, on peut trouver $(C, 0) \in \mathcal{C} \times \mathcal{O}$ tel que $C < A < 0$ et $\lambda(A') \in]\alpha, \beta[$ pour tout $A' \in \mathcal{E}$ vérifiant $C < A' < 0$. En outre, quel que soit $G \in \mathcal{O}$ incluant C, il existe $E \in \mathcal{E}$ tel que $C < E < G$ ($\mathcal{E}$ est $\mathcal{C}$-donse dans $\mathcal{R}$), ce qui implique $\lambda^*(G) \geqslant \lambda(E) > \alpha$ pour tout ouvert $G > C$; donc:

$$\lambda^*(C) = \inf \{\lambda^*(G) : G \in \mathcal{O}, G > C\} \geqslant \alpha .$$

Comme α a été choisi arbitrairement $< \lambda(A)$ on a bien

$$\lambda(A) \leqslant \sup \{\lambda^*(C) : C < A, C \in \mathcal{E}\}.$$

2.4 On verra à 5 des conditions suffisantes de $*$-régularité incluant diverses hypothèses classiquement faites sur les fonctions additives et sous-additives destinées à engendrer des mesures.

3 – Fonction-contenu engendrée par une étendue.

3.1 On rappelle les définitions suivantes:

$\mathcal{J}$ étant un idéal dans $\mathcal{R}$, une *fonction-contenu sur* $\mathcal{J}$ est une fonction définie sur $\mathcal{J}$ à valeurs dans $\overline{R}^+$, nulle en $\varnothing$, croissante et simplement sous-additive.

Une *fonction-mesure* est une fonction-contenu dénombrablement sous-additive.

3.2 Un sous-ensemble $\mathcal{X}$ de $\mathcal{R}$ sera dit *normalement séparé* si, quels que soient $X_1 \in \mathcal{X}$, $X_2 \in \mathcal{X}$ avec $X_1 \wedge X_2 = \varnothing$, il existe $0_1 \in \mathcal{O}$, $0_2 \in \mathcal{O}$ tels que $0_1 \wedge 0_2 = \varnothing$, $X_1 < 0_1$, $X_2 < 0_2$.

3.3 PROPOSITION: *Soit λ une étendue sur $\mathcal{E}$:*

a) λ^* est une fonction-contenu sur $\mathcal{R}$.

b) La restriction de λ^* à toute partie normalement séparée de $\mathcal{R}$ est simplement additive.

c) Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, la restriction de λ^* à $\mathcal{E}$ (même si $\mathcal{E}$ n'est pas normalement séparée) est additive.

d) Si λ est une σ-étendue, λ^* est une fonction mesure sur $\mathcal{R}$, dont la restriction à toute partie normalement séparée de $\mathcal{R}$ est σ-additive.

DÉMONSTRATION: λ^* est trivialement monotone croissante et nulle en $\varnothing$.

a) Nous voulons démontrer que, quel que soit $(X_1, X_2) \in \in R \times \mathfrak{R}$ on a $\lambda^*(X_1 \vee X_2) \leqslant \lambda^*(X_1) + \lambda^*(X_2)$. Or cette inégalité est triviale si l'un des nombres $\lambda^*(X_1)$ ou $\lambda^*(X_2)$ est $+\infty$. Si, par ailleurs, nous pouvons démontrer que la finitude de $\lambda^*(X_1)$ et de $\lambda^*(X_2)$ entraîne celle de $\lambda^*(X_1 \vee X_2)$, il résultera du théorème I-3-6-*a* appliqué à la fonction $\Phi(\{U_J\}) = U_{\{1\}} + U_{\{2\}} - - U_{\{1\,2\}}$ que l'inégalité désirée est vraie dans tous tous les cas. Or, si $\lambda^*(X_1) < +\infty$ et $\lambda^*(X_2) < +\infty$ on peut trouver $0_1 \in \mathcal{O}$ et $0_2 \in \mathcal{O}$ tels que $X_1 < 0_1$, $X_2 < 0_2$, $\lambda^*(0_1) < +\infty$ et $\lambda^*(0_2) < +\infty$. Quel que soit $\nu < \lambda^*\ (0_1 \vee 0_2)$, il existe par définition $A \in \mathcal{E}$ tel que $\lambda(A) > \nu$ et, en vertu de la λ-richesse de $\mathcal{E}$, il existe $(A_1, A_2) \in \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ tel que $A_1 < 0_1$, $A_2 < 0_2$ et $\lambda(A_1 \vee A_2) > \nu$. On a donc:

$$\lambda^*(0_1) + \lambda^*(0_2) \geqslant \lambda(A_1) + \lambda(A_2) \geqslant \lambda(A_1 \vee A_2) > \nu .$$

Comme ν est quelconque $< \lambda^*(0_1 \vee 0_2)$ on a la majoration:

$$\lambda^*(X_1 \vee X_2) \leqslant \lambda^*(0_1 \vee 0_2) \leqslant \lambda^*(0_1) + \lambda^*(0_2) < +\infty ,$$

entraînant la finitude de $\lambda^*(X_1 \vee X_2)$; l'application du lemme I-3-6-*a* achève cette démonstration.

b) Soit $\mathcal{K}$ une partie normalement séparée de $\mathfrak{R}$, soient $X_1 \in \mathfrak{X}$, $X_2 \in \mathfrak{X}$ et $X_1 \wedge X_2 = \varnothing$.

Si $\lambda^*(X_1 \vee X_2) = +\infty$ l'inégalité $\lambda^*(X_1 \vee X_2) \geqslant \lambda^*(X_1) + + \lambda^*(X_2)$ est évidente.

Supposons donc que $\lambda^*(X_1 \vee X_2) < +\infty$.

D'après ([14]; 17-7) (voir aussi I-3-5), on peut trouver $(0'_1, 0'_2) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}$ tel que:

$$0'_i > X_i , \quad i = 1,\ 2$$

et

$$\lambda^*(\bigvee_{i \in J} 0'_i) - \lambda^*(\bigvee_{i \in J} X_i) < \varepsilon$$

quelle que soit $J \subset \{1, 2\}$.

Par hypothèse X_1 et X_2 étant disjoints et $\mathfrak{X}$ étant normalement séparé il existe $(0_1, 0_2) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}$ tel que:

$$0_i > X_i , \quad i = 1,\ 2$$

et

$$0_1 \wedge 0_2 = \varnothing .$$

Si nous posons $0''_i = 0_i \wedge 0'_i$, $i \in \{1, 2\}$ nous avons à fortiori:

$$\begin{cases} 0''_i > X_i, \quad i = 1, 2 \quad \text{et} \\ \lambda^*(\bigvee_{i\in J} 0''_i) - \lambda^*(\bigvee_{i\in J} X_i) < \varepsilon \quad \text{quelle que soit } J \subset \{1, 2\} \\ 0''_1 \wedge 0''_2 = \varnothing\,. \end{cases}$$

$\mathcal{E}$ étant riche par rapport à λ et λ $(0''_1 \vee 0''_2)$ fini, d'après I-3-5-*b*, on peut trouver $A_i \in \mathcal{E}$, $A_i < 0''_i$ tels que:

$$\begin{cases} 0''_i > A_i, \quad i = 1, 2 \\ \lambda^*(\bigvee_{i\in J} 0''_i) - \lambda(\bigvee_{i\in J} A_i) < \varepsilon \quad \text{quel que soit } J \subset \{1, 2\}. \end{cases}$$

Les A_1 étant disjoints, l'inégalité

$$\lambda(A_1 \vee A_2) \geqslant \lambda(A_1) + \lambda(A_2) \quad \text{est vraie,}$$

et ε étant arbitraire, on en déduit

$$\lambda^*(X_1 \vee X_2) \geqslant \lambda^*(X_1) + \lambda^*(X_2)\,.$$

D'où finalement (en vertu de la sous-additivité de λ^*):

$$\lambda^*(X_1 \vee X_2) = \lambda^*(X_1) + \lambda^*(X_2)\,.$$

c) Soit $(A_1, A_2) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ avec $A_1 \wedge A_2 = \varnothing$.

Si l'on se donne $\varepsilon > 0$ de facon quelconque, on peut trouver $G \in \mathcal{O}$ tel que $G > A_1 \vee A_2$ et $\lambda^*(G) \leqslant \lambda^*(A_1 \vee A_2) + \varepsilon$.

Comme $G - A_1 \in \mathcal{O}$ on peut trouver $B_2 \in \mathcal{E}$ tel que $B_2 < < G - A_1$ et $\lambda(B_2) \geqslant \lambda^*(G - A_1) - \varepsilon$. Comme $G - B_2 \in \mathcal{O}$, on peut trouver $B_1 \in \mathcal{E}$ tel que $B_1 < G - B_2$ et $\lambda(B_1) \geqslant \lambda^*(G - B_2) - - \varepsilon$. On a alors:

$$B_1 \wedge B_2 = \varnothing\,, \quad G - A_1 > A_2, \quad (G - B_2) > A_1\,.$$

D'où en vertu de E_3 et de la monotonie de λ^*:

$$\begin{aligned} \lambda^*(G) &\geqslant \lambda^*(B_1 \vee B_2) \geqslant \lambda(B_1 \vee B_2) = \lambda(B_1) + \lambda(B_2) \\ &\geqslant \lambda^*(G - B_2) + \lambda^*(G - A_1) - 2\varepsilon \\ &\geqslant \lambda^*(A_1) + \lambda^*(A_2) - 2\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Il résulte du choix de G:

$$\lambda^*(A_1 \vee A_2) \geqslant \lambda^*(A_1) + \lambda^*(A_2) - 3\varepsilon\,.$$

Le caractère arbitraire de ε et la sous-additivité de λ^* entraînent alors l'égalité cherchée: $\lambda^*(A_1 \vee A_2) = \lambda^*(A_1) + \lambda^*(A_2)$.

d) Lorsque λ est une σ-étendue, la sous-additivité dénombrable et l'additivité dénombrable sur toute partie normalement séparée de $\mathfrak{R}$, résultent immédiatement de *a*) et du fait que pour toute suite croissante $(A_n)_n$ extraite de $\mathfrak{R}$ on a:

$$\lim_n \lambda^*(A_n) = \lambda^* [\bigvee_n A_n] \qquad \text{(axiome } [\alpha]).$$

3.4 Corollaire: *Si λ est une étendue* (*resp. σ-étendue*) *λ^* est additive* (*resp. σ-additive*) *sur $\mathfrak{O}$.*

En effet $\mathfrak{O}$ est trivialement normalement séparé.

3.5 Remarque: Les résultats II-3-3-*a* (resp. II-3-3-*d*) sont valables encore si λ satisfait à toutes les hypothèses d'une étendue (resp. σ-étendue) sauf l'hypothèse (E_3).

On peut donc engendrer une mesure avec l'aide d'une fonction sous-additive. Cependant la condition (E_3) joue un rôle essentiel dans le problème de la mesurabilité des ouverts et des fermés (cf. 6).

4 – Condition nécessaire et suffisante de mesurabilité.

4.1 λ^* étant une fonction-contenu (resp. fonction-mesure) sur un idéal $\mathfrak{J}$ dans $\mathfrak{R}$ (resp. σ-idéal), la condition de *λ^*-mesurabilité* (*condition de Carathéodory*) pour un $X \in \mathfrak{J}$ est la suivante:

$$\lambda^*(Y) \geqslant \lambda^*(Y \wedge X) + \lambda^*(Y - Y \wedge X)$$

quel que soit $Y \in \mathfrak{J}$.

La proposition suivante est l'analogue de la proposition 53-*D* de [8].

4.2 Proposition: *Si λ^* est la fonction-contenu* (*resp. fonction-mesure*) *engendrée par l'étendue λ* (*resp. σ-étendue*), *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un soma $X \in \mathfrak{R}$ soit λ-*mesurable est que l'on ait: $\lambda^*(0) \geqslant \lambda^*(0 \wedge X) + \lambda^*(0 - 0 \wedge X)$ pour tout $0 \in \mathfrak{O}$ tel que $\lambda^*(0) < +\infty$.*

DÉMONSTRATION: La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante: X étant un soma quelconque, si $\lambda^*(Y) = +\infty$ on a trivialement:

$$\lambda^*(Y) \geqslant \lambda^*(Y \wedge X) + \lambda^*(Y - Y \wedge X),$$

et si $\lambda^*(Y) < +\infty$ il existe $0 \in \mathcal{O}$ avec:

$$Y < 0 \quad \text{et} \quad \lambda^*(Y) + \varepsilon > \lambda^*(0).$$

Comme par hypothèse:

$$\lambda^*(0) \geqslant \lambda^*(0 \wedge X) + \lambda^*(0 - 0 \wedge X)$$

on a donc:

$$\lambda^*(Y) + \varepsilon > \lambda^*(Y \wedge X) + \lambda^*(Y - Y \wedge X).$$

La conclusion résulte du caractère arbitraire de ε.

5 – Conditions suffisantes *-régularité.

En raison de l'importance dans la suite de l'hypothèse de *-régularité, et en raison également du simple caractère de corollaires des propositions précédentes qu'ont certaines des propositions ci-dessous, nous donnons dès maintenant des conditions suffisantes de *-régularité. Ces propositions, qui nous seront d'un grand usage dans les applications, montrent en même temps en quoi la condition de *-régularité inclut diverses hypothèses classiquement faites.

5.1 PROPOSITION: *Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, toute étendue sur $\mathcal{E}$ est $\mathcal{E}$-*-régulière.*

En effet $[R_1]$ est immédiatement vérifié et $[R_2]$ est exprimé par 3-3-*c*.

5.2 PROPOSITION: *Si $\mathcal{C}$ est une partie normalement séparée de $\mathcal{F}$, et si $\mathcal{E}$ est $\mathcal{C}$-dense dans $\mathcal{R}$, toute étendue $\mathcal{C}$-continue λ sur $\mathcal{E}$ est $\mathcal{C}$-*-régulière.*

En effet $[R_1]$ est exprimé par 2-3 et $[R_2]$ par 3-3-*b*.

5.3 Proposition: *Soit* $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$, *et soit* $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}$ *stable pour* $\vee$ *et contenant* $\varnothing$. *Soit* λ *une fonction positive ou nulle, finie, nulle en* $\varnothing$, *définie sur* $\mathcal{E}$, *croissante, satisfaisant à* (E_2) *et* (E_3) *et à la condition suivante (de type Jordanien):*

(*J*) *Quels que soient* $A \in \mathcal{E}$ *et* $\varepsilon > 0$, *il existe*

$$(F, 0, G, E) \in \mathcal{F} \times \mathcal{O} \times \mathcal{O} \times \mathcal{E}$$

tel que:

$$0 < A < F, \quad F - 0 < G < E, \quad \lambda(E) < \varepsilon \quad \text{et} \quad F - F \wedge G \in \mathcal{K}.$$

Alors:

a) λ est $\mathcal{K}$-continue.

b) Si $\mathcal{E}$ est λ-riche, λ est une étendue $\mathcal{K}$-continue et $\mathcal{K}$-*-régulière.

Démonstration:

a) Soit $A \in \mathcal{E}$, soit $\varepsilon > 0$ et soient les somas F, 0, G, E dont l'existence est affirmée par (*J*). Posons $H = F - F \wedge G$ et $0' = 0 \vee G$. On a $H \in \mathcal{K}$ et $0' \in \mathcal{O}$. Soit alors $A' \in \mathcal{E}$ tel que $H < < A' < 0'$. En vertu de l'inclusion $A < A' \vee E$ on a l'inégalité

$$(i) \qquad \lambda(A) \leqslant \lambda(A') + \varepsilon \quad \text{(sous-additivité de } \lambda).$$

En vertu de l'inclusion $A' < A \vee E$ on a l'inégalité:

$$(ii) \qquad \lambda(A') \leqslant \lambda(A) + \varepsilon.$$

La $\mathcal{K}$-continuité de λ résulte de la conjonction des inégalités (*i*) et (*ii*) valables pour tout $A' \in \mathcal{E}$ vérifiant $H < A' < 0$.

b) Si Si $\mathcal{E}$ est λ-riche, λ est alors une étendue par définition, et en vertu de *a*) elle est $\mathcal{K}$-continue.

