RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI TORELLI

Un complemento ad un teorema di J. L. Lions sulle equazioni differenziali astratte del secondo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 34 (1964), p. 224-241
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1964__34__224_0>

UN COMPLEMENTO AD UN TEOREMA DI J. L. LIONS SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ASTRATTE DEL SECONDO ORDINE

Nota *) *di* GIOVANNI TORELLI (*a Trieste*) **)

La presente ricerca porta un complemento ad un teorema dimostrato da J. L. Lions durante il corso del C.I.M.E. dell'estate 1963 a Varenna.

Premettiamo alcune convenzioni.

Siano V ed H due spazi di Hilbert, con V contenuto in H algebricamente e topologicamente e denso in H.

Se $f, g \in H$ indichiamo con (f, g) il loro prodotto scalare in H, e con $|f| = (f, f)^{1/2}$ la norma di f in H.

Se $u, v \in V$ indichiamo con $((u, v))$ il loro prodotto scalare in V, con $\| u \| = ((u, u))^{1/2}$ la norma di u in V.

Dunque, essendo l'iniezione di V in H continua, esiste una costante c, tale che $|u| \leqslant c \| u \| \ \forall u \in V$.

Sia data una famiglia di forme $a(t; u, v)$, $t \in [0, T]$, sesquilineari, hermitiane, continue su V; si suppone che $|a(t; u, v)| \leqslant$ $\leqslant M \|u\| \|v\|$, essendo M una costante, e che esistano $\lambda \geqslant 0$ e $\alpha > 0$, costanti, tali che $a(t; u, u) + \lambda |u|^2 \geqslant \alpha \|u\|^2$, $\forall u \in V$. Per le questioni che verranno trattate nel presente lavoro, non sarà restrittivo supporre, in questa relazione, $\lambda = 0$, ciò che senz'altro ammetteremo. Inoltre supponiamo che $t \to a(t; u, v)$ abbia derivata prima continua in $[0, T]$, $\forall u, v$ fissati in V.

---

*) Pervenuto in Redazione il 14 novembre 1963.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Trieste.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche. (Gruppo di ricerca n. 24).

Si ponga

$$\frac{d}{dt}\, a(t;\, u,\, v) = a'(t;\, u,\, v) \qquad\qquad \forall\, u,\, v \in V\ .$$

Sia data una famiglia di operatori hermitiani $B(t) \in \mathrm{L}(H, H)$, tali che $\forall\, f, g \in H,\ t \to (B(t)f, g)$ abbia derivata prima continua in $[0, T]$.

Si chiami W lo spazio delle (classi di) funzioni u, tali che:

$$u \in L^2(O, T;\, V)$$

$$\frac{du}{dt} \in L^2(O, T;\, H)\ .$$

Munito della norma $\| u \|_w = \left\{ \int_0^T (\| u(t) \|^2 + | u'(t) |^2) dt \right\}^{1/2}$, W è uno spazio di Hilbert.

Se $u \in W$, allora, in particolare, u è quasi ovunque uguale ad una funzione continua di $[0, T] \to H$. Si potrà parlare di $u(0)$ e $u(T)$.

Ciò posto, il risultato di J. L. Lions si può esprimere così:

TEOREMA 1: *Siano assegnati*: $u_0 \in V$, $u_1 \in H$, $f \in L^2(O, T;\, H)$, *allora esiste una ed una sola funzione* $u \in W$, *tale che* $u(0) = u_0$ *e tale che si abbia*:

$$\int_0^T [a(t;\ u(t),\ v(t)) - (u'(t),\ v'(t)) + ((B(t)u(t))',\ v(t)) - \\ - (f(t),\ v(t))]dt = (u_1,\ v(0)) \tag{1}$$

$$\forall\, v \in W \quad \text{con} \quad v(T) = 0\ .$$

Risulta $u \in L^\infty(0, T;\, V)$, $u' \in L^\infty(0, T;\, H)$; *inoltre* u, *eventualmente corretta su un insieme di misura nulla, è debolmente continua in* V *ed* u' *è debolmente continua in* H *ed ancora si ha* $u'(0) = u_1$.

Il risultato che verrà qui dimostrato è il seguente:

TEOREMA 2: *La funzione* u, *di cui al teorema* 1 (*debolmente continua in* V *e tale che* $u'(t)$ *sia debolmente continua in* H) *soddisfa* *alla relazione*:

$$
\begin{aligned}
&a(\tau;\ u(\tau),\ u(\tau)) + |\,u'(\tau)\,|^2 - a(0;\ u(0),\ u(0)) - \\
(2)\qquad &-|\,u'(0)\,|^2 - \int_0^\tau a'(t;\ u(t),\ u(t))dt + \\
&+ 2\,\mathrm{Re}\int_0^\tau ((B(t)u(t))' - f(t),\ u'(t))dt = 0 \qquad \forall\, \tau \in [0,\ T]
\end{aligned}
$$

ed inoltre $u(t)$ risulta fortemente continua in V e $u'(t)$ risulta fortemente continua in H.

