RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LUCIANO DE SIMON

Un'applicazione della teoria degli integrali singolari allo studio delle equazioni differenziali lineari astratte del primo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 34 (1964), p. 205-223

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1964__34__205_0>

UN'APPLICAZIONE DELLA TEORIA DEGLI INTEGRALI SINGOLARI ALLO STUDIO DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI ASTRATTE DEL PRIMO ORDINE

Nota (*) *di* LUCIANO de SIMON (*a Trieste*)(**)

Scopo del presente lavoro è di studiare la sommabilità della derivata della soluzione, $u(t)$, del problema di Cauchy astratto:

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad & u' + Au = f(t)\,, \qquad t \geqslant 0 \\
& u(0) = 0
\end{aligned}
$$

dove si è scritto u' per du/dt ed $f(t)$ è una funzione della variabile reale t, definita per $t \geqslant 0$, con valori in uno spazio di Banach B, ed A un operatore lineare in B. È noto dalla teoria dei semigruppi (e più oltre richiameremo con esattezza questi risultati) che, quando A ed f soddisfano a certe condizioni, è possibile esprimere la soluzione della (1) mediante un integrale del tipo

$$
(2) \qquad u(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)A} f(\tau) d\tau \,,
$$

avendosi inoltre

$$
Au(t) = \int_0^t A e^{-(t-\tau)A} f(\tau) d\tau
$$

qualora si intenda quest'ultimo integrale in senso improprio.

(*) Pervenuto in Redazione il 7 novembre 1963.
Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico - Università - Trieste.

(**) Lavoro finanziato in parte dal European Office of Aerospace Research – USAF Grant AF EOAR 62-7 e in parte dal C.N.R. attraverso il gruppo di ricerca n. 24 del Comitato per la matematica.

Se si suppone che la funzione f sia a p-esima potenza sommabile, con $p > 1$, si dimostra con i metodi della teoria dei semigruppi che, almeno per una certa classe di operatori A, la $u(t)$ è a p-esima potenza sommabile in ogni intervallo $0 \vdash\!\dashv T$. Si pone allora il problema di vedere se sono a p-esima potenza sommabile (localmente o su tutta la semiretta delle t positive) $Au(t)$ e quindi $u'(t)$.

L'osservazione che, nel caso in cui il semigruppo e^{-tA} sia analitico, sussiste la limitazione

$$\| Ae^{-tA} \| \leqslant k/t \qquad (k \text{ costante positiva})$$

suggerisce l'idea di svolgere lo studio del problema in questione impiegando le tecniche sviluppate nella teoria degli integrali singolari. Seguendo questa via si farà vedere nel presente lavoro che la risposta al quesito è affermativa quando l'operatore $-A$ genera un semigruppo analitico e lo spazio B è di Hilbert. A questo fine sarà fondamentale l'utilizzazione di un risultato di J. Schwartz [5] che riferiremo nel seguito.

§ 1. – Prima di iniziare l'esposizione sarà opportuno introdurre i seguenti simboli:

R: Retta reale.

R^+: Semiretta dei numeri reali $t \geqslant 0$

inoltre, detto B uno spazio di Banach:

$L_p(S, B)$: Spazio delle funzioni definite in R, con valori in B, a p-esima potenza sommabile, nulle fuori dell'insieme misurabile $S \subset R$.

$L^0(R^+, B)$: Spazio delle funzioni definite in R, a valori in B, limitate, misurabili, nulle fuori di un insieme limitato contenuto in R^+.

$\mathcal{H}^\alpha(B)$: Spazio delle funzioni hölderiane di esponente $\alpha \in 0 \dashv 1$, nulle fuori di un intervallo contenuto in R^+, a valori in B.