Pour montrer que λ vérifie $[R_1]$, considérons les somas A, 0, $0'$, F, H, G et E introduits à *a*).

De la continuité de λ résulte $\lambda(A) = \lambda^*(A)$ quel que soit $A \in \mathcal{E}$.

De la monotonie de λ^* et des inclusions:

$$H < 0 < A < F < 0' \quad \text{et} \quad 0' - H < G < E$$

résulte:

$$\lambda^*(A - H) \leqslant \lambda^*(G) \leqslant \lambda^*(E) = \lambda(E) \leqslant \varepsilon.$$

De la sous-additivité de λ^* on déduit alors:

$$\lambda^*(A) - \lambda^*(H) \leqslant \lambda^*(A - H) \leqslant \varepsilon \quad \text{d'où} \quad [R_1].$$

Il nous reste à démontrer que λ vérifie $[R_2]$.

Considérons donc $H_1 \in \mathcal{H}$, $H_2 \in \mathcal{H}$ avec $H_1 \wedge H_2 = \varnothing$.

Il nous suffit de prouver que pour tout $G' \in \mathcal{O}$ et vérifiant $G' > H_1 \vee H_2$ on a $\lambda^*(G') \geqslant \lambda^*(H_1) + \lambda^*(H_2)$ dans le cas où $\lambda^*(G')$ est fini (sinon cette inégalité est triviale).

Soit $A \in \mathcal{E}$ tel que $A < G' - H_2 \in \mathcal{O}$ avec $\lambda(A) \geqslant \lambda^*(G' - - H_2) - \varepsilon$. Par hypothèse, il existe $F \in \mathcal{F}$ et $0 \in \mathcal{O}$ tels que

$$0 < A < F \quad \text{avec} \quad \lambda^*(F - 0) < \varepsilon.$$

On a

$$H_2 < G' - 0 < (G' - G' \wedge F) \vee (F - 0).$$

D'où

$$\lambda^*(H_2) \leqslant \lambda^*(G' - G' \wedge F) + \varepsilon.$$

Et comme $(G' - G' \wedge F) \wedge 0 = \varnothing$, l'additivité de λ^* sur $\mathcal{O}$ donne:

$$\begin{aligned} \lambda^*(G') &\geqslant \lambda^*[(G' - G' \wedge F) \vee 0] = \lambda^*(G' - G' \wedge F) + \lambda^*(0) \\ &\geqslant \lambda^*(H_2) - \varepsilon + \lambda^*(A) - \varepsilon \geqslant \lambda^*(H_2) + \lambda^*(G - H_2) - 3\varepsilon \\ &\geqslant \lambda^*(H_2) + \lambda^*(H_1) - 3\varepsilon. \end{aligned}$$

L'inégalité désirée $\lambda^*(G') \geqslant \lambda^*(H_1) + \lambda^*(H_2)$ résulte du caractère arbitrairede ε.

Nous donnons enfin une proposition d'emploi commode pour caractériser la propriété « $\mathcal{H}$-*-régulière ».

5.4 PROPOSITION: *Pour que l'étendue λ sur $\mathcal{E}$ soit $\mathcal{H}$-*-régulière, il faut et il suffit que λ satisfasse $[R_1]$ et:*

$[R_2']$ *Quel que soit $(0, H) \in \mathcal{O} \times \mathcal{H}$ avec $0 \wedge H = \varnothing$ on a:*

$$\lambda^*(0 \vee H) = \lambda^*(0) + \lambda^*(H).$$

La condition est nécessaire, car quel que soit $0 \in \mathcal{O}$ et $\varepsilon > 0$, on peut trouver $H' \in \mathcal{K}$ tel que $H' < 0$ et $\lambda^*(0) < \lambda^*(H') + \varepsilon$ (en vertu de $[R_1]$).

On a alors, si $H \in \mathcal{K}$ et $H \wedge 0 = \varnothing$:

$$\lambda^*(0 \vee H) \geqslant \lambda^*(H' \vee H) =$$
$$= \lambda^*(H') + \lambda^*(H) \geqslant \lambda^*(0) + \lambda^*(H) - \varepsilon .$$

En vertu de la sous-additivité de λ^*, et du caractère arbitraire de ε dans l'inégalité ci-dessus on a $\lambda^*(0 \vee H) = \lambda^*(0) + \lambda^*(H)$. Pour montrer que la condition est suffisante, considérons

$$(H_1, H_2) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \quad \text{tel que} \quad H_1 \wedge H_2 = \varnothing .$$

λ^* étant sous-additive, il nous suffit, pour montrer que $[R_2]$ est vrai, de prouver que pour tout $G \in \mathcal{O}$ avec $G > H_1 \vee H_2$ on a:

$$\lambda^*(G) \geqslant \lambda^*(H_1) + \lambda^*(H_2) .$$

Or, puisque $H_1 \wedge H_2 = \varnothing$ entraîne $H_1 < G - H_2 \in \mathcal{O}$ on a bien

$$\lambda^*(G) = \lambda^*[(G - H_2) \vee H_2] =$$
$$= \lambda^*(G - H_2) + \lambda^*(H_2) \geqslant \lambda^*(H_1) + \lambda^*(H_2) .$$

5.5 Si on appelle conformément à [6], *capacité abstraite sur* $(\mathfrak{R}, \mathcal{K})$ toute application croissante φ de $\mathfrak{R}$ dans $\overline{R}$ telle que:

1) Pour toute suite croissante (X_n) extraite de $\mathfrak{R}$ on a

$$\lim_n \varphi(X_n) = \varphi(\bigvee_n X_n) .$$

2) Pour toute suite (H_n) décroissante extraite de $\mathcal{K}$ on a

$$\lim_n \varphi(H_n) = \varphi(\bigwedge_n H_n) .$$

On peut alors énoncer la proposition suivante:

5.6 Proposition: *Soit λ une étendue. Si λ est une σ-étendue $\mathcal{K}$-*-régulière, λ^* est une capacité abstraite sur $(\mathfrak{R}, \mathcal{K})$, au sens de* [6].

Démonstration: La condition (5-5-1) pour λ^* est par définition équivalente à la condition pour λ d'être une σ-étendue (cf. II-1-6). Par ailleurs la conjonction de (5-5-1) pour λ^* et de la

$\mathcal{H}$-*-régularité de λ entraîne (5-5-2): en effet, soit un ouvert $0 > H_1$. La proposition 5-4 montre que $\lambda^*(0 - H_n) + \lambda^*(H_n) = \lambda^*(0)$.

D'où:

$$\lim_n \lambda^*(0 - H_n) + \lim_n \lambda^*(H_n) = \lambda^*(0). \tag{5-6-1}$$

Mais, comme en vertu de (5-5-1)

$$\lim_n \lambda^*(0 - H_n) = \lambda^*(0 - \bigwedge_n H_n)$$

on a bien

$$\lim_n \lambda^*(H_n) = \lambda^*(0) - \lambda^*(0 - \bigwedge_n H_n).$$

Une nouvelle application de la proposition 5-4 donne alors:

$$\lim_n \lambda^*(H_n) = \lambda^*(\bigwedge_n H_n). \tag{5-6-2}$$

6 – λ^*-mesurabilité des ouverts et des fermés.

Nous allons montrer que la *-régularité d'une étendue entraîne la λ^*-mesurabilité des éléments de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{O}$.

6.1 Théorème: *Si λ est une étendue (resp. une σ-étendue) sur $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$-*-régulière pour un ensemble $\mathcal{H}$ de somas fermés donné, l'anneau booléen des somas λ^*-mesurables (resp. le σ-anneau) inclut $\mathcal{O}$ et $\mathcal{F}$.*

Soit en effet $G \in \mathcal{O}$. Pour montrer que G est λ^*mesurable, montrons (cf. prop. 4-2) que, quel que soit $0 \in \mathcal{O}$ avec $\lambda^*(0) < +\infty$:

$$\lambda^*(0) \geqslant \lambda^*(0 \wedge G) + \lambda^*(0 - 0 \wedge G). \tag{6-1-i}$$

Par hypothèse, on peut trouver $H \in \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ tel que $H < 0 \wedge G$ et $\lambda^*(H) \geqslant \lambda^*(0 \wedge G) - \varepsilon$. L'inclusion $0 - 0 \wedge G < 0 - H$ entraîne $\lambda^*(0 - 0 \wedge G) \leqslant \lambda^*(0 - H)$. En vertu de (R_2') nous avons:

$$\begin{aligned}\lambda^*(0) = \lambda^*[H \vee (0 - H)] = \lambda^*(H) + \lambda^*(0 - H) \geqslant \\ \geqslant \lambda^*(0 \wedge G) + \lambda^*(0 - 0 \wedge G) - \varepsilon.\end{aligned}$$

L'inégalité désirée (6-1-i) résulte du caractère arbitraire de ε.

Soit maintenant $F \in \mathcal{F}$. Il existe $0 \in \mathcal{O}$ tel que $F < 0$. La λ^*-mesurabilité de 0 et de $0 - F \in \mathcal{O}$, entraîne celle de $F = 0 - (0 - F)$.

6.2 Corollaire: *Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, quelle que soit l'étendue λ sur $\mathcal{E}$, l'anneau booléen des somas λ^*-mesurables inclut $\mathcal{O}$ et $\mathcal{F}$.*

Ceci résulte de 5-1 et du théorème 6-1.

6.3 Corollaire: *Si λ est une étendue sur $\mathcal{E}$, $\mathcal{K}$-*-régulière, la restriction $\bar{\lambda}$ de λ^* à $\mathcal{K}_s$ est une étendue régulière sur $\mathcal{K}_s$* (cf. 1-3).

En effet $\bar{\lambda}$ vérifie (E_2) en vertu de la sous-additivité de λ^*, et vérifie (E_3) en vertu du théorème 6-1, $\mathcal{K}_s$ étant inclus dans l'ensemble des somas λ^*-mesurables.

Il reste seulement à montrer que $\mathcal{K}_s$ est $\bar{\lambda}$-riche. Ceci résultera immédiatement de la définition de $\bar{\lambda}$ et de la propriété suivante: quel que soit $(0_1, 0_2) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}$ et quel que soit $\nu < \lambda^*(0_1 \vee 0_2)$, il existe $H_1 < 0_1$ et $H_2 < 0_2$ avec $(H_1, H_2) \in \mathcal{K}_s \times \mathcal{K}_s$ et

$$\lambda^*(H_1 \vee H_2) = \bar{\lambda}(H_1 \vee H_2) > \nu.$$

Si $\lambda^*(0_1 \vee 0_2) = +\infty$, en vertu de la sous-additivité de λ^*, l'un des deux éléments de $\bar{R}$: $\lambda^*(0_1)$, $\lambda^*(0_2)$ est égal à $+\infty$. Dans le premier cas, par exemple, on peut trouver $H_1 < 0_1$ tel que $\lambda^*(H_1) > \nu$ et le résultat est immédiat.

Supposons donc $\lambda^*(0_1 \vee 0_2) < +\infty$. On peut par hypothèse trouver $H < 0_1 \vee 0_2$, $H \in \mathcal{K}$ tel que $\lambda^*(H) \geqslant \lambda^*(0_1 \vee 0_2) - \varepsilon$, puis $H_1' < 0_1 - H$ et $H_2' < 0_2 - H$ tels que $(H_1', H_2') \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ et

$$\lambda^*(H_1') \geqslant \lambda^*(0_1 - H) - \varepsilon \quad \text{et} \quad \lambda^*(H_2') \geqslant \lambda^*(0_2 - H) - \varepsilon.$$

Comme H_1', H et H_2' sont disjoints, en vertu du théorème 6-1 on a:

$$\begin{aligned}\lambda^*(0_1 \vee 0_2) - \lambda^*(H_1' \vee H \vee H_2') &= \\ &= \lambda^*(0_1 \wedge 0_2) - \lambda^*(H) + \lambda^*(0_1 - H) - \lambda^*(H_1') + \\ &+ \lambda^*(0_2 - H) - \lambda^*(H_2') \leqslant \varepsilon \in.\end{aligned}$$

Si on pose $H_1 = H \vee H_1'$, $H_2 = H \vee H_2'$ on a $H_1 \in \mathcal{K}_s$, $H_2 \in \mathcal{K}_s$, $H_1 < 0_1$, $H_2 < 0_2$ et $\lambda^*(H_1 \vee H_2) \geqslant \lambda^*(0_1 \vee 0_2) - 3\varepsilon$, ce que nous voulions.

7 – Nouveau critère de λ^*-mesurabilité. Mesurabilité et capacitabilité.

7.1 Nous dirons désormais qu'un soma X est λ^*-intégrable, s'il est λ^*-mesurable et si $\lambda^*(X) < +\infty$.

7.2 Proposition: *Soit λ une étendue sur $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$-*-régulière. Pour qu'un soma X soit λ^*-mesurable, il faut et il suffit que pour tout $H \in \mathcal{H}$ tel que $\lambda^*(H) < +\infty$, le soma $X \wedge H$ soit λ^*-intégrable.*

Démonstration: La condition est évidemment nécessaire, car tout $H \in \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ est mesurable en vertu de la proposition 6-1.

Pour montrer que la condition est suffisante, nous utilisons le critère de la proposition 4-2. Soit $X \in \mathcal{R}$, tel que pour tout $H \in \mathcal{H}$, vérifiant $\lambda^*(H) < +\infty$, le soma $X \wedge H$ soit λ^*-mesurable.

Nous voulons montrer que pour tout $0 \in \mathcal{O}$ vérifiant $\lambda^*(0) < < +\infty$ on a:

$$\lambda^*(0) \geqslant \lambda^*(0 \wedge X) + \lambda^*(0 - 0 \wedge X). \tag{7-2-i}$$

Par hypothèse, il existe $H \in \mathcal{H}$ tel que $H < 0$ et $\lambda^*(H) \geqslant \geqslant \lambda^*(H) \geqslant \lambda^*(0) - \varepsilon$. De la sous-additivité et la monotonie de λ^* résulte:

$$\lambda^*(0 \wedge X) = \lambda^*[(H \wedge X) \vee ((0 - H) \wedge X)] \leqslant \leqslant \lambda^*(H \wedge X) + \lambda^*(0 - H),$$

soit puisque

$$\lambda^*(0 - H) = \lambda^*(0) - \lambda^*(H) < \varepsilon \quad (0 \text{ et } H \text{ sont } \lambda^*\text{-mesurables}):$$

$$\lambda^*(0 \wedge X) \leqslant \lambda^*(H \wedge X) + \varepsilon. \tag{7-2-ii}$$

De même:

$$\lambda^*(0 - 0 \wedge X) = \lambda^*[(H - H \wedge X) \vee ((0 - H) - (0 - H) \wedge X)] \leqslant \leqslant \lambda^*(H - H \wedge X) + \lambda^*(0 - H)$$

soit:

$$\lambda^*(0 - 0 \wedge X) \leqslant \lambda^*(H - H \wedge X) + \varepsilon. \tag{7-2-iii}$$

La mesurabilité de $H \wedge X$ entraînant, en vertu du critère de Carathéodory, l'inégalité:

$$\lambda^*(H) \geqslant \lambda^*(H \wedge X) + \lambda^*[H - (H \wedge X)].$$

Les inégalités (7-2-*ii*) et (7-2-*iii*) impliquent donc:

$$\lambda^*(0) \geqslant \lambda^*(H) \geqslant \lambda^*(0 \wedge X) + \lambda^*(0 - 0 \wedge X) - 2\varepsilon .$$

L'inégalité (7-2-*i*) désirée résulte alors du caractère arbitraire de ε.