OSSERVAZIONE: *Il risultato qui trovato non sembra, almeno in una certa direzione, suscettibile di miglioramento.* Infatti si consideri:

$$H = L^2(R),\quad V = L^2(R) \cap W^{1,2}(R)$$

e si prenda nella (1)

$$a(t;\ u,\ v) = \int_R \frac{du}{dx}\,\overline{\frac{dv}{dx}}\,dx\ , \qquad B = 0\ , \qquad f = 0\ .$$

Ovviamente si tratta di una formulazione generalizzata del problema dei valori iniziali per l'equazione delle corde vibranti. Se $\varphi \in V$ allora la funzione $u(t) = u(x, t) = \varphi(x - t)$ è soluzione del problema, soddisfacente alle condizioni iniziali:

$$
\begin{aligned}
u(0) &= u(x,\ 0) = \varphi(x) \\
u'(0) &= u'(x,\ 0) = -\,\varphi'(x)\,;
\end{aligned}
$$

pertanto $u(0) \in V$, $u'(0) \in H$.

Tuttavia è chiaro che la soluzione trovata $u(x, t)$, in generale, non avrà derivate seconde, neppure localmente sommabili. Pertanto non si potrà dire, ad esempio, che $u''(t)$ appartenga a $L^p(H)$ per alcun $p \geqslant 1$.

Nel primo paragrafo si dimostra la continuità forte di $u(t)$ in V e di $u'(t)$ in H, ammessa la validità della relazione (2).

Nel secondo paragrafo si dimostra la relazione (2). Questa dimostrazione sarà ottenuta con una tecnica suggerita da precedenti ricerche di G. Prodi e J. L. Lions *). Detta tecnica risulta qui più elaborata, dato il tipo più complesso della questione.

§ **1.** – Premettiamo due lemmi:

LEMMA 1: *Sia* $a(t; u, v)$, $t \in [0, T]$, *una famiglia di forme sesquilineari, hermitiane, tale che* $|a(t; u, v)| \leqslant M \| u \| \, \| v \|$. *Inoltre* $a(t; u, v)$ *abbia derivata prima continua, rispetto a* t, *per tutti i valori* $u, v \in V$. *Allora esiste una costante* N *tale che* $\forall u$, $v \in V$, *per ogni coppia* $t' t''$ *si abbia*:

$$| a(t''; u, v) - a(t'; u, v) | \leqslant N \, | t'' - t' | \; \| u \| \; \| v \| .$$

Si ponga infatti $a(t; u, v) = ((A(t)u, v))$. $A(t)$ sarà un operatore hermitiano in V tale che $\| A(t) \|_{V \to V} \leqslant M$.

Si vuole dimostrare che, per ogni coppia $t'_n t''_n$ $(t'_n \neq t''_n)$

$$\frac{1}{| t''_n - t'_n |} \| A(t''_n) - A(t'_n) \|_{V \to V} \tag{3}$$

è limitata. Se ciò non accade esiste una successione di coppie t', t'' tali che $\frac{1}{| t''_n - t'_n |} \| A(t''_n) - A(t'_n) \|_{V \to V}$ diverge. Si può estrarre da questa successione una sottosuccessione di coppie, che, per semplicità, saranno indicate con gli stessi simboli $\{t'_n, t''_n\}$, tali che $\{t'_n\}$ e $\{t''_n\}$ convergano entrambe. Ora, se t'_n e t''_n tendono a due limiti diversi l'espressione (3) risulta senz'altro limitata, se invece $\lim\limits_{n \to \infty} t'_n = \lim\limits_{n \to \infty} t''_n = t_0$ risulta immediatamente, dal fatto

---

*) G. PRODI: « Rassegna di ricerche intorno alle equazioni di Navier-Stokes » — Istituto di Matematica dell'Università di Trieste — quaderno N. 2, (1959).

J. L. LIONS e G. PRODI: « Un Théorème d'esistence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2 » – C.R.A.S. Paris, 248, 3519-3521, (1959).

che $a(t; u, v)$ ha derivata prima continua, che:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{t''_n - t'_n}(A(t''_n) - A(t'_n))u,\ v\right)\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{t''_n - t'_n}\cdot[a(t''_n;\ u,\ v) - a(t'_n;\ u,\ v)]\right) = a'(t_0;\ u,\ v)\ .$$

Esistendo il limite ora scritto qualunque siano u e v, e perciò per ogni u fissato qualunque sia v, si ottiene, applicando il principio della limitatezza uniforme, che:

$$\left\|\frac{1}{t''_n - t'_n}(A(t''_n) - A(t'_n))u\right\|$$

è limitato $\forall\ u \in V$.

Data l'arbitrarietà di u, ancora per lo stesso principio, si ha che

$$\left\|\frac{1}{t''_n - t'_n}(A(t''_n) - A(t'_n))\right\|_{V\to V}$$

è limitato, da cui per assurdo la tesi.