$|x|$: Norma di un elemento $x \in B$.

$$\| f \|_p = \left\{ \int_R | f(t) |^p \, dt \right\}^{1/p} \quad : \text{norma di un elemento di } L_p(S, B).$$

Sia H uno spazio di Hilbert e consideriamo il problema di Cauchy (1) con le seguenti ipotesi su f ed A:

1) f sia una funzione definita in R^+, con valori in H, a p-esima potenza sommabile ($p > 1$):

$$f \in L_p(R^+, H) .$$

2) L'operatore $-A$ sia generatore di un semigruppo analitico; ciò equivale a dire che devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

a) A è chiuso ed il suo insieme di definizione, $\mathfrak{D}A$, è denso in H.

b) Lo spettro di A, $\sigma(A)$, è tutto contenuto in una zona angolare T' del piano complesso definita dalle condizioni

$$|\arg \lambda| \leqslant \frac{\pi}{2} - \omega \; ; \qquad 0 < \omega < \frac{\pi}{2}$$

ciò implica che $\sigma(-A)$ è compreso nella regione T simmetrica di T' rispetto all'asse immaginario.

c) Detta T'_ε la regione angolare definita da

$$|\arg \lambda| \leqslant \frac{\pi}{2} - (\omega - \varepsilon) \; ; \qquad 0 < \varepsilon < \omega$$

ed indicando con T_ε l'insieme simmetrico di T'_ε rispetto all'asse immaginario, si ha

$$\| R(\lambda, -A) \| = \| (\lambda I + A)^{-1} \| \leqslant \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|}, \; \lambda \notin T_\varepsilon$$

essendo M_ε una certa costante positiva che dipende da ε.

Nostro intento sarà di dimostrare che, in queste ipotesi, se $u(t)$ è la funzione (2), è $u(t) \in \mathfrak{D}A$ per quasi tutti i valori di t, risultando inoltre $Au \in L_p(R^+, H)$. In altre parole, faremo vedere che l'applicazione $f \to Au$ muta $L_p(R^+, H)$ in sè (in modo continuo, come emerge dalla dimostrazione). Si osservi che, una volta stabilito questo risultato, è facile dimostrare che la (2) è soluzione del problema (1) e che $u' = f - Au \in L_p(R^+, H)$.

La dimostrazione procederà lungo queste linee. Cominceremo col supporre f funzione hölderiana, facendo vedere che, in questo caso, $Au(t)$ e $u'(t)$ esistono per ogni valore di $t > 0$ e l'equazione differenziale (1) è soddisfatta. Successivamente dimostreremo, con l'ausilio della trasformazione di Fourier, che se $f \in L_2(R^+, H)$, $Au \in L_2(R^+, H)$. Applicando quindi due teoremi (di J. Marcinkiewicz e J. Schwartz) estenderemo il risultato ad ogni valore di p compreso tra 1 e 2. Passeremo infine, per dualità, al caso $p > 2$.

§ **2.** – Supponiamo allora che f sia hölderiana. In tal caso, come è noto, vale il seguente risultato, di cui riportiamo anche una breve dimostrazione per comodità del lettore.

Lemma 2,1: Nelle ipotesi fatte per A, se $f \in \mathcal{K}^\alpha(H)$, il problema (1) ha una (unica) soluzione data da

$$(2') \qquad u(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)A} f(\tau) d\tau \, .$$

Dim.: Proviamo anzitutto che $u(t) \in \mathfrak{D}A$ per ogni $t > 0$. Poniamo infatti, per δ reale positivo,

$$(3) \qquad u_\delta(t) = \int_0^{t-\delta} e^{-(t-\tau)A} f(\tau) d\tau \, .$$

Si riconosce immediatamente che $u_\delta(t)$ tende a $u(t)$ in H per $\delta \to 0$ ed inoltre che $u_\delta(t) \in \mathfrak{D}A$ per ogni $t > 0$.

Dimostriamo ora che $Au_\delta(t)$ ammette limite in H per $\delta \to 0$. Tale limite, per la chiusura di A, coinciderà con $Au(t)$. Tenendo conto delle osservazioni precedenti, è lecito scrivere

$$Au_\delta(t) = \int_0^{t-\delta} Ae^{-(t-\tau)A}[f(\tau) - f(t)]d\tau + \qquad (4)$$
$$+ A\int_0^{t-\delta} e^{-(t-\tau)A}f(t)d\tau\,.$$

Come si dimostra facilmente ricorrendo ad una opportuna rappresentazione del semigruppo analitico generato da $-A$, vale la limitazione

$$\| Ae^{-tA} \| \leqslant M/t\,, \qquad t > 0$$

con M costante positiva opportuna.