7.3 PROPOSITION: *Soit $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$. Nous désignons par $\overline{\mathcal{K}}$ l'idéal engendré par $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$, et nous supposons que λ est une étendue sur $\mathcal{E}$, $\mathcal{K}$-*-régulière. Dans ces conditions:*

7-3-*a* *λ est $\overline{\mathcal{K}}$-*-régulière.*

7-3-*b* *$\bar{\lambda}$ désignant la restriction de λ^* à $\overline{\mathcal{K}}$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un soma $X \in \mathcal{R}$ soit λ^*-intégrable, est qu'il soit λ-capacitable et de capacité extérieure*

$$\bar{\lambda}^*(X) = \lambda^*(X) \text{ finie.}$$

DÉMONSTRATION DE 7-3-*a*: (R_1) étant vrai pour $\mathcal{K}$ est vrai à fortiori pour $\overline{\mathcal{K}} \supset \mathcal{K}$.

La propriété (R_2) résulte immédiatement du fait que tous les somas de $\mathcal{F}$ sont λ^*-mesurables (th. 6-1) et que par conséquent pour deux somas F_1 et F_2 fermés disjoints quelconques on a $\lambda^*(F_1 \vee F_2) = \lambda^*(F_1) + \lambda^*(F_2)$.

DÉMONSTRATION DE 7-3-*b*: Montrons d'abord que la condition est suffisante, et supposons que $X \in \mathcal{R}$ soit $\bar{\lambda}$-capacitable et tel que $\bar{\lambda}^*(X) = \lambda^*(X) < +\infty$. Par hypothèse, il existe $Q \in \mathcal{K}$ et $G \in \mathcal{O}$ tels que $Q < X < G$ avec $\bar{\lambda}^*(G) - \bar{\lambda}(Q) < \varepsilon$,

ce qui s'écrit tout simplement $\lambda^*(G) - \lambda^*(Q) < \varepsilon$. Utilisant le critère de la proposition 4-2, nous voulons montrer que pour tout $0 \in \mathcal{O}$ avec $\lambda^*(0) < +\infty$, nous avons:

$$(7\text{-}3\text{-}i) \qquad \lambda^*(0) \geqslant \lambda^*(0 \wedge X) + \lambda^*(0 - 0 \wedge X).$$

Or, en vertu de $0 \wedge X < 0 \wedge G$ et $0 - 0 \wedge X < 0 - 0 \wedge Q$:

$$(7\text{-}3\text{-}ii) \quad \lambda^*(0 \wedge X) + \lambda^*(0 - 0 \wedge X) \leqslant \lambda^*(0 \wedge G) + \lambda^*(0 - 0 \wedge Q) .$$

Les ouverts étant λ^*-mesurables, la restriction de λ^* au treillis

$\mathcal{O}$ est une valuation et par conséquent:

$$\begin{aligned}\lambda^*(0 \wedge G) + \lambda^*(0 - 0 \wedge Q) &= \lambda^*(0) + \lambda^*[(0 \wedge G) \wedge (0 - 0 \wedge Q)[\\ &\leqslant \lambda^*(0) + \lambda^*(G - Q)\\ &\leqslant \lambda^*(0) + \lambda^*(G) - \lambda^*(Q)\\ &\leqslant \lambda^*(0) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité entraîne compte tenu de (7-3-*ii*):

$$\lambda^*(0) + \varepsilon \geqslant \lambda^*(0 \wedge X) + \lambda^*(0 - 0 \wedge X).$$

L'inégalité désirée (7-3-*i*) résulte alors du caractère arbitraire de ε. Montrons que la condition est nécessaire. En vertu de l'hypothèse de $\overline{\mathcal{K}}$-*-régularité qui entraîne $\lambda^*(X) = \bar{\lambda}^*(X)$, il suffit de montrer que si X est λ^*-intégrable, on a nécessairement:

$$\text{(7-3-}j\text{)} \qquad \lambda^*(X) = \sup\{\lambda^*(Q) : Q \in \overline{\mathcal{K}},\ Q < X\}.$$

Or, on peut par hypothèse déterminer $0 \in \mathcal{O}$ avec $\lambda^*(0) < +\infty$, $X < 0$ et $H \in \mathcal{K}$ tel que $H < 0$ et $\lambda^*(H) \geqslant \lambda^*(0) - \varepsilon$. On peut en outre déterminer $G \in \mathcal{O}$ avec $0 - X < G < 0$ et

$$\lambda^*(G) \leqslant \lambda^*(0 - X) + \varepsilon.$$

G, 0 et X étant λ^*-mesurables on a:

$$\text{(7-3-}jj\text{)} \qquad \begin{aligned}\lambda^*(X \wedge G) &= \lambda^*[G - (0 - X)] =\\ &= \lambda^*(G) - \lambda^*(0 - X) \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Posons alors $Q = H - H \wedge G$. On a $Q \in \overline{\mathcal{K}}$, $Q < 0 - G < X$. Et en vertu des inégalités:

$$\begin{aligned}(X - Q) &= (X \wedge G) \vee (X - X \wedge H)\\ &< (X \wedge G) \vee (0 - H)\end{aligned}$$

la mesurabilité de X, G, 0, H et Q entraîne

$$\begin{aligned}\lambda^*(X) - \lambda^*(Q) = \lambda^*(X - Q) \leqslant \lambda^*(X \wedge G) &+\\ + \lambda^*(0) - \lambda^*(H).\end{aligned}$$

Il résulte alors de (7-3-*jj*) et du choix de H que

$$\lambda^*(X) - \lambda^*(Q) \leqslant 2\varepsilon.$$

Nous avons donc pu déterminer $Q \in \overline{\mathcal{K}}$ tel que $Q < X$ et

$$\lambda^*(Q) \geqslant \lambda^*(X) - 2\varepsilon.$$

(7-3-j) est donc démontré.

8 – Mesures et contenus réguliers.

8.1 Contenus pseudo-boréliens et mesures pseudo-boréliennes: Nous appellerons *contenu pseudo-Borélien* (resp. *mesure pseudo-Borélienne*) tout contenu (resp. toute mesure) défini sur l'anneau booléen $\mathcal{A}$ (resp. définie sur le σ-anneau booléen $\mathcal{B}$) engendré par $\mathcal{O}$ et $\mathcal{F}$. Les éléments du σ-anneau $\mathcal{B}$ seront appelés *pseudo-Boréliens.* Lorsqu'aucune confusion ne sera possible nous supprimerons là encore le préfixe pseudo (cf. I-2-1).

Le contenu μ (resp. mesure) sera dit $\mathcal{C}$-*régulier* (resp. $\mathcal{C}$-*régulière*) s'il possède les deux propriétés suivantes (B_1) et (B_2):

(B_1) Pour tout X appartenant au domaine de définition de μ:

$$\mu(X) = \inf\{\mu(0) : 0 \in \mathcal{O},\ 0 > X\}$$

(B_2) Pour tout $0 \in \mathcal{O}$:

$$\mu(0) = \sup\{\mu(C);\ C \in \mathcal{C},\ C < 0\}.$$

8.2 Contenus (pseudo)-Lebesguiens et mesures (pseudo)-Lebesguiennes: La complétion $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mu})$ (au sens de [8]) d'une mesure Borélienne sera appelée mesure Lebesguienne. Un contenu borélien se laisse compléter de la même facon en un contenu $(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mu})$ que nous appellerons Lebesguien. On vérifie immédiatement que si $(\mathcal{A}, \mu)$ (resp. $(\mathcal{B}, \mu)$) est un contenu $\mathcal{C}$-régulier (resp. une mesure $\mathcal{C}$-régulière) $(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mu})$ [resp. $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mu})$], vérifie (B_1) et (B_2). Nous dirons que $\widehat{\mu}$ est un *contenu Lebesguien* $\mathcal{C}$-*régulier* (resp. une *mesure Lebesguienne* $\mathcal{C}$-*régulière*).

8.3 Contenus et mesures de Carathéodory: On appellera *mesure de Carathéodory* toute mesure complète définie sur un σ-anneau booléen $\mathcal{L}$, possédant en outre la propriété:

(C) $X \wedge A \in \mathcal{L}$ pour tout $A \in \mathcal{L}$ de mesure μ finie, implique $X \in \mathcal{L}$.

On définit de même un *contenu de Carathéodory*. Ce contenu (resp. cette mesure) sera dit $\mathcal{C}$-régulier (resp. $\mathcal{C}$-régulière) si $\mathcal{L} \supset \mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{L} \supset \mathcal{B}$) et si (B_1) et (B_2) sont vrais pour ce contenu (resp. cette mesure).

On sait que toute fonction-contenu λ^* (resp. toute fonction mesure) induit par restriction à l'anneau booléen (resp. au σ-anneau booléen) des somas λ^*mesurables un contenu (resp. une mesure) vérifiant (C).

8.4 PROPOSITION: *Soit* $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ *et soit* $\overline{\mathcal{C}}$ *l'idéal dans* $\mathcal{F}$ *engendré par* $\mathcal{C}$.

a) Si μ *est un contenu borélien (ou Lebesguien, ou de Carathéodory)* $\mathcal{C}$*-régulier on a, pour tout soma* X *intégrable pour* μ:

$$\mu(X) = \sup\{\mu(C) : C < X,\ C \in \overline{\mathcal{C}}\}$$

b) Si μ *est une mesure borélienne (ou Lebesguienne ou de Carathéodory)* $\mathcal{C}$*-régulière, la conclusion de a) est vraie pour tout* X *mesurable et de mesure* μ σ*-finie.*

c) Si μ *est une mesure Lebesquienne* $\mathcal{C}$*-régulière, ou une mesure de Carathéodory* $\mathcal{C}$*-régulière, elle possède la propriété suivante:*

(L) Pour qu'un soma $X \in \mathcal{R}$ *soit* μ*-intégrable, il faut et il suffit que l'on ait:*

$$\sup\{\mu(C) : C \in \overline{\mathcal{C}},\ C < X\} = \inf\{\mu(0) : 0 \in \mathcal{O},\ 0 > X\} < +\infty.$$

d) Si μ *est une mesure de Caratheodory* $\mathcal{C}$*-régulière définie sur* $\mathcal{L}$*, pour qu'un soma* X *appartienne à* $\mathcal{L}$*, il faut et il suffit que* $X \wedge C \in \mathcal{L}$ *pour tout soma* μ*-intégrable* $C \in \mathcal{C}$.

DÉMONSTRATION:

a) La condition (B_1) de $\mathcal{C}$-régularité implique pour tout $X \in \mathcal{A}$ et μ-intégrable l'existence d'un $0 \in \mathcal{O}$ tel que $\mu(0) < +\infty$ et $0 > X$. Soit alors (en vertu de (B_2)) $C \in \mathcal{C}$ tel que $C < 0$ et $\mu(C) \geqslant \geqslant \mu(0) - \varepsilon$. Il existe également $G \in \mathcal{O}$ vérifiant simultanément $G > 0 - X$ et $\mu(G) \leqslant \mu(0 - X) + \varepsilon$. Si l'on pose $C' = C - - C \wedge G$ on a $C' \in \overline{\mathcal{C}}$ avec $\mu(C') \geqslant \mu(C) - \mu(G) \geqslant \mu(0) - \mu(0) -$

$- X) - 2\varepsilon$. D'où $\mu(C') \geqslant \mu(X) - 2\varepsilon$. La propriété à démontrer en résulte immédiatement.

b) Le passage à un X de mesure σ-finie s'en déduit immédiatement lorsque μ est une mesure (donc σ-additive), en écrivant $X = \bigvee_n X_n$, la suite (X_n) étant une suite croissante de somas μ-intégrables.

c) La condition qui figure dans (L) est évidemment nécessaire pour l'intégrabilité de X, en vertu de ce qui précède et de la condition (B_1) de 8-1. Elle est suffisante parce que, si elle est vérifiée pour X, elle entraîne l'existence d'une suite décroissante (0_n) d'ouverts et d'une suite croissante (C_n) extraite de $\mathfrak{C}$ telles que

$$\mu(\bigvee_n C_n) = \sup_n \mu(C_n) = \inf_n \mu(0_n) = \mu(\bigwedge_n 0_n).$$

On en déduit $\mu(\bigwedge_n 0_n - \bigvee_n C_n) = 0$. Et puisque

$$X = (X - \bigvee_n C_n) \vee (\bigvee_n C_n) \quad \text{avec} \quad X - \bigvee_n C_n < \bigwedge_n 0_n - \bigvee_n C_n,$$

la mesurabilité de X résulte du fait que

$$\bigvee_n C_n \in \mathfrak{B} \subset \mathfrak{L},$$

et du fait que μ est complète.

d) Pour démontrer *d*, il suffit évidemment de montrer que $X \wedge C \in \mathfrak{L}$ pour tout soma μ-intégrable $C \in \mathfrak{C}$ implique $X \wedge A \in \mathfrak{L}$ pour tout soma A intégrable. Considérons d'abord un A ouvert. La régularité de μ implique $A = \bigvee_n C_n \vee N$ où (C_n) est une suite croissante extraite de $\mathfrak{C}$ et N un soma de mesure nulle. La mesurabilité de $X \wedge A = (\bigvee_n X \wedge C_n) \wedge (X \wedge N)$ résulte donc de la mesurabilité des $X \wedge C_n$ et du fait que la mesure μ est complète. Enfin tout A intégrable peut s'écrire sous la forme $A = (\bigwedge_n 0_n) - N$ où (0_n) est une suite décroissante d'ouverts intégrables et N un soma de mesure nulle. La mesurabilité des $X \wedge C_n$ et de $X \wedge N$ implique donc la mesurabilité de $X \wedge A$. D'où la propriété.

On remarquera que les raisonnements précédents c) et d) ne s'appliquent pas à un contenu défini sur un anneau booléen. On peut d'ailleurs donner des exemples très simples montrant qu'un contenu Lebesguien, (même σ-additif), ne possède pas la propriété (L) [1]).

Si $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D} \subset \mathfrak{F}$, toute mesure $\mathfrak{C}$-régulière est évidemment $\mathfrak{D}$-régulière. En vertu de ce qui précède, lorsque $\mathfrak{C}$ est un idéal dans $\mathfrak{F}$, la proposition suivante est évidente pour les mesures $\mathfrak{C}$-régulière, mais non pour les contenus.

8.5 Proposition: *Soit $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D} \subset \mathfrak{F}$, et soient $\gamma_{\mathfrak{C}}$ et $\gamma_{\mathfrak{D}}$ les restrictions d'un contenu $\mathfrak{C}$-régulier μ à $\mathfrak{C}$ et à $\mathfrak{D}$ respectivement. Si les notions de μ-intégrabilité et $\gamma_{\mathfrak{C}}$-capacitabilité finie coincident, elles coincident également avec la $\gamma_{\mathfrak{D}}$-capacitabilité finie.*

Démostration.