OSSERVAZIONE: *Dalla dimostrazione risulta che* $|\,a'(t; u, v)\,| \leqslant \leqslant N\,\|\,u\,\|\ \|\,v\,\|$. *Pertanto risulta definito un operatore* $A'(t)$ *in* V *tale che* $a'(t;\ u,\ v) = ((A'(t)u,\ v)),\quad \forall\, u,\ v \in V$ *essendo* $\|\,A'(t)\,\|_{V\to V} \leqslant N$.

LEMMA 2: *Siano* $\varphi(t)$ *e* $\psi(t)$ *due funzioni reali semicontinue inferiormente in* t_0; *la loro somma sia continua*; *allora ciascuna di esse è continua in* t_0.

Infatti preso $\varepsilon > 0$ arbitrario, esiste un intorno di t_0 tale che in esso

$$\psi(t) - \psi(t_0) \geqslant -\varepsilon\ ;$$

allora

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) \leqslant \varphi(t) - \varphi(t_0) + \psi(t) - \psi(t_0) + \varepsilon =$$
$$= (\varphi(t) + \psi(t)) - (\varphi(t_0) + \psi(t_0)) + \varepsilon\ ,$$

ma, per la continuità della somma:

$$\overline{\lim_{t\to t_0}}\ (\varphi(t) - \varphi(t_0)) \leqslant \varepsilon$$

da cui per l'arbitrarietà di ε

$$\overline{\lim_{t \to t_0}}\ \varphi(t) = \varphi(t_0)$$

la quale, unita alla $\underline{\lim}_{t \to t_0}\ \varphi(t) \geqslant \varphi(t_0)$, dà la continuità di φ nel punto t_0.

Da ciò si ricava immediatamente anche la continuità di ψ.

Veniamo ora a dimostrare la continuità (forte) di $u(t)$ in V e di $u'(t)$ in H ammettendo la validità della relazione (2). Ricordando che $u(t)$ è debolmente continua in V e che $u'(t)$ è debolmente continua in H basterà dimostrare, in base a note proprietà, la continuità di $\| u(t) \|$ e di $| u'(t) |$.

Dalla relazione (2) risulta che $a(t; u(t), u(t)) + | u'(t) |^2$ è funzione continua (anzi assolutamente continua) di t in quanto somma di integrali e costanti. Sia $t_0 \in [0, T]$; in virtù del lemma 1 e della limitatezza di $u(t)$ in V, si vede facilmente che $a(t_0; u(t), u(t)) + | u'(t) |^2$ è funzione continua di t in t_0. Ora la forma sesquilineare hermitiana $a(t_0; u, v)$ può essere considerata come un prodotto scalare in V e vi genera una norma equivalente a quella preesistente, per la relazione $\alpha \| u \|^2 \leqslant a(t; u, u) \leqslant M \| u \|^2$. Allora $u(t)$ risulta debolmente continua anche rispetto al nuovo prodotto scalare, pertanto $a(t_0; u(t), u(t))$ risulta semicontinua inferiormente, per la nota proprietà della convergenza debole; ma anche $| u'(t) |^2$ risulta semicontinua inferiormente. Applicando il lemma 2 con $\varphi(t) = a(t_0; u(t), u(t))$ e $\psi(t) = | u'(t) |^2$ risulta che entrambe queste funzioni sono continue nel punto t_0. Concludendo $u'(t)$ risulta continua in t_0 secondo la norma di H e $u(t)$ continua in t_0 secondo la norma indotta dalla $a(t_0; u, v)$, pertanto anche secondo la norma di V.

§ **2.** – Data una qualunque funzione $\varphi(t)$, definita in $[0, T]$, indichiamo con $\tilde{\varphi}(t)$ la funzione ottenuta prolungando la φ con valori nulli fuori di questo intervallo. Prolunghiamo invece $a(t; u, v)$ e $B(t)$, (senza cambiare i simboli per semplicità), ponendo:

$$a(t;\ u,\ v) = a(0;\ u,\ v) \qquad \text{per} \quad t < 0$$
$$a(t;\ u,\ v) = a(T;\ u,\ v) \qquad \text{per} \quad t > T$$

ed analogamente:

$$\begin{aligned} B(t) &= B(0) \qquad \text{per} \quad t < 0 \\ B(t) &= B(T) \qquad \text{per} \quad t > T \,. \end{aligned}$$

Sia τ un punto dell'intervallo $]0, T]$ e δ tale che $0 < \delta < < \tau - \delta < \tau \leqslant T$.

Sia θ_δ una funzione reale così definita:

$$\begin{aligned} \theta_\delta(t) &= 1 \qquad \text{per} \quad \delta \leqslant t \leqslant \tau - \delta \\ \theta_\delta(t) &= 0 \qquad \text{per} \quad t \leqslant 0 \quad \text{e per} \quad t \geqslant \tau \,; \end{aligned}$$

$\theta_\delta(t)$ sia lineare in t per $0 \leqslant t \leqslant \delta$ e per $\tau - \delta \leqslant t \leqslant \tau$.

Si indichi con J_ε (ε reale > 0) un operatore di regolarizzazione rispetto alla variabile t. Precisamente poniamo:

$$(J_\varepsilon s)(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} k \left(\frac{t - \eta}{\varepsilon}\right) s(\eta) d\eta$$

ove $k(t)$ è una funzione non negativa, pari, indefinitamente derivabile, nulla fuori dell'intervallo $[-1, +1]$ e tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} k(t) dt = 1$.

Tale operatore è autoaggiunto sia in $L^2(R, H)$ che in $L^2(R, V)$ e commuta con la derivazione rispetto a t. Nel seguito si porrà

$$(J'_\varepsilon s)(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} k' \left(\frac{t - \eta}{\varepsilon}\right) s(\eta) d\eta = (J_\varepsilon s)'(t) \,.$$

Se $s \in L^2(R, V)$, per $\varepsilon \to 0$, $J_\varepsilon s$ converge verso s in $L^2(R, V)$; se $\frac{ds}{dt} \in L^2(R, H)$, $J'_\varepsilon s$ converge verso $\frac{ds}{dt}$ in $L^2(R, H)$.

Notiamo poi che J_ε^2 è ancora un operatore di regolarizzazione; esso potrà essere rappresentato come convoluzione con un nucleo avente le stesse proprietà della funzione k sopra considerata eccetto, ovviamente, per quanto riguarda il supporto.

Ciò premesso, avendo presente la funzione u, soluzione della (1), consideriamo la funzione definita in R

$$\theta_\delta(t)(J_\varepsilon^2\theta_\delta\widetilde{u'})(t) .$$

La restrizione di questa funzione all'intervallo $[0, T]$ appartiene a W; infatti, poichè si ha $(\theta_\delta\widetilde{u})' = \theta_\delta\widetilde{u'} + \theta_\delta'\widetilde{u}$ si può scrivere:

$$\theta_\delta(t)(J_\varepsilon^2\theta_\delta\widetilde{u'})(t) = \theta_\delta(t)(J_\varepsilon^2\theta_\delta\widetilde{u})' - \theta_\delta(t)(J_\varepsilon^2\theta_\delta'\widetilde{u})(t)$$

e si verifica subito che questa funzione, considerata con valori in V, ha derivata continua a tratti. Si può dunque sostituirla in luogo della v nella (1).

Fatta questa sostituzione, si passerà al limite, dapprima per $\delta \to 0$ e poi per $\varepsilon \to 0$, prendendo poi il doppio della parte reale di ambo i membri della relazione ottenuta. Per semplicità di esposizione si eseguiranno queste operazioni separatamente su ciascuno dei termini in cui si decompone ovviamente la (1).

Per quanto visto nel § 1 si ha

$$\int_0^T a(t; u(t), v(t))dt = \int_0^T ((A(t)u(t), \theta_\delta(t)(J_\varepsilon^2\theta_\delta\widetilde{u'})(t)))dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} ((A(t)\widetilde{u}(t), \theta_\delta(t)(J_\varepsilon^2\theta_\delta\widetilde{u'})(t)))dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} ((A(t)\widetilde{u}(t), \theta_\delta(t)(J_\varepsilon^2\theta_\delta\widetilde{u})'(t)))dt -$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} ((A(t)\widetilde{u}(t), \theta_\delta(t)(J_\varepsilon^2\theta_\delta'\widetilde{u})(t)))dt = \mathcal{A} - \mathcal{B} .$$

Si esaminano ora separatamente i due termini. Abbiamo:

$$\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{+\infty} ((A(t)\tilde{u}(t),\ \theta_\delta(t)(J_\varepsilon^2\theta_\delta\tilde{u})'(t)))dt =$$

$$= \int_{+\infty}^{+\infty} ((A(t)\theta_\delta(t)\tilde{u}(t),\ (J_\varepsilon^2\theta_\delta\tilde{u})'(t)))dt$$

questo ricordando che θ_δ è una funzione reale. Ricordando poi come è stato definito J_ε, si ha:

$$\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{+\infty} (((J_\varepsilon A\theta_\delta\tilde{u})(\eta),\ (J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})'(\eta)))d\eta =$$

$$(4) \qquad = \int_{-\infty}^{+\infty} ((A(\eta)(J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})(\eta),\ (J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})'(\eta)))d\eta +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} ((([J_\varepsilon A - AJ_\varepsilon]\theta_\delta\tilde{u})(\eta),\ (J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})'(\eta)))d\eta\ .$$