Désignons par $\mathfrak{C}_0$ et $\mathfrak{D}_0$ les sous-ensembles de $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ sur lesquels μ est finie. Puisque nous considérons uniquement les somas μ-intégrables, c'est-à-dire ceux qui sont inclus dans un ouvert 0 tel que $\mu(0) = \gamma^*_{\mathfrak{C}}(0) = \gamma^*_{\mathfrak{D}}(0) < +\infty$, nous avons seulement à considérer les restrictions $\gamma'_{\mathfrak{C}}$ et $\gamma'_{\mathfrak{D}}$ de $\gamma_{\mathfrak{C}}$ et $\gamma_{\mathfrak{D}}$ à $\mathfrak{C}_0$ et $\mathfrak{D}_0$, et à montrer que $\gamma'_{\mathfrak{D}}$-capacitabilité finie et $\gamma'_{\mathfrak{C}}$ capacitabilité finie coincident. Mais μ étant $\mathfrak{C}$-régulier, $\gamma'_{\mathfrak{D}}$ est une extension de $\gamma'_{\mathfrak{C}}$ (au sens de I-3-7). La proposition I-3-7 donne alors le résultat voulu.

---

[1]) Soit par exemple $E =]0, 1]$; posons $I_n = [1/2n+1, 1/2n]$ et désignons par $\mathfrak{F}$ l'ensemble des parties de E qui sont $\varnothing$, E ou une réunion finie d'intervalles I_n. Les éléments de $\mathfrak{F}$ sont les pseudofermés d'une pseudo-topologie de Nikodym, les ouverts étant leurs complémentaires. On vérifie immédiatement que si 0 est un ouvert et F un fermé, $0 \cap F$ est un fermé, et on en déduit que l'ensemble des parties de E qui sont de la forme $F \cup 0$ où F est un fermé et 0 un ouvert constitue un anneau booléen $\mathcal{A}$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ posons $m(A) =$ somme des longueurs des intervalles $I_n \subset A$.

Le contenu m sur $\mathcal{A}$ est d'ailleurs σ-additif et tel que $m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)}$. Tout élément $\neq \varnothing$ de $\mathcal{A}$ ayant un contenu strictement positif, m est complet. Il est pseudo-borélien et $\mathfrak{F}$-régulier. Cependant $X = \bigcup_n I_n$ n'appartient pas à $\mathcal{A}$, bien que $\sup\{m(F) : F \in \mathfrak{F},\ F \subset X\} = m(E) = \inf\{m(0) : 0 \in \mathfrak{O},\ 0 \subset X\}$.

8.6 THÉORÈME: *On désigne par $\mathcal{E}$ un sous-ensemble de $\mathcal{R}$, stable pour $\vee$, par $\mathcal{C}$ un sous-ensemble de $\mathcal{F}$, par $\overline{\mathcal{C}}$ l'idéal engendré par $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{F}$ et par $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de $\mathcal{F}$ possédant la propriété $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathcal{D}$.*

λ est une étendue sur $\mathcal{E}$ (resp. une σ-étendue sur $\mathcal{E}$). Alors:

8-6-*a* *Si λ est $\mathcal{C}$-*-régulière, la fonction λ^* sur $\mathcal{R}$ est une fonction-contenu (resp. Une fonction mesure) induisant sur l'anneau booléen $\mathfrak{L}$ (resp. le σ-anneau booléen $\mathfrak{L}$) des somas λ^*-mesurables un contenu de Carathéodory $\mathcal{D}$-régulier μ (resp. une mesure de Caratheodory $\mathcal{D}$-régulière). Si γ désigne la restriction de μ à $\mathcal{D}$, γ-capacitabilité finie et μ-intégrabilité coincident.*

8-6-*b* *Si λ est $\mathcal{C}$-*-régulière et $\mathcal{C}$-continue, le contenu μ sur $\mathfrak{L}$ (resp. La mesure μ sur $\mathfrak{L}$) est un prolongement de la restriction de λ au sous-ensemble $\mathcal{E}_0$ de $\mathcal{E}$ sur lequel λ est finie.*

Si en outre les somas de $\mathcal{E} - \mathcal{E}_0$ sont fermés ou ouverts, μ est un prolongement de l'étendue λ sur q.

8-6-*c* *Si λ est $\mathcal{C}$-*-régulière, $\mathcal{C}$-continue, finie sur $\mathcal{E}$, et si $\mathcal{E}$ possède la propriété: quel que soit $(D, 0) \in (\mathcal{D} \times \mathcal{O})$ avec $D < 0$, il existe $A \in \mathcal{E}$ tel que $D < A < 0$ (autrement dit $\mathcal{E}$ est $\mathcal{D}$-dense dans $\mathcal{R}$), alors μ est le prolongement unique de λ en un contenu de Carathéodory $\mathcal{D}$-régulier (resp. une mesure de Carathéodory $\mathcal{D}$-régulière). En outre, la restriction de μ à l'anneau $\mathcal{A}$ (resp. σ-anneau $\mathcal{B}$) engendré par $\mathcal{O}$ et $\mathcal{F}$ est l'unique prolongement de λ en un contenu borélien (resp. mesure) $\mathcal{D}$-régulier.*

DÉMONSTRATION:

8-6-*a* Le fait que λ^* soit une fonction contenu (resp. fonction mesure) est exprimé par 3-3-*a* et 3-3-*d*. Il résulte alors de 6-1 et 7-3 et 7-2 que μ est un contenu de Carathéodory $\overline{\mathcal{C}}$-régulier, pour lequel μ-intégrabilité et $\gamma_{\overline{\mathcal{C}}}$-capacitabilité coincident. La proposition 8-5 permet enfin de remplacer $\gamma_{\overline{\mathcal{C}}}$-capacitabilité finie par $\gamma_{\mathcal{D}}$-capacitabilité finie.

8-6-*b* est une conséquence immédiate de la $\mathcal{C}$-continuité entraînant $\lambda(A) = \lambda^*(A)$ quel que soit $A \in \mathcal{E}$ et de la $\gamma_{\overline{\mathcal{C}}}$-capacitabilité des éléments de $\mathcal{E}_0$, entraînant leur intégrabilité en vertu de ce qui précède.

8-6-*c* Le fait que μ soit un prolongement de Carathéodory

$\mathfrak{D}$-régulier de λ résulte de 8-6-*b*. Pour montrer l'unicité, considérons un contenu de Carathéodory μ' sur $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{D}$-régulier qui soit un prolongement de λ, et montrons que $\mu' = \mu$ avec $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$. Tout d'abord, en vertu du critère (C) de mesurabilité Carathéodory, $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$ coincideront si les somas μ-intégrables et μ'-intégrables sont les mêmes. Et en vertu de la régularité (condition B_1 de 8-1) et de la complétude, il faut et il suffit que μ et μ' coincident sur $\mathfrak{O}$. Or, quel que soit $A \in \mathcal{E}$ on a:

$$\mu(A) = \lambda(A) = \mu'(A) = \sup \{\mu'(D)_n : D < A, D \in \mathfrak{D}\}$$

(condition B_2 de 8-1).

On a donc pour tout $0 \in \mathfrak{O}$:

$$\text{(8-6-}i\text{)} \qquad \begin{aligned} \mu(0) = \lambda^*(0) &= \sup \{\lambda(A) : A \in \mathcal{E}, A < 0\} \\ &\leqslant \sup \{\mu'(D) : D \in \mathfrak{D}, D < 0\} \leqslant \mu'(0). \end{aligned}$$

Or, puisque quel que soit $D < 0$, avec $D \in \mathfrak{D}$, il existe $A \in \mathcal{E}$ tel que $D < A < 0$, on a, quel que soit $0 \in \mathfrak{O}$:

$$\text{(8-6-}ii\text{)} \qquad \begin{aligned} \mu'(0) &= \sup \{\mu'(D) : D < 0, D \in \mathfrak{D}\} \\ &\leqslant \sup \{\mu'(A) : A \in \mathcal{E}, A < 0\} \\ &\leqslant \sup \{\lambda(A) : A \in \mathcal{E}, A < 0\} = \lambda^*(0) = \mu(0). \end{aligned}$$

La coincidence de μ et μ' sur $\mathfrak{O}$, et par conséquent l'unicité de $\mathfrak{L}$ et de μ sur $\mathfrak{L}$, résulte de la conjonction de (8-6-*i*) et (8-6-*ii*).

Pour la même raison deux contenus boréliens $\mathcal{C}$-réguliers qui coincident sur $\mathcal{E}$ coincident sur $\mathfrak{O}$. La propriété (B_1) des contenus boréliens entraîne donc qu'ils coincident en tout soma de leur domaine de définition.

8.7 Remarque: La restriction d'une étendue à un ensemble stable pour $\vee$ (respectivement un treillis) étant alternée d'ordre $\mathcal{A}_\infty$. (respectivement alternée d'ordre $\mathcal{A}_\infty$ et monotone d'ordre $\mathcal{M}_\infty$, cf. [5]) toute capacité λ sur un ensemble $\mathcal{E}$ stable pour $\vee$ (resp. treillis), λ-riche, et constitué par des fermés, est alternée d'ordre $\mathcal{A}_\infty$ (resp. alternée d'ordre $\mathcal{A}_\infty$ et monotone d'ordre $\mathcal{M}_\infty$) dès qu'elle est sous-additive et additive.

9 – Une classe importante de σ-étendue.

Nous avons jusqu'à présent considéré des σ-étendues en introduisant assez gratuitement l'axtiome $[\alpha]$. Nous allons voir maintenant comment cet axiome peut être vérifié dans des cas très usuels. Le résultat essentiel contenu dans le théorème 9-2 repose sur le théorème I-4-1 et sur la proposition suivante:

9.1 Proposition: *Si λ est une étendue sur $\mathcal{E}$, $\mathcal{K}$-*-régulière, la fonction contenu λ^* sur $\mathcal{R}$ vérifie* $[\beta]$.

En vertu de (6-3), il suffit de le démontrer pour une étendue régulière sur $\mathcal{E}$. Et en vertu de I-3-6-*b*, il suffit de montrer que λ sur $\mathcal{E}$ vérifie $[\beta[$. Soient, alors $A'A$, E trois somas de $\mathcal{E}$, tels que $A < A'$. Mais λ étant régulière, donc continue à droite par définition:

$$\lambda(A' \vee E) - \lambda(A \vee E) = \lambda^*(A' \vee E) - \lambda^*(A \vee E).$$

En vertu de la sous-additivité de λ^* et de sa monotonie:

$$\lambda^*(A' \vee E) - \lambda^*(A \vee E) \leqslant \lambda^*(A' \vee E - A \vee E) \leqslant \lambda^*(A' - A).$$

Il résulte alors de la λ^*-mesurabilité des éléments de $\mathcal{E}$ (fermés) que si $\lambda^*(A') < +\infty$ on a:

$$\lambda^*(A' - A) = \lambda^*(A') - \lambda^*(A) = \lambda(A') - \lambda(A).$$

λ^* vérifie donc sur $\mathcal{E}$ la condition suivante plus forte que $[\beta]$: quels que soient $(A', A, E) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ tels que $A < A'$ et $\lambda(A') < +\infty$ on a:

$$\lambda^*(A' \vee E) - \lambda^*(A \vee E) \leqslant \lambda^*(A') - \lambda^*(A).$$

9.2 Théorème: *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une étendue λ sur $\mathcal{E}$, $\mathcal{K}$-*-régulière, soit une σ-étendue, est que λ vérifie la condition* $[\Omega]$ (cf. I-4).

La condition est trivialement nécessaire. La proposition 9-1 et le théorème I-4-2 montrent immédiatement qu'elle est suffisante.

9.3 Proposition annexe: *Si λ est une étendue sur $\mathcal{E}$, $\mathcal{K}$-*-régulière, la condition* $[\Omega]$ *est vérifiée dans chacun des cas suivants:*

9-3-*a* *les somas de* $\mathcal{K}$ *sont* $\vee$*-compacts.*

9-3-*b* $\mathcal{K}$ *est stable pour* $\wedge$ *et les axiomas* (r) *et* (δ) *suivants sont vérifiés.* (2)

(r) *Quel que soit le recouvrement ouvert dénombrable* $\mathcal{G}$ *d'un* $H \in \mathcal{K}$ *il existe un recouvrement dénombrable et* $\mathcal{G}$*-fin de* H *par des ouverts* $\{0_n\}$ *vérifiant:*

$$H - H \wedge 0_n \in \mathcal{K}.$$

(δ) *Pour toute suite décroissante* (H_n), $H_n \in \mathcal{K}$

$$\bigwedge_n H_n = \varnothing \quad \textit{entraine} \quad \lim_n \lambda^*(H_n) = 0.$$

9-3-*c* $\mathcal{K}$ *est une classe* $\wedge$*-compacte stable pour* $\wedge$ *et* (r) *reste vrai.*

DÉMONSTRATION:

a) La démonstration est en tous points analogue à celle de [15] p. 220.

b) Soit donc (0_n), $0_n \in \mathcal{O}$ une suite croissante.

Si $\lambda^*(0_n) = +\infty$ pour un n, $[\Omega]$ est vérifiée pour la suite (0_n). Supposons donc que quel que soit n, on ait $\lambda^*(0_n) < +\infty$.

Il nous suffit de montrer que, quel que soit $\alpha < \lambda^*[\bigvee_n 0_n]$ on a $\lim_n \lambda^*(0_n) \geqslant \alpha$. Soit $H \in \mathcal{K}$ tel que $H < 0 = \bigvee_n 0_n$, et $\lambda^*(H) \geqslant \alpha$: $\{0_n\}$ est un recouvrement de H. Donc il existe un recouvrement plus fin $\{0'_p\}$ tel que $H'_n = H - H \wedge 0'_n \in \mathcal{K}$. On construit à partir de ce recouvrement le recouvrement $\{0''_m\}$ de la facon suivante: $0''_m = \bigvee_{p \leqslant m} 0'_p$. Or, $\mathcal{K}$ étant stable pour $\wedge$, $H''_m = H - H \wedge 0''_m = \bigwedge_{p \leqslant m} H - H \wedge 0'_p \in \mathcal{K}$. La suite $\{0''_m\}$ est croissante et constitue un recouvrement de H plus fin que $\{0_n\}$. On

(2) On peut évidemment remplacer cette hypothèse par l'hypothèse plus forte: les $H \in \mathcal{K}$ sont λ^*-presque compacts au sens de [7]. Il convient également de marquer que l'hypothèse fondamentale de [7] peut s'exprimer: les pseudo-fermés de $\mathfrak{R}$ sont λ^*-presque compacts. L'ensemble des pseudo fermés possède alors trivialement les propriétés 9-3-*b*.

a évidemment:

$$\lim_m \lambda^*(0''_m) \leqslant \lim_n \lambda^*(0_n).$$

$$\bigwedge_n H''_m = \varnothing \quad \text{entraîne} \quad \lim_m \lambda^*(H''_m) = 0 \qquad (\text{axiome } (\delta)).$$

En vertu de la sous-additivité de λ^*,

$$\lambda^*(H) \leqslant \lambda^*(H''_m) + \lambda^*(0''_m).$$

En prenant m suffisamment grand pour que $\lambda^*(H_m) < \varepsilon$:

$$\alpha \leqslant \lambda^*(H) \leqslant \lambda^*(0''_m) + \varepsilon \leqslant \lim_m \lambda^*(0''_n) + \varepsilon.$$

Et, ε étant arbitraire:

$$\alpha \leqslant \lambda^*(H) \leqslant \lim_m \lambda^*(0''_m) \leqslant \lim_n \lambda^*(0_n)$$

ce que nous voulions montrer.

c) (δ) est automatiquement vérifié en raison de la $\wedge$-compacité de $\mathcal{K}$. (r) est vrai par hypothèse. Cette partie de la proposition est donc une conséquence de la partie *b*.

10 – Condition d'unicité.