Si consideri ora il primo integrale. Si vede facilmente che il prodotto scalare in V: $((A(\eta)(J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})(\eta),\ (J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})(\eta)))$ risulta funzione assolutamente continua di η e che vale la relazione:

$$\frac{d}{d\eta} ((A(\eta)(J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})(\eta),\ (J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})(\eta))) =$$
$$= ((A'(\eta)(J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})(\eta),\ (J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})(\eta))) +$$
$$+ ((A(\eta)(J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})'(\eta),\ (J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})(\eta))) +$$
$$+ ((A(\eta)(J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})(\eta),\ (J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})'(\eta)))$$

ed essendo $A(\eta)$ hermitiano si ottiene:

$$2\,Re\,((A(\eta)(J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})(\eta),\ (J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})'(\eta))) =$$
$$= \frac{d}{d\eta} ((A(\eta)(J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})(\eta),\ (J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})(\eta) -$$
$$- ((A'(\eta)(J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})(\eta),\ (J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})(\eta)))\ ;$$

quindi dal primo integrale che si trova a secondo membro nella (4) si ricava:

$$2\,Re\int_{-\infty}^{+\infty}((A(\eta)(J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})(\eta),\ (J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})'(\eta)))d\eta =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}((A'(\eta)(J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})(\eta),\ (J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})\,(\eta)))d\eta\ ;$$

ora $\lim\limits_{\delta\to 0}\ (J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})(\eta) = (J_\varepsilon\theta_0\tilde{u})(\eta)$ uniformemente rispetto a η in V, ove con θ_0 si indica la funzione caratteristica dell'intervallo $[0, \tau]$; quindi l'ultima espressione considerata tende per $\delta\to 0$ a:

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}((A'(\eta)(J_\varepsilon\theta_0\tilde{u})(\eta),\ (J_\varepsilon\theta_0\tilde{u})(\eta)))d\eta\ ;$$

ora

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\int_{-\infty}^{+\infty}((A'(\eta)(J_\varepsilon\theta_0\tilde{u})(\eta),\ (J_\varepsilon\theta_0\tilde{u})(\eta)))d\eta\right\} =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}((A'(\eta)\theta_0(\eta)\tilde{u}(\eta),\ \theta_0(\eta)\tilde{u}(\eta)))d\eta =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}((A'(\eta)u(\eta),\ u(\eta)))d\eta$$

ciò in conseguenza al fatto che $J_\varepsilon\theta_0\tilde{u}$ tende a $\theta_0 u$ in $L^2(R, V)$ ed inoltre in virtù del lemma 1:

$$\| A'(t) \|_{V\to V} \leqslant N\ .$$

Si consideri ora l'altro integrale che compare a secondo membro nella (4):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}((([J_\varepsilon A - AJ_\varepsilon]\theta_\delta\tilde{u})(\eta),\ (J_\varepsilon\theta_\delta\tilde{u})'(\eta)))d\eta\ .$$

Poichè, per $\delta \to 0$, $\theta_\delta \tilde{u}$ tende a $\theta_0 \tilde{u}$ in $L^2(R, V)$, si verifica immediatamente che:

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} ((([J_\varepsilon A - AJ_\varepsilon]\theta_\delta \tilde{u})(\eta), (J_\varepsilon \theta_\delta \tilde{u})'(\eta)))d\eta =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} ((([J_\varepsilon A - AJ_\varepsilon]\theta_0 \tilde{u})(\eta), (J_\varepsilon \theta_0 \tilde{u})'(\eta)))d\eta .$$

Noi dimostreremo che, per $\varepsilon \to 0$, questo integrale è infinitesimo. Ciò sarà ottenuto scrivendo questa espressione nella forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left(\left(\frac{1}{\varepsilon} [J_\varepsilon A - AJ_\varepsilon]\theta_0 \tilde{u}\right)(\eta), \varepsilon (J_\varepsilon \theta_0 \tilde{u})'(\eta)\right)\right) d\eta$$

e facendo vedere che, per $\varepsilon \to 0$,

(a) $\quad \dfrac{1}{\varepsilon} [J_\varepsilon A - AJ_\varepsilon]\theta_0 \tilde{u}$ è limitato in $L^2(R, V)$

(b) $\quad \varepsilon (J_\varepsilon \theta_0 \tilde{u})'$ tende a zero in $L^2(R, V)$.

Per dimostrare l'asserzione (a) poniamo $\theta_0 \tilde{u} = \varphi$: evidentemente, $\varphi \in L^2(R, V)$. Per t fissato si ha:

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} [J_\varepsilon A - AJ_\varepsilon]\varphi\right)(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} k \left(\frac{t-\eta}{\varepsilon}\right) [A(\eta) - A(t)]\varphi(\eta) d\eta$$

da cui

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} ([J_\varepsilon A - AJ_\varepsilon]\varphi)(t) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon} k \left(\frac{t-\eta}{\varepsilon}\right) \frac{1}{\varepsilon} \| A(\eta) - A(t) \|_{V \to V} \| \varphi(\eta) \| d\eta ;$$

ma, dal momento che $k\left(\dfrac{t-\eta}{\varepsilon}\right)$ si annulla per $|t - \eta| > \varepsilon$, per il lemma 1 questa espressione è maggiorata da

$$N \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon} k\left(\frac{t-\eta}{\varepsilon}\right) \| \varphi(\eta) \| \, d\eta$$

da cui

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} [J_\varepsilon A - A J_\varepsilon]\varphi \right\|_{L^2(R,\, V)} \leqslant N \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon} k\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) dt \, \| \varphi \|_{L^2(R,\, V)} \leqslant N \, \| \varphi \|_{L^2(R,\, V)} .$$

Dimostriamo ora l'asserzione (*b*). Premettiamo l'enunciato dei seguente noto lemma.

Lemma 3: *L'insieme delle funzioni a valori in V, continue e nulle fuori di un intervallo limitato è denso in $L^2(R, V)$.*

Consideriamo la famiglia di applicazioni di $L^2(R, V)$ in sè (dipendente dal parametro ε): $\varphi \to \varepsilon(J_\varepsilon \varphi)'$. Anzitutto, questa famiglia è limitata in norma; infatti, dall'espressione

$$\varepsilon(J_\varepsilon\varphi)'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon} k'\left(\frac{t-\eta}{\varepsilon}\right) \varphi(\eta) d\eta$$

si trae

$$\| \varepsilon(J_\varepsilon\varphi)' \|_{L^2(R,\, V)} \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon} \left| k'\left(\frac{t-\eta}{\varepsilon}\right) \right| \| \varphi \|_{L^2(R,\, V)} d\eta \leqslant K \, \| \varphi \|_{L^2(R,\, V)}$$

avendo posto

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} | \, k'(t) \, | \, dt .$$

Questa famiglia di applicazioni è poi infinitesima su un insieme denso in $L^2(R, V)$, precisamente (lemma 3) quella della funzioni continue e nulle fuori di un compatto. Sia $\overline{\varphi}$ una tale funzione.

Qualunque sia t, si ha:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} k'\left(\frac{t-\eta}{\varepsilon}\right)\overline{\varphi}(\eta)d\eta = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} k'\left(\frac{t-\eta}{\varepsilon}\right)\overline{\varphi}(t)d\eta +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} k'\left(\frac{t-\eta}{\varepsilon}\right)[\overline{\varphi}(\eta)-\overline{\varphi}(t)]d\eta;$$

il primo degli integrali a secondo membro è nullo poichè $\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} k'\left(\frac{t-\eta}{\varepsilon}\right)d\eta = 0$, il secondo è infinitesimo per $\varepsilon \to 0$, uniformemente rispetto a t per la uniforme continuità della $\overline{\varphi}$. Dunque, $\forall\, \varphi \in L^2(R, V)$, $\varepsilon(J_\varepsilon\varphi)'$ è infinitesima in $L^2(R, V)$, per $\varepsilon \to 0$.

Ricapitolando, abbiamo dimostrato che

$$\text{(I)} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} 2\,\mathrm{Re}\,\mathcal{A} = -\int_0^{\tau}((A'(\eta)u(\eta), u(\eta)))d\eta\,.$$

Si esamina ora il termine $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{B} = \int_{-\infty}^{+\infty}((A(t)\tilde{u}(t), \theta_\delta(t)(J_\varepsilon^2\theta_\delta'\tilde{u})(t)))dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}((\theta_\delta(t)A(t)\tilde{u}(t), (J_\varepsilon^2\theta_\delta'\tilde{u})(t)))dt = \int_{-\infty}^{+\infty}(((J_\varepsilon^2\theta_\delta A\tilde{u})(t), \theta_\delta'(t)\tilde{u}(t)))dt\,;$$

ma

$$\lim_{\delta\to 0}(J_\varepsilon^2\theta_\delta A\tilde{u})(t) = (J_\varepsilon^2\theta_0 A\tilde{u})(t)$$

uniformemente rispetto a t in V; allora posto:

$$\sigma_\delta(t) = (J_\varepsilon^2\theta_\delta A\tilde{u})(t) - (J_\varepsilon^2\theta_0 A\tilde{u})(t)\,,$$

si ha $\lim_{\delta\to 0}\|\sigma_\delta(t)\| = 0$ uniformemente rispetto a t.

Si può dunque scrivere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (((J_\varepsilon^2 \theta_\delta A \tilde{u})(t),\ \theta'_\delta(t)\tilde{u}(t)))dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (((J_\varepsilon^2 \theta_0 A \tilde{u})(t),\ \theta'_\delta(t)\tilde{u}(t)))dt + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} ((\sigma_\delta(t),\ (\theta'_\delta \tilde{u})(t)))dt;$$

ora:

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} ((\sigma_\delta(t),\ (\theta'_\delta \tilde{u})(t)))dt = 0$$

perchè:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} ((\sigma_\delta(t),\ (\theta'_\delta \tilde{u})(t)))dt \right| \leqslant \left| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta ((\sigma_\delta(t),\ \tilde{u}(t)))dt \right| + \\ + \left| \frac{1}{\delta} \int_{\tau-\delta}^{\tau} ((\sigma_\delta(t),\ \tilde{u}(t)))dt \right| \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant \tau} \| \sigma(t) \| \sup_{0\leqslant t\leqslant \tau} \| u(t) \|$$

che tende, per quanto detto, a zero.