Dans l'énoncé du théorème 8-6 les conditions suffisantes d'unicité sont assez restrictives. Ceci tient à la très grande richesse en somas de $\mathcal{L}$. En envisageant des prolongements de λ sur le σ-treillis booléen engendré par $\mathcal{E}$ nous allons obtenir une condition d'unicité.

10.1 Proposition: *Si $\mathcal{E}$ est une partie de $\mathcal{R}$, stable pour $\vee$, et si λ est une fonction finie sur $\mathcal{E}$, prolongeable en un contenu positif m sur le treillis booléen $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ engendré par $\mathcal{E}$, m est l'unique prolongement de λ en un contenu sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, et est fini.*

Dans le cas où $\mathcal{E}$ est un treillis et où λ est une valuation sur $\mathcal{E}$, on sait (Pettis-[15] th. 1-2) que λ existe et est unique. Dans le cas général de notre proposition on a la démonstration suivante: Si $(X, X') \in \mathcal{C}(\mathcal{E}) \times \mathcal{C}(\mathcal{E})$ on a:

(10-1-*i*) $\qquad m(X \wedge X') = m(X) + m(X') - m(X \vee X').$

Or, en utilisant l'identité:

$$X_{n+1} \vee \left(\bigwedge_{p=1}^{n} X_p\right) = \bigwedge_{p=1}^{n} (X_p \vee X_{n+1})$$

on déduit de (10-1-i) en raisonnant par récurrence sur n, que pour toute suite (X_p) extraite de $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ on a:

$$\text{(10-1-}j\text{)} \quad m\left(\bigwedge_{p=1}^{n} X_p\right) = \sum_{p=1}^{n} m(X_p) - \sum_{i,j} m(X_i \vee X_j) + \dots + \\ - (-1)^{n+1} m(X_1 \vee \dots \vee X_n).$$

D'où, si (A_p) est une suite extraite de $\mathcal{E}$:

$$\text{(10-1-}k\text{)} \quad m\left(\bigwedge_{p=1}^{n} A_p\right) = \sum_{p=1}^{n} \lambda(A_p) \dots + (-1)^{n+1} \lambda\left(\bigvee_{i=1}^{n} A_i\right).$$

De même si $(X, X') \in \mathcal{T}(\mathcal{E}) \times \mathcal{T}(\mathcal{E})$ avec $X < X'$ on a

$$\text{(10-1-}l\text{)} \qquad m(X' - X) = m(X') - m(X).$$

Si nous considérons alors une partie finie quelconque $\mathcal{E}_J$ de $\mathcal{E}$, le treillis booléen engendré par $\mathcal{E}_J$ est fini, contient un plus grand élément $E_J = \bigvee_{E \in \mathcal{E}_J} E \in \mathcal{E}$ et tout élément de ce treillis booléen est réunion finie disjointe de somas de la forme (atomes):

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{E}_J} B_A \quad \text{avec} \quad B_A = \begin{cases} A \\ \text{ou} \\ E_J - A. \end{cases}$$

Soient $B_1 \dots B_p$ les somas $B_A = A$ et $B_{p+1} \dots B_n$ les somas B_A tels que $B_A = E_J - A$. Il suffit, en vertu de (10-1-i) de montrer que $m\left(\bigwedge_{k=1}^{p} B_k\right)$ et $m\left(\bigwedge_{k=p+1}^{n} B_k\right)$ sont déterminés de facon unique. Or pour la première expression cela résulte de (10-1-k). Pour la deuxième expression, cela résultera de (10-1-j) si nous pouvons montrer que pour toute suite $(k_1 \dots k_q)$ extraite de $(p+1 \dots n)$, $m(B_{k_1} \vee \dots \vee B_{k_q})$ est déterminé de facon unique. Or $B_{k_1} \vee \dots \vee B_{k_q} = E_J - \bigwedge_{r=1}^{q} A_{k_r}$; l'unicité désirée résulte donc alors de $(10 - 1 - k)$ et $(10 - 1 - l)$.

Comme en outre $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \bigcup_J \mathcal{T}(\mathcal{E}_J)$, m est parfaitement déterminé sur $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ par sa restriction λ à $\mathcal{E}$. Le contenu m est en outre fini, car tout $X \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$ appartient à un $\mathcal{T}(\mathcal{E}_J)$ et est donc tel que $m(X) \leqslant m(E_J) = \lambda(E_J)$.

10.2 COROLLAIRE: *Si $\mathcal{E}$ est une partie de $\mathcal{R}$, stable pour* $\vee$ *et si λ est une fonction finie sur $\mathcal{E}$, prolongeable en une mesure positive sur le σ-treillis booléen $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ engendré par $\mathcal{E}$, μ est l'unique prolongement de λ en une mesure positive sur $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ et μ est σ-finie.*

Ceci résulte immédiatement du fait que $\mathcal{S}(\mathcal{E}) = \mathcal{S}[\mathcal{T}(\mathcal{E})]$, de la proposition 10-1 et d'un théorème classique d'unicité ([8], p. 54.

10.3 DÉFINITION: Soit μ un contenu (resp. une mesure) sur un treillis-booléen $\mathcal{T}$ (resp. un σ-treillis booléen $\mathcal{S}$) inclus dans $\mathcal{R}$. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. On dira que μ est *$\mathcal{C}$-régulière*, si μ est continue à droite et si pour la capacité extérieure μ^* on a pour tout $X \in \mathcal{T}$ (resp. $X \in \mathcal{S}$) de contenu (resp. mesure) fini:

$$\mu(X) = \sup \mu^* \{C;\ C \in \mathcal{C},\ C < X\}.$$

10.4 REMARQUE: Un contenu borélien $\mathcal{C}$-régulier (cf. 8-1) est un contenu $\mathcal{C}$-régulier défini sur le treillis-booléen engendré par $\mathcal{O}$ et $\mathcal{F}$.

10.5 THÉORÈME: *Soit λ une étendue (resp. σ-étendue) sur $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. Si λ est $\mathcal{C}$-*-régulière, C-continue et finie, λ est prolongeable de facon unique en un contenu (resp. une mesure) sur le treillis booléen (resp. σ-treillis-booléen) engendré par $\mathcal{E}$. Le contenu obtenu (resp. mesure) est fini (resp. σ-finie), et $\mathcal{C}$-régulier.*

Ce théorème est une conséquence immédiate de 10-2 et 8-6.

10.6 REMARQUE: L'énoncé 10-1 peut être modifié de la facon suivante: on ne suppose plus λ finie, mais l'on fait les deux hypothèses suivantes:

a) tout $A \in \mathcal{E}$ est réunion d'une famille dénombrable (E_n), $E_n \in \mathcal{E}$, de somas deux à deux disjoints et tels que $\lambda(E_n) < +\infty$ quel que soit n.

b) λ est prolongeable en un contenu positif, σ-additif μ sur $\mathcal{T}(\mathcal{E})$.

Alors μ est l'unique contenu σ-additif prolongeant λ sur $\mathcal{T}(\mathcal{E})$, et il est σ-fini.

Dans ce cas en effet les second membres des égalités (10-1-i) à (10-1-l) ne sont pas toujours définis. Cependant pour tout ensemble fini $\{B_A\} \subset \mathcal{T}(\mathcal{E}_J)$ avec $B_A = A \in \mathcal{E}_J$ ou $E_J - B_A = A \in \mathcal{E}_J$, $m(\bigwedge_{A\in\mathcal{E}_J} B_A)$ est déterminé de facon unique par la connaissance de λ. Pour le voir, considérons une suite (E_i) de somas deux à deux disjoints appartenant à $\mathcal{E}$ et tels que $\lambda(E_i) < +\infty$ quel que soit i et tels que $E_J = \bigvee_{i=1}^{\infty} E_i$. En vertu de la σ-additivité de m, il suffit de montrer que $m(\bigwedge_{A\in\mathcal{E}_J} B_A \wedge E_i)$ est déterminé de facon unique pour tout i.

Décomposant, comme dans la démontration de 10-1 la famille (B_A) en deux suites $(B_1 \dots B_p)$, $(B_{p+1} \dots B_n)$ telles que $B_q \in \mathcal{E}_J$ pour $1 \leqslant q \leqslant p$ et $E_J - B_q \in \mathcal{E}_J$ pour $p+1 \leqslant q \leqslant n$, on voit, comme dans la démonstration de 10-1 que la seule propriété sur laquelle repose le résultat final, est l'unicité de la détermination de $m(\bigwedge_{q=1} B_q \wedge E_i)$. Or chaque B_q est réunion dénombrable disjointe d'une famille $(B_q^{i_q})_{i_q=1\dots\infty} \in \mathcal{E}^N$ telle que $\lambda(B_q^{i_q}) < +\infty$, et en vertu de la σ-additivité de m:

$$m(\bigwedge_{q=1}^{p} B_q \wedge E_i) = \sum_{(i_1 \dots i_p)} m(B_1^{i_1} \wedge \dots \wedge B_p^{i_p} \wedge E_i).$$

Le résultat cherché découle donc complètement de l'unicité de la détermination de $m(\bigwedge_q B_q^{i_q} \wedge E_i)$ qui est prouvé dans la démonstration de 10-1.

De cette remarque 10-6 découle immédiatement:

10.7 PROPOSITION: *Soit λ une σ-étendue sur $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. Si λ est $\mathcal{C}$-*-régulière, $\mathcal{C}$-continue et satisfait à l'hypothèse supplémentaire* 10-6-*a*, *λ est prolongeable de facon unique en une mesure μ sur le σ-treillis-booléen $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ engendré par $\mathcal{E}$. La mesure μ est en outre σ-finie et $\mathcal{C}$-régulière.*

11 – Localisation des hypothèses

11.1 Définitions: Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ et soit $\{\overline{C}\}$ l'idéal des somas $< C$. Une fonction numérique φ sur un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}$ stable pour $\vee$, sera dite *étendue locale* si, quel que soit $C \in \mathcal{C}$, la restriction φ_c de $\mathcal{C}$ à $\{\overline{C}\} \cap \mathcal{E}$ est une étendue pour la pseudo-topologie induite sur $\{\overline{C}\}$. La fonction φ sera dite *localement* $\mathcal{C}$*-continue* si φ_c est $(\mathcal{C} \cap \{\overline{C}\})$-continue pour la pseudo-topologie induite.

Si, quel que soit $C \in \mathcal{C}$, φ_c vérifie $[\Omega]$ dans le sous-σ-treillis-booléen pseudo-topologique $\{\overline{C}\}$, φ est dite vérifier $[\Omega]$ localement.

On remarquera que, alors que la $\mathcal{C}$-continuité locale est plus faible que la $\mathcal{C}$-continuité, la λ-richesse locale est plus forte que la λ-richesse tout court.

11.2 Remarque et exemple: Si l'ensemble $\mathcal{C}$ possède la propriété suivante:

(N) Quels que soient $C \in \mathcal{C}$ et $0 \in \mathcal{O}$ tels que $C < 0$, il existe $C' \in \mathcal{C}$ et $0' \in \mathcal{O}'$ tels que $C < 0' < C' \wedge 0$.

Il y a identité entre les notions de $\mathcal{C}$-continuité, $\mathcal{C}$-régularité etc... et celle de $\mathcal{C}$-continuité locale etc...

(N) est vérifié par exemple si l'on prend pour $\mathcal{R}$ l'ensemble des parties d'un espace topologique localement compact T, pour pseudo-topologie celle définie par les ouverts et les fermés de T, et pour $\mathcal{C}$ l'ensemble des compacts.

11.3 Théorème: *Soit* $\mathcal{C}$ *un sous-treillis de* $\mathcal{F}$, *engendrant dans* $\mathcal{F}$ *l'idéal* $\overline{\mathcal{C}} \cap \mathcal{F}$. *Soit* λ *une étendue locale sur* $\mathcal{E}$, *finie, localement continue à droite.*

a) λ *est prolongeable de facon unique en un contenu localement* $\overline{\mathcal{C}} \cap \mathcal{F}$*-régulier* m, *sur le treillis-booléen* $\mathcal{A}$ *engendré par les fermés (et les ouverts)* C_s*-bornés.*

La restriction de m *au treillis booléen* $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ *engendré par* $\mathcal{C}$ *est l'extension minimale unique de* λ *en un contenu.*

b) Si λ *vérifie localement* $[\Omega]$ *(en particulier si* $\mathcal{C}$ *est une classe* $\wedge$*-compacte), on peut, dansl'énoncé a) ci-dessus, remplacer partout les mots « contenu* m *» (resp. « treillis-booléen* $\mathcal{A}$ *») par les mots « mesure* μ *» (resp. «* σ*-treillis-booléen* $\mathcal{B}$ *»).*

Pour tout $M \in \mathfrak{B}$ on a en outre

$$\mu(M) = \sup \{\mu(C) : C \in \overline{\mathcal{C}} \cap \mathcal{F},\ C < M\}.$$

DÉMONSTRATION DE a) Nous posons

λ_c: restriction de λ à $\{\overline{C}\} \cap \mathcal{C} = \mathcal{C}_c$

λ_c^*: fonction contenu engendrée par λ sur $\{\overline{C}\}$

m_c: contenu borélien $\mathcal{F} \cap \overline{\mathcal{C}}_c$-régulier dans le sous-$\sigma$-treillis pseudo-topologique $\{\overline{C}\}$, obtenu par restriction de λ_c^* au treillis-booléen $\mathcal{A}_c$ engendré par $\{\overline{C}\} \cap \mathcal{F}$ dans $\{\overline{\mathcal{C}}\}$ (l'existence de m_c et le fait qu'il soit un prolongement de λ_c résulte du théorème 8-6).

(11-4-i) $\quad C < C' \Rightarrow \lambda_c^*(X) = \lambda_{c'}^*(X)$ pour tout $X < C$.

Nous utilisons pour cela la propriété I-3-8 (cf. aussi [5] p. 190). Il nous suffit donc de prouver que, quel que soit $0 \in \mathcal{O}$, $\overline{0 \wedge C}$ est $\lambda_{c'}$-capacitable. Or $\lambda_{c'}$ étant restriction au treillis $\{\overline{C'}\} \cap \mathcal{C}$ du contenu $m_{c'}$ est une valuation sur $\{\overline{C'}\} \cap \mathcal{C}$. C'est donc une capacité monotone $\mathcal{M}_\infty$ et l'intersection des deux somas $0 \wedge C'$ et $\overline{C}$, capacitables pour $\lambda_{c'}$, respectivement comme ouvert dans $\{\overline{C'}\}$ et comme élément de $\{\overline{C'}\} \cap \mathcal{C}$, est $\lambda_{c'}$-capacitable.

Nous déduisons de (11-4-i) l'implication suivante:

$$\text{(11-4-}i\text{)} \qquad C < C \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{A}_c \subset \mathcal{A}_{c'} \\ X \in \mathcal{A}_c \Rightarrow m_c(X) = m_{c'}(X). \end{cases}$$

Nous formons le treillis-booléen $\mathcal{T}(\{\overline{C}\} \cap \mathcal{F})$ engendré par les fermés $\mathcal{C}_s$-bornés. On a immédiatement:

$$\mathcal{T}(\overline{\mathcal{C}} \cap \mathcal{F}) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \mathcal{A}_c = \mathcal{A}.$$

$\mathcal{C}$ étant filtrant pour $<$, toute famille finie extraite de $\mathcal{A}$, appartient à un même $\mathcal{A}_c$ pour C convenable. On en déduit immédiatement que la fonction m définie sur $\mathcal{A}$ par $m(M) = m_c(M)$ pour tout C tel que $M \in \mathcal{A}_c$ est additive sur $\mathcal{A}$. C' est donc un contenu, le fait qu'il soit $\overline{\mathcal{C}}$-régulier résulte de sa définition même et du théorème 8-6.