Ne segue:

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (((J_\varepsilon^2 \theta_\delta A \tilde{u})(t),\ \theta'_\delta(t)\tilde{u}(t)))dt =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (((J_\varepsilon^2 \theta_0 A \tilde{u})(t),\ \theta'_\delta(t)\tilde{u}(t)))dt =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta (((J_\varepsilon^2 \theta_0 A \tilde{u})(t),\ \tilde{u}(t)))dt - \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta} \int_{\tau-\delta}^{\tau} (((J_\varepsilon^2 \theta_0 A \tilde{u})(t), \tilde{u}(t)))dt.$$

Ora $(((J_\varepsilon^2 \theta_0 A \tilde{u})(t), u(t)))$ è una funzione continua di $t \in [0, T]$ per la continuità debole di $u(t)$ e la continuità forte di $(J_\varepsilon^2 \theta_0 A \tilde{u})(t)$ in V; quindi il limite cercato è:

$$(((J_\varepsilon^2 \theta_0 A \tilde{u})(0),\ u(0))) - (((J_\varepsilon^2 \theta_0 A \tilde{u})(\tau),\ u(\tau))) .$$

Facendo tendere ε a zero, si ha:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{(((J_\varepsilon^2\theta_0 A\tilde{u})(0),\ u(0))) - (((J_\varepsilon^2\theta_0 A\tilde{u})(\tau),\ u(\tau)))\} =$$

$$= \frac{1}{2}((A(0)u(0),\ u(0))) - \frac{1}{2}((A(\tau)u(\tau),\ u(\tau))) =$$

$$= \frac{1}{2}a(0;\ u(0),\ u(0)) - \frac{1}{2}a(\tau;\ u(\tau),\ u(\tau)).$$

Infatti:

$$(((J_\varepsilon^2\theta_0 A\tilde{u})(0),\ u(0))) = \left(\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)\theta_0(\eta)A(\eta)\tilde{u}(\eta)d\eta,\ \tilde{u}(0)\right.\right. =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)((\theta_0(\eta)A(\eta)\tilde{u}(\eta),\ u(0)))d\eta =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_{0}^{+\infty} K\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)((A(\eta)\tilde{u}(\eta),\ u(0)))d\eta;$$

ponendo:

$$\varrho(\eta) = ((A(\eta)\tilde{u}(\eta),\ u(0))) - ((A(0)\tilde{u}(0),\ u(0)))$$

possiamo scrivere (per $\varepsilon < \tau$):

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{0}^{\tau} K\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)((A(\eta)\tilde{u}(\eta),\ u(0)))d\eta =$$

$$= \frac{1}{2}((A(0)u(0),\ u(0))) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{0}^{\tau} K\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)\varrho(\eta)d\eta$$

dove $\lim\limits_{\eta\to 0^+}\varrho(\eta) = 0$ per la continuità debole di $A(t)u(t)$ in V', in $[0, T]$.

Per $\varepsilon \to 0$ l'ultimo integrale è evidentemente infinitesimo. Analoghi passaggi si compiono per dimostrare che:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(((J_\varepsilon^2\theta_0 A\tilde{u})(\tau),\ u(\tau))) = \frac{1}{2}a(\tau;\ u(\tau),\ u(\tau)).$$

Concludiamo che:

$$\text{(II)}\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\,[-\mathcal{B}] = \frac{1}{2}\,a(\tau;\ u(\tau),\ u(\tau)) - $$
$$- \frac{1}{2}\,a\,(0;\ u(0),\ u(0))\,.$$

Si considera ora il secondo integrale che compare nella (1)

$$\int_0^T (u'(t),\ [\theta_\delta(J_\varepsilon^2\theta_\delta\widetilde{u}')]'(t))dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (\widetilde{u}'(t),\ [\theta_\delta(J_\varepsilon^2\theta_\delta\widetilde{u}')]'(t))dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\widetilde{u}'(t),\ \theta_\delta'(t)(J_\varepsilon^2\theta_\delta\widetilde{u}')(t))dt + \int_{-\infty}^{+\infty} (\widetilde{u}'(t),\ \theta_\delta(t)(J_\varepsilon^2\theta_\delta\widetilde{u}')'(t))dt$$

e, ricordando sempre che $\theta(t)$ è funzione reale di t

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_\delta'(t)\widetilde{u}'(t),(\ J_\varepsilon^2\theta_\delta\widetilde{u}')(t))dt + \int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_\delta(t)\widetilde{u}'(t),\ (J_\varepsilon^2\theta_\delta\widetilde{u}')'(t))dt = \mathcal{A}' + \mathcal{B}'.$$