DÉMONSTRATION DE b): Si λ vérifie localement $[\Omega]$, on peut remplacer m_c par la mesure μ_c restriction de λ^* au σ-treillis-booléen $\mathcal{B}_c$ engendré par $\{\overline{C}\} \cap \mathcal{F}$ dans $\{\overline{C}\}$ (théorèmes 9-2 et 8-6). On considère de même $\bigcup_{C \in \mathfrak{C}} \mathcal{B}_c = \mathcal{B}_0$. Cet ensemble $\mathcal{B}_0$ est un treillis-booléen et la fonction m définie sur $\mathcal{B}_0$ par $m(M) = \mu_c(M)$ pour tout C tel que $M \in \mathcal{B}_c$ est un contenu σ-additif (en effet, si une suite dénombrable $(M_n) \in \mathcal{B}_0^N$ a pour réunion $M \in \mathcal{B}_c$, on a $M_n \in \mathcal{B}_c$ quel que soit n et la σ-additivité de m résulte de celle de μ_c).

Comme le σ-treillis-booléen $\mathcal{B}$ engendré par $\overline{\mathfrak{C}} \cap \mathcal{F}$ coincide avec celui engendré par $\mathcal{B}_0$, la possibilité de prolonger m en une mesure sur $\mathcal{B}$, et l'unicité résultent d'un théorème classique (voir [8]).

La fin de la proposition résulte de la σ-additivité de μ, de la $\mathfrak{C}$-régularité de μ_c, et enfin du fait que tout $M \in \mathcal{B}$ est réunion d'une suite croissante (M_n) extraite de $\mathcal{B}_0$ (cf. prop. II-8-4-b).

CHAP. III

APPLICATIONS DANS LE CAS TOPOLOGIQUE

Dans tout ce chapitre III, T désignera un espace topologique, quelconque dès lors que l'on ne précisera pas explicitement ses propriétés.

1 – Définitions et lemmes fondamentaux.

1.1 Une pseudo-topologie $(\mathcal{O}, \mathcal{F})$ sur un sous-σ-treillis booléen de l'ensemble des parties de T sera dite extraite de la topologie de T si $\mathcal{O}$ est constitué par des ouverts de T et $\mathcal{F}$ par des fermés de T.

Lorsqu'on ne précisera aucune pseudo-topologie $(\mathcal{O}, \mathcal{F})$ on entendra implicitement que l'on considère la pseudo-topologie constituée par la topologie elle-même sur l'ensemble de toutes les parties de T.

1.2 On rappelle qu'on appelle G_δ tout ensemble $\subset T$, intersection dénombrable d'ouverts de T.

On appellera espace séparé, ou (T_2) ou de Hausdorff, tout espace satisfaisant à l'axiome de séparation (T_2).

Nous considèrerons également des espaces (T_3) et des espaces (T_4). (Pour les définitions, voir Bourbaki, topologie générale Dictionnaire).

Pour les définitions de quasi-compact (bikompakt) et compact voir Bourbaki, Topologie générale. Tout compact est un espace T_2, T_3 et T_4.

Nous rappellerons un résultat donné dans [5] p. 181-182 lorsque T est séparé mais qui se transpose immédiatement dans le cas d'un espace T topologique quelconque (seules interviennent en effet les topologies induites sur les ensembles envisagés):

1.3 Lemme: *Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de sous-espaces (T_4) de T topologique quelconque, possédant la propriété suivante: quel que soit l'ensemble $K \subset C \in \mathcal{C}$, K étant fermé dans le sous-espace C, et quel que soit le voisinage V de K dans T, il existe $C' \in \mathcal{C}$ tel que $K \subset C' \subset C \cap V$, alors $\mathcal{C}$ est riche pour la topologie de T.*

Si l'on se rappelle la propriété suivante: quels que soient les compacts K_1 et K_2 d'un espace topologique T, tels que $K_1 \subset K_2$, et quel que soit l'ouvert U dans T contenant K_1, il existe un compact K' tel que $K_1 \subset K' \subset U \cap K_2$, K' étant en outre un G_δ dans le sous-espace K_2 de T, et par conséquent un G_δ dans T si K_2 est lui-même un G_δ dans T, on voit que l'ensemble des compacts qui sont des G_δ est riche pour la topologie de T, et que l'on a même la propriété suivante dans un espace topologique quelconque:

1.4 Lemme: *Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de G_δ compacts dans un espace topologique T, possédant la propriété suivante: « quel que soit le G_δ compact $K \subset C \in \mathcal{C}$ et quel que soit le voisinage ouvert U de K (dans T) il existe $C' \in \mathcal{C}$ tel que $K \subset C' \subset C \cap U$ », alors $\mathcal{C}$ est riche pour la topologie de T.*

2 – Généralisation des théorèmes de Halmos et Bourbaki à un espace de Hausdorff quelconque.

2.1 Nous appellerons théorème de Halmos le théorème (E) de [8] p. 234 qui est un théorème de génération de mesure. Le théorème (A) de [8] p. 239 qui est un théorème de prolongement de fonction d'ensembles en mesure est inclus manifestement dans le théorème de [1] p. 165 que nous désignons dans ce qui suit par théorème de Bourbaki.

2.2 Nous désignerons par $\mathcal{K}$ l'ensemble des parties compactes de T. T étant séparé, les ensembles de $\mathcal{K}$ sont fermés et $\mathcal{K}$ est un idéal dans le δ-treillis des fermés de T. Nous désignerons par $\mathcal{K}_0$ l'ensemble des G_δ compacts.

La facon dont les définitions classiques lorsque T est localement compact se relient à nos définitions est évidente:

2.3 *Une mesure de Baire au sens de* [8] *est une mesure pseudo-Borélienne* $\mathcal{K}_0$-régulière (cf. la définition en II-8-1) lorsque l'on prend pour $\mathfrak{R}$ et pour pseudo-topologie extraite de la topologie de T la pseudo-topologie définie à I-2-3-*e*, cette mesure étant assujettie en outre à être finie sur les compacts.

2.4 Une mesure de Borel régulière au sens de [8] est une mesure pseudo-Borélienne, $\mathcal{K}$-régulière au sens précédemment défini, lorsque l'on prend pour $\mathfrak{R}$ et pour pseudo-topologie extraite de la topologie de T, la pseudo-topologie définie à I-2-3-*c*, cette mesure étant en outre assujettie à être finie sur $\mathcal{K}$.

2.5 La mesure de Carathéodory associée à une mesure de Radon sur T, n'est autre qu'une mesure de Carathéodory $\mathcal{K}$-régulière (voir la définition en II-8-3), finie sur $\mathcal{K}$.

2.6 En vertu du lemme 1-3 ci-dessus l'étendue de Halmos est une étendue sur $\mathcal{K}$ au sens de II-1-1. En vertu de II-5-1 et de la remarque 2-4 ci-dessus, le théorème de Halmos résulte de nos théorèmes 9-2 et 8-6-*a* et de la proposition annexe 9-3.

2.7 Nous avons montré en II-2-2 que si une fonction λ croissante est définie sur un ensemble $\mathcal{E}$ de somas stable par $\vee$ et $\mathcal{K}$-dense, l'ensemble $\mathcal{E}$ est λ-riche.

La fonction définie dans [1] p. 164-165 est donc une étendue $\mathcal{K}$-continue sur un ensemble $\mathcal{E}$ de parties $\mathcal{K}$-dense, $\mathcal{K}$ étant en outre normalement séparé (voir définition en II-3-2). En vertu de II-5-2, λ est $\mathcal{K}$-*-régulière, et le théorème de Bourbaki est une conséquence immédiate des théorèmes II-9-2 et II-8-6-*b* et *c*.

Les exemples précédents montrent comment en faisant varier les hypothèses particulières entraînant respectivement la *-régularité d'une étendue et la condition [Ω] on peut obtenir des énoncés divers. Par ailleurs le choix de la pseudo-topologie extraite, bien qu'il ne soit pas essentiel dans la différence entre les 2 théorèmes évoqués ci-dessus en 2-6 et 2-7 (on sait en effet qu'il y a correspondance univoque entre mesure de Carathéodory associée à une mesure de Radon, mesure de Borel régulière au sens de [8] et mesure de Baire), peut dans d'autres cas permettre de multiplier les résultats de caractère particulier (voir ci-dessous 4-2). Pour limiter le nombre des énoncés, et en raison du rôle particulièrement important joué par les compacts dans un espace de Hausdorff, nous donnerons seulement pour un tel espace l'énoncé suivant, généralisant les théorèmes de Halmos et Bourbaki (valables seulement pour un espace localement compact), et mettant en évidence le rôle important joué par les compacts qui sont des G_δ.

2.8 THÉORÈME: *Soit* $\mathcal{C}$ *un ensemble de compacts (resp.* G_δ *compacts) dans l'espace topologique de Hausdorff* T*, possédant la propriété suivante: quel que soit le compact (resp. le* G_δ *compact)* $K \subset C \in \mathcal{C}$*, et quel que soit le voisinage ouvert* U *de* K*, il existe* $C' \in \mathcal{C}$ *tel que* $K \subset C' \subset C \cap U$.

2-8-*a* *Si* λ *est une fonction croissante simplement additive et simplement sous-additive sur* $\mathcal{C}$ *supposé stable pour l'union finie et contenant* $\varnothing$ *la fonction* λ^* *définie sur l'ensemble des ouverts par* $\lambda^*(0) = \sup\{\lambda(C) : C \subset 0, C \in \mathcal{C}\}$ *et sur l'ensemble des parties de* T *par:*

$$\lambda^*(X) = \inf\{\lambda(0) : 0 \supset X, 0 \textit{ ouvert}\}$$

est une fonction-mesure dont la restriction au σ*-anneau booléen* $\mathcal{L}$ *des ensembles* λ^**-mesurables est une mesure de Carathéodory* $\mathcal{K}$*-régulière.*

2-8-*b* *Si* λ *est une fonction croissante simplement additive, simplement sous-additive, finie, sur un ensemble* $\mathcal{E}$ *de parties de* T*, stable pour l'union finie et* $\mathcal{C}$*-dense, et si* λ *est* $\mathcal{C}$*-continue (Définition en I-2-5b),* λ *est prolongeable en une mesure de Carathéodory* $\mathcal{K}$*-régulière sur* T*, finie sur* $\mathcal{C}$*. Si* $\mathcal{E}$ *est* $\mathcal{K}$*-dense, cette mesure est l'unique mesure de Carathéodory* $\mathcal{K}$*-régulière prolongeant* λ*, et sa restriction à la tribu des boréliens de* T *est l'unique mesure borélienne* $\mathcal{K}$*-régulière prolongeant* λ*.*

DÉMONSTRATION DE 2-8: $\mathcal{C}$ est riche pour la topologie de T en vertu des lemmes 1-3 et 1-4. Dans les hypothèses de 2-8-*a*, en vertu de (II-5-1), λ est une étendue $\mathcal{C}$-*-régulière. Dans les hypothèses de 2-8-*b*, et par un raisonnement identique à celui fait ci-dessus à 2-7, λ est une étendue $\mathcal{C}$-continue, $\mathcal{C}$-*-régulière et finie sur $\mathcal{E}$. Les conclusions du théorème ci-dessus résultent donc maintenant immédiatement de nos résultats II-9-3-, II-9-2, II-8-5.

3 – Cas où T est topologique quelconque, non-séparé.

Si T n'est plus séparé, les compacts de T ne sont plus nécessairement fermés, et d'autre part la réunion de deux compacts n'est pas nécessairement un compact, c'est pourquoi on introduit couramment l'ensemble $\mathcal{Q}$ des quasi-compacts fermés. Cependant, un quasi-compact n'est pas en général un sous-espace (T_4) de T. On ne sait donc pas si $\mathcal{Q}$ est riche. Toutefois si T est un espace (T_3) (autrement dit quels que soient le fermé F et le point $x \in F$, il existe un voisinage de x et un voisinage de F sans point commun), tout quasi-compact est un sous-espace (T_4).

De même, en général, $\mathcal{Q}$ n'est pas une partie normalement séparée de l'ensemble des parties de T (voir la définition du mot normalement séparé en II-3-2). On ne peut donc pas en général dire qu'une étendue $\mathcal{Q}$-continue sur un ensemble $\mathcal{Q}$-dense $\mathcal{E}$ soit $\mathcal{Q}$-*-régulière. Toutefois si T est un espace (T_3), $\mathcal{Q}$ est un ensemble normalement séparé.

Enfin, si C est un espace topologique uniformisable (cf. Bourbaki) quel que soit le fermé $F \subset C$ et le voisinage ouvert V de F dans C il existe un fermé F' qui est un G_δ et qui est tel que $F \subset F' \subset V$. Si C est quasi-compact F et F' sont des quasi-compacts. Le lemme 1-4 est donc vrai dans un espace uniformisable lorsque l'on remplace le mot compact par le mot quasi-compact fermé.

Nous pouvons donc énoncer:

3.1 Théorème: *Lorsque T est un espace (T_3) les conclusions du théorème* 2-8 *sont vraies lorsque l'on remplace l'ensemble $\mathcal{C}$ du théorème* 2-8 *par un sous-ensemble $\mathcal{K}$ de l'ensemble $\mathcal{Q}$ des quasi-compacts fermés de T, et possédant la propriété suivante: quel que soit le quasi-compact fermé $Q \subset H \in \mathcal{K}$, et quel que soit le voisinage ouvert U de Q, il existe $H' \in \mathcal{K}$ tel que $Q \subset H' \subset H \cap U$.*

Si T est uniformisable, le théorème 2-8 *est vrai si l'on remplace* *partout dans son énoncé: le mot compact par le mot quasi-compact fermé.*

Conformément aux remarques du début de ce §, lorsque T ne satisfait pas à l'un des axiomes de séparation (T_2) ou (T_3), nous *n'* avons plus de condition de richesse analogue à celle fournie par 1-3 pour les quasi-compacts fermés. La $\mathcal{Q}$-continuite n'entraîne plus non plus la λ-richesse. Par ailleurs, nous avons également signalé au début de ce paragraphe que la $\mathcal{Q}$-densité et la $\mathcal{Q}$continuité n'entraînent plus la $\mathcal{Q}$-*-régularité d'une étendue λ sur $\mathcal{E}$. Le lemme suivant donne un exemple d'hypothèse supplémentaire, entraînant la λ-richesse d'un ensemble $\mathcal{E}$ de parties de T.

3.2 LEMME: *Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{Q}$. Si $\mathcal{E}$ est un ensemble de parties de T topologique quelconque, stable pour l'union finie, tel que, quel que soit $E \in \mathcal{E}$, $\{E \cap F\}_{F \in \mathcal{E}}$, contienne une base de la topologie du sous-espace E de T, et si λ est une fonction positive ou nulle, croissante sur $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}$-continue, $\mathcal{E}$ est λ-riche.*

Soit en effet $A \in \mathcal{E}$. Quel que soit $\alpha < \lambda(A)$, il existe par hypothèse $C \in \mathcal{C}$ tel que pour tout $A' \in \mathcal{E}$ et vérifiant $C < A'$ on ait $\lambda(A') \geqslant \alpha$. Soit $(0_1, 0_2) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}$ tel que $A < 0_1 \vee 0_2$. Il existe par hypothèse 2 familles $(E_1^\tau)_\tau$ et $(E_2^\varrho)_\varrho$ extraites de $\mathcal{E}$ telles que $A \cap 0_1 = (\bigcup_\tau E_1^\tau)$ et $A \cap 0_2 = (\bigcup_\varrho E_1^\varrho)$. La réunion de ces deux familles constitue un recouvrement de C par des ouverts dans A. On peut en extraire un recouvrement fini $\{E_1^{\tau_1}, \dots E_p^{\tau_1}, E_2^{\varrho_1}, \dots E_2^{\varrho_p}\}$. Si l'on pose $A_1 = \bigcup_i E_1^{\tau_i}$ et $A_2 = \bigcup_j E_2^{\varrho_j}$ on a $(A_1, A_2) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, $A_1 < 0_1$, $A_2 < 0_2$ et $A_1 \vee A_2 > C$ ce qui entraîne $\lambda(A_1 \vee A_2) \geqslant \alpha$. $\mathcal{E}$ est donc λ-riche.