Si consideri ora il primo integrale $\mathcal{A}'$; ponendo:

$$\varrho_\delta(t) = (J_\varepsilon^2\theta_\delta\widetilde{u}')(t) - (J_\varepsilon^2\theta_0\widetilde{u}')(t)$$

si può scrivere:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_\delta'(t)\widetilde{u}'(t),\ (J_\varepsilon^2\theta_\delta\widetilde{u}')(t))dt = \lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_\delta'(t)u'(t),\ (J_\varepsilon^2\theta_0\widetilde{u}')(t))dt +$$
$$+ \lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_\delta'(t)\widetilde{u}'(t),\ \varrho_\delta(t))dt = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int_0^\delta (\widetilde{u}'(t),(J_\varepsilon^2\theta_0\widetilde{u}')(t))dt -$$
$$- \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int_{\tau-\delta}^{\tau} (u'(t),\ (J_\varepsilon^2\theta_0\widetilde{u}')(t))dt\,.$$

Infatti si dimostra facilmente che

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}(\theta'_\delta(t)\widetilde{u'}(t),\ \varrho_\delta(t))dt = 0$$

poichè:

$$\left|\frac{1}{\delta}\int_0^\delta (u'(t),\ \varrho_\delta(t))dt\right| \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant\delta}|u'(t)|\sup_{0\leqslant t\leqslant\delta}|\varrho_\delta(t)|$$

ed analogamente si procede per l'altro termine. Si ha:

$$\lim_{\delta\to 0}\mathcal{A}' = (\widetilde{u'}(0),\ (J_\varepsilon^2\theta_0\widetilde{u'})(0)) - (\widetilde{u'}(\tau),\ (J_\varepsilon^2\theta_0\widetilde{u'})(\tau))$$

poichè la funzione $(u'(t), (J_\varepsilon^2\theta_0\widetilde{u'})(t))$ risulta continua in $[0, T]$ per la continuità debole di $u'(t)$ e per la continuità forte di $(J_\varepsilon^2\theta_0\widetilde{u'})(t)$ in H. Procedendo in modo analogo a quanto fatto precedentemente, tenendo sempre conto della continuità debole di $u'(t)$ in H, risulta che:

$$\text{(III)}\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\mathcal{A}' = \lim_{\varepsilon\to 0}\,[(u'(0),\ (J_\varepsilon^2\theta_0\widetilde{u'})(0)) -$$

$$- (u'(\tau),\ (J_\varepsilon^2\theta_0\widetilde{u'})(\tau))] = \frac{1}{2}\,|u'(0)|^2 - \frac{1}{2}\,|u'(\tau)|^2\,.$$

Si considera ora l'integrale $\mathcal{B}'$

$$\mathcal{B}' = \int_{-\infty}^{+\infty}(\widetilde{u'}(t)\theta_\delta(t),\ (J_\varepsilon^2\theta_\delta\widetilde{u'})'(t))dt = \int_{-\infty}^{+\infty}((J_\varepsilon\theta_\delta\widetilde{u'})(\eta),\ (J_\varepsilon\theta_\delta\widetilde{u'})'(\eta))d\eta =$$

(integrando per parti)

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}((J_\varepsilon\theta_\delta\widetilde{u'})'(\eta),\ (J_\varepsilon\theta_\delta\widetilde{u'})(\eta))d\eta =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{((J_\varepsilon\theta_\delta\widetilde{u'})(\eta),\ (J_\varepsilon\theta_\delta\widetilde{u'})'(\eta))d\eta}$$

da cui:

$$2\,Re(\mathcal{B}') = 0\,. \tag{IV}$$

Si passa ora a considerare i rimanenti due integrali della (1):

$$\mathcal{C} = \int_0^T ((Bu)'(t) - f(t),\ \theta_\delta(t)(J_\varepsilon^2\theta_\delta\widetilde{u'})(t))dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\widetilde{(Bu)}'(t) - \widetilde{f}(t),\ \theta_\delta(t)(J_\varepsilon^2\theta_\delta\widetilde{u'})(t))dt$$

$$\lim_{\delta\to 0} \mathcal{C} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\widetilde{(Bu)}'(t) - \widetilde{f}(t),\ \theta_0(t)(J_\varepsilon^2\theta_0\widetilde{u'})(t))dt = \mathcal{D}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{D} = \int_0^\tau ((B(t)u(t))' - f(t),\ u'(t))dt\,;$$

quindi:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \lim_{\delta\to 0}\ \mathcal{C} = \int_0^\tau ((B(t)u(t))' - f(t),\ u'(t))dt; \tag{V}$$

infatti basterà osservare che $\theta_0(J_\varepsilon^2\theta_0\widetilde{u'})$ tende a $\theta_0\widetilde{u'}$ in $L^2(R, H)$.

Infine notiamo che:

$$(u_1,\ v(0)) = (u_1,\ \theta_\delta(t)(J_\varepsilon^2\theta_\delta\widetilde{u'})(t)) = 0\,. \tag{VI}$$

Riunendo i risultati espressi dalle (I), (II), (III), (IV), (V), (VI), si ottiene la (2).