Nous allons maintenant donner un théorème généralisant les résultats de [9] en ce sens que notre ensemble de départ est supposé seulement stable pour $\cup$, alors que dans [9] il est supposé être un treillis booléen, et en ce sens également que l'espace topologique T que nous envisageons n'est pas nécessairement localement quasi-compact (lokal bikompakt).

3.3 THÉORÈME: *Soit, dans un espace topologique T quelconque, un ensemble $\mathcal{E}$ de parties stable pour l'union finie et contenant $\varnothing$.*

On suppose en outre que, quel que soit $E \in \mathcal{E}$, une base de la topologie du sous-espace E est contenue dans $\mathcal{E}$. Par $\mathcal{C}$ on désigne un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{Q}$ des quasi-compacts fermés dans T.

λ est une fonction définie sur $\mathcal{E}$, positive ou nulle, finie, croissante, nulle en $\varnothing$, simplement additive et simplement sous-additive satisfaisant à l'hypothèse suivante: quel que soit $A \in \mathcal{E}$, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $(0, G, F, E) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} \times \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ tel que $0 < A < F$, $F - 0 < G < E$ avec $\lambda(E) < \varepsilon$ et $F - F \cap G \in \mathcal{C}$.

a) Alors λ se prolonge en une mesure de Carathéodory $\mathcal{Q}$-régulière μ dont la restriction au σ-treillis booléen $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ engendré par $\mathcal{E}$ est l'unique prolongement de λ en cette mesure sur $\mathcal{S}(\mathcal{E})$.

b) Si $\mathcal{E}$ est $\mathcal{Q}$-dense dans l'ensemble des parties de T, λ se prolonge de facon unique en une mesure de Carathéodory $\mathcal{Q}$-régulière (resp. une mesure borélienne $\mathcal{Q}$-régulière).

Il résulte en effet de II-5-3-*a* que λ est $\mathcal{C}$-continue. En vertu du lemme 3.2 ci-dessus $\mathcal{E}$ est λ-riche. λ est donc une étendue sur $\mathcal{E}$. Il résulte alors de II-5-3-*b* que λ est $\overline{\mathcal{C}}$-*-régulière. Les conclusions du théorème résultent alors immédiatement des théorèmes 9-3-*a*, 9-2, 8-6 et 11-4.

4. Un exemple d'utilisation d'une pseudo-topologie extraite d'une topologie donnée.

Nous démontrons d'abord le lemme:

4.1 Lemme: *Soit Δ un σ-treillis booléen. Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ deux parties de Δ satisfaisant aux conditions suivantes:*

(i) quel que soit $H \in \mathcal{H}$ il existe $G \in \mathcal{G}_\sigma$ tel que $H < G$.

(ii) quel que soit $(H, G) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G}$, on a $H - H \wedge G \in \mathcal{H}_{s\delta}$ et $G - G \wedge H \in \mathcal{G}_{d\sigma}$.

Alors les ensembles $\{\varnothing\} \cup \mathcal{G}_{d\sigma}$ et $\{\varnothing\} \cup \mathcal{H}_{s\delta}$ sont les ensembles d'ouverts et de fermés d'une pseudo-topologie sur le σ-idéal $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{G}}_\sigma$ engendré par $\mathcal{G}$ dans Δ.

(PT_3) est vrai d'après la définition de $\mathcal{R}$.

(PT_1) résulte des relations

$$(\mathcal{H}_{s\delta})_s \subset \mathcal{H}_{ss\delta} = \mathcal{H}_{s\delta}\,, \qquad (\mathcal{H}_{s\delta})_\delta = \mathcal{H}_{s\delta}$$
$$(\mathcal{G}_{d\sigma})_d \subset \mathcal{G}_{dd\sigma} = \mathcal{G}_{d\sigma} \quad \text{et} \quad (\mathcal{G}_{d\sigma})_\sigma = \mathcal{G}_{d\sigma}.$$

(PT_2) résulte des identités:

$$(\bigvee_i A_i) - (\bigvee_i A_i) \wedge (\bigwedge_j B_j) = \bigvee_i \bigvee_j (A_i - A_i \wedge B_j)$$

et

$$\bigwedge_i A_i - (\bigwedge_i A_i) \vee (\bigvee_j B_j) = \bigwedge_i \bigwedge_j (A_i - A_i \wedge B_j)$$

valables pour des ensembles d'indices $\{i\}$ et $\{j\}$ dénombrables et pour des familles correspondantes quelconques de somas (A_i) et (B_j). Il suffit en effet d'appliquer deux fois ces identités pour voir successivement que $\mathcal{K}_s$ et G_δ satisfont à (ii) puis que $\mathcal{K}_{s\delta}$ et $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$ satisfont à (ii) ce qui prouve (PT_2).

Nous déduisons de ce lemme la proposition suivante:

4.2 Proposition: *Soit $\mathcal{G}$ un ensemble d'ouverts dans un espace topologique T satisfaisant aux hypothèses suivantes:*

(G_1) *$\mathcal{G}$ est stable pour l'union finie et l'intersection finie*
(G_2) *quel que soit $(0_1, 0_2) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ on a $0_1 \cap \overline{\complement 0_2} \in \mathcal{G}$*
(G_3) *Les éléments de $\mathcal{G}$ sont relativement quasi-compacts.*

Sur $\mathcal{G}$ est définie une fonction monotone croissante λ, nulle en $\varnothing$, sous-additive et additive (simplement) possédant en outre la propriété:

(G_4) *Quel que soit $G \in \mathcal{G}$ et quel que soit ε, il existe $0 \in \mathcal{G}$ tel que $\overline{\mathcal{G}} - \mathcal{G} \subset 0$ avec $\lambda(0) < \varepsilon$. Alors si $\mathcal{K}$ désigne l'ensemble des adhérences des éléments de $\mathcal{G}$, $(\mathcal{G}_\sigma, \mathcal{K}_{s\delta})$ définit une pseudo-topologie $\mathcal{C}$ sur l'ensemble $\mathcal{R}$ des parties de T $\mathcal{G}_\sigma$-bornées, et λ est prolongeable de facon unique en une mesure μ de Carathéodory $\mathcal{K}_{s\delta}$-régulière. La restriction de μ au σ-treillis booléen engendré par $\mathcal{G}$ est le prolongement minimal unique de λ en une mesure.*

En effet de (G_2) résulte que quel que soit $(0_1, 0_2) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ on a $\overline{0_1} \cap \complement 0_2 = \overline{(0_1 \cap \complement \overline{0_2})} \in \mathcal{K}$. L'hypothèse (ii) du lemme 4-1 est donc vérifiée. L'hypothèse (i) résulte alors de (G_4). En vertu de ce lemme $(\mathcal{G}_\sigma, \mathcal{K}_{s\delta})$ est donc une pseudo-topologie sur $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{G}}_\sigma$.

(G_4) entraîne en outre (cf. II-5-3-a) que λ est $\mathcal{K}_{s\delta}$ continue, pour cette pseudo-topologie. En outre tout ouvert de cette pseudo-topologie étant réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{G}$ et les éléments de $\mathcal{K}_{s\delta}$ étant des $\vee$-compacts, un raisonnement tout à fait analogue à celui du lemme 3-2 prouve que $\mathcal{G}$ est λ-riche. λ est donc $\mathcal{K}_{s\delta}$-$*$-régulière en vertu de II-5-3-*b*. La définition des ouverts de $\mathcal{C}$ et la quasi-compacité des éléments de $\mathcal{K}_{s\delta}$ entraîne immédiatement que $\mathcal{G}$ est $\mathcal{K}_{s\delta}$-dense dans $\mathcal{R}$ pour $\mathcal{C}$. Le théorème est donc une conséquence de II-8-6, II-9-2, II-9-3, II-10-5.

4-3 Remarque: Le résultat précédent est inspiré par un résultat de [16]. Les hypothèses de [16] sont légèrement plus fortes. (G_1) est remplacé par l'axiome (I_1): $\mathcal{G}$ est stable pour $\cup$ et $\cap$, (G_2) est l'axiome (I_2) de [16]. (G_3) est plus faible que l'axiome (I_5) de [16]. (G_4) est immédiatement impliqué par les axiomes (I_4) et (I_5) de [16]. Et enfin la sous-additivité et l'additivité de λ sont des conséquences immédiates de l'axiome (I_3) de [16].

Chap. IV

APPLICATIONS DANS LE CAS NON-TOPOLOGIQUE

1 - Contenu abstrait

On appelle *contenu abstrait* une fonction m à valeurs numériques positives ou nulles, finies, simplement additive, définie sur un treillis booléen $\mathcal{A}$. Si ce treillis booléen $\mathcal{A}$ est plongé dans un σ-treillis booléen $\triangle$, $\mathcal{A}_\sigma$ et $\mathcal{A}_\delta$ sont respectivement les ensembles d'ouverts et de fermés d'une pseudo-topologie sur le σ-treillis booléen $\triangle \cap \overline{\mathcal{A}_\sigma} = \mathfrak{R}$.

Lorsque m est σ-additif, le prolongement de m en une mesure σ-additive au moyen de la mesure extérieure engendrée par m est évidemment un cas particulier de la méthode utilisée à II. La σ-additivité entraîne à elle seule en effet que $\mathcal{A}$ est m-riche, et vu la définition de $\mathcal{O}$, on vérifie facilement que la condition $[\Omega]$ résulte de la σ-additivité également.

Le processus de prolongement utilisé dans II, se présente donc comme incluant les procédés de prolongement très classiques des contenus abstraits.

2 - Contenu adapté de [28]

Dans [10] le cadre pseudo-topologique est donné, la pseudo-topologique étant d'ailleurs une pseudo-topologie de Nikodym (cf. I-2-2-*b*). Nous ne ferons pas toutefois cette légère restriction et considérerons une pseudo-topologie plus générale, telle que nous l'avons définie à I. D'autre part le problème traité dans [10] est celui des prolongements d'un contenu (donc défini sur un treillis booléen) astreint à certaines hypothèses pseudo-topologiques. Nous allons montrer que la richesse des hypothèses pseudo-topologiques permet de supposer une structure algébrique beaucoup plus pauvre de l'ensemble initial de somas (nous considérerons un ensemble de somas stable pour $\vee$ au lieu de considérer un treillis-booléen). Nous affaiblirons en outre légèrement les hypothèses pseudo-topologiques relatives à l'existence d'une base d'ouverts contenue dans $\mathcal{E}$, comme nous l'avons fait à III-3-3.

Le théorème suivant inclut les théorèmes (2-1) et (3-6) de [10].

2.1 Théorème: *Soit $\mathfrak{R}$ un σ-treillis-booléen, muni d'une pseudo-topologie $(\mathcal{O}, \mathcal{F})$. Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble de $\mathcal{F}$ stable pour $\wedge$ et $\mathcal{E} \subset \mathfrak{R}$ stable pour $\vee$. Sur $\mathcal{E}$ est définie une fonction numérique λ finie, positive ou nulle, croissante, simplement additive et simplement sous-additive. Les ensembles $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$ et λ vérifient en outre les hypothèses suivantes.*

(2-1-1) *Quel que soit le recouvrement ouvert dénombrable $\mathcal{G} = \{G_n\}$ de $C \in \mathcal{C}$, il existe une famille dénombrable (0_p) d'ouverts et une famille dénombrable (A_p) d'éléments de $\mathcal{E}$ tels que $C - C \wedge A_p = C - C \wedge 0_p \in \mathcal{C}$ quel que soit p, l'ensemble $\{A_p\}$ constituant en outre un recouvrement $\mathcal{G}$-fin de C.*

(2-1-2) *Quel que soit $A \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $(G, 0, F, E) \in \mathcal{F} \times \mathcal{O} \times \mathcal{O} \times \mathcal{E}$, tel que $0 < A < F$, $F - 0 < G < E$, $F - F \wedge G \in \mathcal{C}$ et $\lambda(E) < \varepsilon$.*

(2-1-3) *Quelle que soit la suite décroissante (C_n) extraite de $\mathcal{C}$, telle que $\bigwedge_n C_n = \varnothing$ et quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une suite (E_n) extraite de $\mathcal{E}$, telle que:*

$$C_n < E_n \quad \text{et} \quad \lim_n \lambda(E_n) < \varepsilon.$$

Alors, $\overline{\mathcal{C}}$ désignant l'idéal engendré dans $\mathcal{F}$ par $\mathcal{C}$, quel que soit $\mathfrak{D}$ avec $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathfrak{D} \subset \mathcal{F}$, λ se prolonge de facon unique en une mesure de Carathéodory μ, $\mathfrak{D}$-régulière. La restriction de μ à $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ est l'extension minimale unique de λ.

Démonstration:

(2-2-1)Implique immédiatement l'axiome (r) de II-9-3-b: en effet si G_{n_p} est l'ouvert de $\mathcal{G}$ tel que $A_p < G_{n_p}$, la famille

$(0_p \wedge G_{n_p})$ constitue un recouvrement ouvert $\mathcal{G}$-fin de C, et on a:

$$C - C \wedge (0_p \wedge G_{n_p}) = (C - C \wedge 0_p) \vee (C - C \wedge G_{n_p}) = \\ = C - C \wedge A_p \in \mathcal{C}.$$

(2-1-3) Entraîne immédiatement l'axiome (δ) de 9-3-*b* en vertu de la $\mathcal{C}$-continuité de λ conséquence de 2-1-2 et II-5-3-*a*).

(2-1-2) Exprime que λ satisfait à l'hypothèse (J) de (II-5-3). Lorsque nous aurons démontré que $\mathcal{E}$ est λ-riche, le résultat découlera alors immédiatement de (II-5-3) et des théorèmes (9-3-*b*), (9-2), (8-6) et (10-5).

Montrons donc que $\mathcal{E}$ est λ-riche, et soit $A < G_1 \vee G_2$ avec $A \in \mathcal{E}$ et $G_j \in \mathcal{O}$. En vertu de (II-5-3-*a*) on peut trouver $C \in \mathcal{C}$ tel que $C < A$ et tel que pour tout $A' \in \mathcal{E}$ tel que $C < A'$ on ait $\lambda(A') \geqslant \lambda(A) - \varepsilon$.

En vertu de (2-1-1) on peut trouver deux suites (A_1^n), (A_2^n) telles que $\{A_i^n\}_{i,n}$ constitue un recouvrement de C par des somas $\in \mathcal{E}$ inclus chacun dans un G_i et un seul et tels que $C - C \wedge A_i^n \in \mathcal{C}$. Nous aurons montré la λ-richesse si nous démontrons la propriété suivante: pour tout recouvrement dénombrable $\{A_j'\}$ de $C \in \mathcal{C}$ au moyen de somas $A_j' \in \mathcal{E}$ tels que $C - C \wedge A_j' \in \mathcal{C}$, il existe une sous-famille finie $(A_1', \dots A_n')$ telle que $\lambda(A_1' \vee \dots \vee A_n') \geqslant \lambda(A) - 2\varepsilon$. Or $(C_n') = (C - C \wedge (\bigvee_{i=1}^{n} A_i'))$ étant une suite décroissante de somas de $\mathcal{C}$ dont l'intersection est $\varnothing$ on peut trouver $(E_n) \in E^N$ telle que $C_n' < E_n$ et $\lim_n \lambda(E_n) < \varepsilon$.

Comme $C < E_n \vee A_1' \vee \dots \vee A_n'$ on a $\lambda(A) - 2\varepsilon \leqslant \lambda(A_1' \vee \dots \vee A_n')$.

Il est donc bien possible de déterminer n de telle sorte que

$$\lambda(A) - 2\varepsilon \geqslant \lambda(A_1' \vee \dots \vee A_n')$$

ce qui prouve la λ-richesse de $\mathcal{E}$, et achève la démonstration.

2.2 Remarque: Dans le cas de [10] l'axiome II* implique notre axiome (2-1-1) avec $A_p = 0_p$. L'axiome (I-3) de [10] implique notre axiome (2-1-2) et l'axiome (I-2) de [10] implique notre axiome (2-1-3).

3. *S*-étendue.

Nous généraliserons la définition d'une S-etendue sur un treillis donné dans [4] p. 397.

3.1 Définition: Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$ deux sous-ensembles d'un σ-treillis-booléen $\mathcal{U}$, l'ensemble $\mathcal{E}$ étant stable pour $\vee$ et pour $\wedge$ (treillis). On suppose en outre que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$ satisfont aux hypothèses:

(*i*) quel que soit $C \in \mathcal{C}$, il existe $G \in \mathcal{E}_\sigma$ tel que $C < G$.

(*ii*) quel que soit $(C, E) \in \mathcal{C} \times \mathcal{E}$, on a $C - C \wedge E \in \mathcal{C}_{s\delta}$ et $E - E \wedge C \in \mathcal{E}_{d\sigma}$.

On dit que la fonction λ définie sur $\mathcal{E}$, à valeurs dans $\overline{R}^+$ croissante, simplement sous-additive, et simplement additive est *une S-étendue sur* $\mathcal{E}$ avec l'ensemble d'approximation $\mathcal{C}$, si, quel que soit $A \in \mathcal{E}$ et $\alpha < \lambda(A)$, il existe $C \in \mathcal{C}$ et $A' \in \mathcal{E}$ tels que $A' < C < A$ et $\lambda(A') \geqslant \alpha$.

3.2 Remarque: La définition donnée dans [4] diffère de la notre en ceci que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$ vérifient les axiomes:

(*i'*) quel que soit $C \in \mathcal{C}$ et $E \in \mathcal{E}$ tels que $C < E$ on a $E - C \in \mathcal{E}$.

(*i''*) quel que soit $C \in \mathcal{C}$ et $E \in \mathcal{E}$ $C - C \wedge E \in \mathcal{C}$.

Or si $\mathcal{C}^0$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ constitué par les C inclus dans un $E \in \mathcal{E}$ au moins, on voit que une *S*-étendue au sens de [4] est une *S*-étendue avec l'ensemble d'approxition $\mathcal{C}^0$ au sens de 3-1 ci-dessus, car (*i*) est vérifié en vertu de la définition de C^0, et (*ii*) résulte de (*i''*) (*i'*) et de l'identité suivante qui est vraie si $C < E' \in \mathcal{E}$:

$$E - E \wedge C = [(E \vee E') - (E \vee E') \wedge C] \wedge E \in \mathcal{E}.$$

3.3 Théorème: *Soit λ une S-étendue sur $\mathcal{E}$ avec la classe d'approximation $\mathcal{C}$. Soit $\mathfrak{R}$ le σ-treillis des somas $\mathcal{E}_\sigma$-bornés.*

a) $\mathcal{E}_\sigma$ et $\mathcal{C}_{s\delta}$ sont respectivement les ensembles d'ouverts et de fermés d'une pseudo-topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathfrak{R}$, pour laquelle λ est $\mathcal{C}$-continue.

b) Si $\mathcal{C}$ est une classe $\wedge$-compacte, $\mathcal{C}_{s\delta}$ est constitué par des $\vee$-compacts fermés.

c) Si $\mathcal{C}$ est une classe $\wedge$-compacte, $\mathcal{E}$ est $\mathcal{C}_{s\delta}$-dense dans $\mathfrak{R}$ pour $\mathcal{T}$, et λ est prolongeable de facon unique en une Mesure de Caratheodory $\mathcal{C}_{s\delta}$-régulière pour la pseudo-topologie $\mathcal{E}$.

DÉMONSTRATION:

a) résulte du lemme III-4-1 et de la condition d'approximation avec l'aide de $\mathcal{C}$ entrant dans la définition d'une S-étendue.

b) résulte du fait que $\mathcal{C}_{s\delta}$ coincide avec $\bar{\mathcal{C}}$, idéal dans $\mathcal{F}$ engendré par $\mathcal{C}$, et de la proposition I-2-4-*c*.

c) Soit $C \in \mathcal{C}_{s\delta}$ et $C < \bigvee_n E_n$ avec $E_n \in \mathcal{E}$. Le soma C étant $\vee$-compact, il existe une sous-famille finie $(E_1, \dots E_p)$ de (E_n) telle que $C < \bigvee_{n=1} E_n \in \mathcal{E}$. Le fait que $\mathcal{E}$ soit $\mathcal{C}_{s\delta}$-dense résulte alors du fait que tout ouvert de $\mathcal{C}$ est par définition de la forme $\bigvee_n E_n$ avec $E_n \in \mathcal{E}$.

Par un raisonnement tout à fait analogue à celui de III-3-2 on voit que $\mathcal{E}$ est λ-riche.

Montrons que λ est $\mathcal{C}$-*-régulière. L'axiome (R_1) est trivialement vérifié puisque pour tout $E \in \mathcal{E}$ on a

$$\lambda^*(E) = \lambda(E) = \sup_{C<E} \lambda^*(C).$$

Pour montrer (R_2) considérons $(C_1, C_2) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ tel que $C_1 \wedge C_2 = \varnothing$. Il nous suffit de montrer que pour tout ouvert G contenant $C_1 \vee C_2$ on a $\lambda^*(G) \geqslant \lambda^*(C_1) + \lambda^*(C_2) - \varepsilon$; ε étant arbitraire > 0. Il suffit par ailleurs d'envisager le cas $\lambda^*(G) < +\infty$, le résultat étant immédiat autrement. Soit $(E, E', C) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{C}$ tel que $E < G - C_2$ $\lambda(E) \geqslant \lambda^*(G - C_2) - \varepsilon/2$, $E' < C < E$, et $\lambda(E') \geqslant \lambda(E) - \varepsilon/2$; on a les relations:

$$\lambda^*(E') \geqslant \lambda^*(G - C_2) - \varepsilon \geqslant \lambda^*(G) - \lambda^*(C_2) - \varepsilon \geqslant \lambda^*(C_1) - 2\varepsilon$$
$$G - C > C_2$$
$$(G - C) \wedge E' = \varnothing\,.$$

D'où, en vertu de l'additivité de λ^* sur $\mathcal{O}$:

$$\lambda^*(G) \geqslant \lambda^*[(G - C) \vee E'] = \lambda^*(G - C) + \lambda^*(E') \geqslant \lambda^*(C_2) + \lambda^*(C_1) - 2\varepsilon$$

ce que nous voulions.

Le théorème résulte donc complètement dans le cas où λ est finie des propositions (9-3-a), (9-2) et (8-6).

Dans le cas où λ n'est pas finie on remarque que pour tout $E \in \mathcal{E}$ on a $\lambda(E) = \lambda^*(E)$ et que, en outre, E est λ^*-mesurable puisque $E \in \mathcal{O}$. La restriction μ de λ^* au σ-anneau $\mathcal{L}$ des somas λ^*-mesurables est donc un prolongement de λ. Comme la restriction λ_0 de λ à l'ensemble $\mathcal{E}_0$ des E tels que $\lambda(E) < +\infty$ est une S-étendue sur $\mathcal{E}_0$, λ_0 se prolonge de facon unique en une mesure de Carathéodory $\mathcal{C}_{s\delta}$-régulière. La mesure μ sur $\mathcal{L}$ étant nécessairement un tel prolongement, elle est unique.

3.4 Remarque: Le fait que $\mathcal{E}$ soit stable pour $\wedge$ intervient dans la démonstration que $\mathcal{E}$ est λ-riche et $\mathcal{C}$-dense. Si on remplace l'hypothèse $\mathcal{E}$ est un treillis par $\mathcal{E}$ est stable pour $\vee$ et λ-riche, en considérant la pseudo-topologie $(\mathcal{E}_{d\sigma}, \mathcal{C}_{s\delta})$, on peut affirmer que λ est prolongeable en une mesure de Carathéodory $C_{s\delta}$-régulière, mais on perd l'unicité d'un tel prolongement. Toutefois si λ est σ-fini, l'extension minimale de λ est unique en vertu de II-10-5.

3.5 Remarque: On obtient également un théorème de prolongement en une mesure de Carathéodory $\mathcal{C}_{s\delta}$ régulière si, dans les hypothèses de 3-3-b, on remplace la $\wedge$-compacité de $\mathcal{C}$ par l'hypothèse suivante: si $(E_n) \in \mathcal{E}^N$, (E_n) étant une suite croissante telle que $\bigvee_n E_n \in \mathcal{E}$ on a $(\bigvee_n E_n) = \lim_n \lambda(E_n)$.

En effet cette condition jointe au fait que tout ouvert 0 est par définition de la forme $0 = \bigvee_p E_p$, $E_p \in \mathcal{E}$ entraîne immédiatement la λ-richesse. La démonstration de la $\mathcal{C}$-*-régularité de λ reste inchangée.

On remplace l'application de 9-3-a par une démonstration directe du fait que λ vérifie $[\Omega]$, en utilisant la σ-additivité de λ sur $\mathcal{E}$ et le fait que tout ouvert est de la forme $\bigvee_p E_p$ avec $E_p \in \mathcal{E}$.

Nous ne pouvons toutefois affirmer l'unicité du prolongement, la $\mathcal{C}_{s\delta}$-densité de $\mathcal{E}$ étant peut-être en défaut. L'extension minimale de λ est toutefois unique si λ est σ-finie (cf. II-10-7).

4. Etendue compacte de J. R. Choksi.

Nous allons donner une application du théorème II-11-4, montrant ainsi qu'il généralise un résultat de [4].

Nous reprenons les définitions de [4]: une étendue compacte sur un treillis $\mathcal{C}$ est une fonction positive ou nulle, croissante, finie λ, définie sur un sous-treillis $\mathcal{C}$ d'un σ-treillis-booléen $\mathfrak{R}$ d'unité R. On suppose en outre que $\mathcal{C}$ est une classe $\wedge$-compacte et λ vérifie les axiomes (E_2) et (E_3) et la condition suivante:

(C) si $C < C'$ avec $(C, C') \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, quel que soit ε il existe $C'' \in \mathcal{C}$ tel que $C'' < C' - C$ et $\lambda(C'') + \lambda(C) \geqslant \lambda(C') - \varepsilon$.

Le théorème 1 de [4] affirme que λ est, sous ces hypothèses, prolongeable en une mesure μ sur le σ-treillis-booléen $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ engendré par $\mathcal{C}$, la mesure μ étant en outre compacte au sens de [11] avec la classe d'approximation $\mathcal{C}_\delta$.

Considérons sur $\mathfrak{R}$ la pseudo-topologie $(\mathcal{O}, \mathcal{F})$ définie par $\mathcal{F} = \mathcal{C}_\delta$ et $\mathcal{O} = \{\varnothing\} \cup \mathcal{G}_\sigma$, $\mathcal{G}$ désignant l'ensemble des complémentaires de somas de $\mathcal{C}$. Si nous montrons que λ est une étendue locale sur $\mathcal{C}$ le résultat mentionné de [4] sera une conséquence immédiate de II-11-4-*b*. Il suffit de montrer que λ vérifie localement (E_1). Or cette démonstration est elle-même faite implicitement dans [4]. Il y est montré en effet (p. 391 ligne 8 à 17) que si $C < (U_1 \vee U_2) \wedge C'$ avec $(U_1, U_2) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ on peut trouver $Q_1 \in \mathcal{C}$ et $Q_2 \in \mathcal{C}$ tels que $Q_1 < C \wedge U_1$, $Q_2 < C \wedge U_2$ et

$$\lambda(Q_1 \vee Q_2) \geqslant \lambda(C) - \varepsilon.$$

Si on considère maintenant $C < [0_1 \vee 0_2] \wedge C'$ avec $(0_1, 0_2) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}$ l'existence de somas Q_1 et $Q_2 \in \mathcal{C}$ tels que $Q_1 < C \wedge 0_1$, $Q_2 < C \wedge 0_2$ et $\lambda(Q_1 \vee Q_2) > \lambda(C) - \varepsilon$, résulte immédiatement du fait que $\mathcal{O} = \mathcal{G}_\sigma$, de la $\vee$-compacité des somas de $\mathcal{C}$ (cf. I-2-4-*d*) et du fait que $\mathcal{G} = \mathcal{G}_s$.

INDEX TERMINOLOGIQUE

INDEX DES SIGNES

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bourbaki N.: « Intégration ». Chap. I à IV. Hermann. Paris 1954.

[2] Cafiero F.: *Problemi di prolungamento per le misure relative in particolari reticolati di insiemi*. Ricerche di Matem., 5 (1956), 273-312.

[3] Cecconi J.: *Sulla estensione delle funzioni additive in un « Lattice »*. Annali Mat. pura ed ap. Serie IV. Tome LI (1960), 373-380.

[4] Choksi J. R.: *On compact contents*. J. London Math. soc., 33 (1958), 387-398.

[5] CHOQUET G.: *Theory of capacities.* Ann. Inst. Fourier, Tome V (1953), p. 131-292.

[6] CHOQUET G.: *Forme abstraite du théorème de capacitabilité.* Ann. de l'institut Fourier, Tome IX (1959), 83-89.

[7] EROHIN V. D.: *A remark on measure theory (En russe) Uspehi.* Mat. Nauk. 16 (1961) n° 3 (99) 175-180. Math. Rew. Vol. 24 n] 2 A, 149.

[8] HALMOS P. R.: Measure theory - New-York. 1950. Van Nostrand.

[9] HAUPT O. und PAUC CHR.: *Bemerkungen über Inhalte und Masze in Lokal bikompakten Raümen.* Acad. der Wiss. u. d. Litt. in Mainz. (1955) 189-218.

[10] HAUPT O. et PAUC CHR.: *Mesures simplement et dénombrablement additives adaptées à une pseudo-topologie.* Journ. de Math. Pures et Appl. T. 38, Fasc. 3 (1959), 313-234.

[11] MARCZEWSKI E.: *On compact measure.* Fund. Math. 40 (1953), 113-124.

[12] METIVIER M.: *Sur les mesures engendrées par certaines classes de fonctions croissantes dans un σ-anneau pseudo-topologique.* C. R. Acad. Sci. Paris, Tome 252 (1961), 491-493 et 654-656.

[13] METIVIER M.: *Limites projectives de mesures. Martingales.* Applications Annali Mat. pura ed ap. (IV) vol. LXIII (1963) 225-352.

[14] NIKODYM O. M.: *Sur les fonctionnelles linéaires.* Pseudo-topologies. C. R. Acad. Sci. Paris. Tome 229 (1949) ,16-18.

[15] PETTIS B. J.: *On the extension of measures.* Annals of Math. 54 (1951) 186-197.

[16] ZAMANSKI M.: *Théorie de l'intégration.* C. R. Acad. Sci. Paris. Tome 244 (1957), 2882-2885.