Ciò permette di scrivere

$$| Ae^{-(t-\tau)A}[f(\tau) - f(t)] | \leqslant \frac{M}{t-\tau} | f(\tau) - f(t) | \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{t-\tau} h(t-\tau)^\alpha = C(t-\tau)^{\alpha-1} \qquad \text{con} \quad 0 < \alpha \leqslant 1\,.$$

Il primo dei due integrali che figurano nella (4) è dunque convergente per $\delta \to 0$, in quanto la norma dell'integrando è maggiorata da una funzione sommabile in $0 \mapsto t$.

Per il secondo integrale della (4) si riconosce immediatamente, applicando la formula

$$A\int_s^t e^{-\xi A}d\xi = e^{-sA} - e^{-tA}$$

che è, in virtù della continuità del semigruppo

$$\lim_{\delta\to 0} A\int_0^{t-\delta} e^{-(t-\tau)A}f(t)d\tau = \lim_{\delta\to 0}\, [e^{-tA} - e^{-\delta A}]f(t) = [e^{-tA} - I]f(t)\,.$$

Poniamo dunque

$$Au(t) = A\int_0^t e^{-(t-\tau)A}f(\tau)d\tau = \int_0^t Ae^{-(t-\tau)A}f(\tau)d\tau$$

intendendo però quest'ultimo integrale in senso generalizzato, nel modo visto sopra.

È facile poi constatare che la (2′) è derivabile e che, sostituita nella (1), la rende soddisfatta.

Il seguente lemma fornisce un'informazione, che sarà utile in seguito, riguardo alla convergenza di $Au_\delta(t)$ per $\delta \to 0$.

LEMMA 2,2: Sempre nell'ipotesi che $f \in \mathcal{H}^\alpha(H)$, supposto che $f(t)$ si annulli fuori dell'intervallo $0 \mapsto T$, si ha, indicando ancora con u_δ la funzione (3):

$$Au_\delta(t) = Au(t) \qquad \text{per} \qquad t > T + \delta$$

ed inoltre $Au_\delta(t)$ converge uniformemente verso $Au(t)$ al tendere di δ a zero.

DIM.: Tenendo conto del fatto che $f(t) = 0$ per $t > T$, si trova facilmente che

$$u(t) - u_\delta(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{per} \quad t > T + \delta \\ \displaystyle\int_{t-\delta}^t Ae^{-(t-\tau)A}f(\tau)d\tau \quad \text{per} \quad t \leqslant T + \delta \end{cases}$$

intendendosi sempre l'integrale in senso generalizzato.

Prendendo la norma di questa differenza ed operando come nella dimostrazione del lemma precedente si vede che deve valere la disuguaglianza

$$| u(t) - u_\delta(t) | \leqslant \left| \int_0^\delta Ae^{-\eta A}[f(t-\eta) - f(t)]d\eta \right| +$$
$$+ \left| A\int_0^\delta e^{-\eta A}f(t)d\eta \right| , \qquad t < T + \delta .$$

Il primo di questi due termini si maggiora, tenendo conto che f è hölderiana, con $C \cdot \delta^{\alpha}$ $(0 < \alpha \leqslant 1$, C costante positiva).

Il secondo termine coincide, come abbiamo notato nel lemma 2,1, con $|[I - e^{-\delta A}]f(t)|$, espressione, questa, che converge a zero uniformemente rispetto a t (per $\delta \rightarrow 0$), come si può verificare tenendo presente che la f, essendo continua e nulla fuori di un insieme limitato, ha traiettoria compatta in H.

c.v.d.

§ **3.** – Esaminiamo ora il problema nel caso $p = 2$. Faremo vedere, utilizzando la trasformazione di Fourier-Laplace, che vale la seguente proposizione.

LEMMA 3,1: Se $f \in L_2(R^+, H)$, la funzione u data dalla $(2')$ è soluzione della (1) ed è tale che

$$Au \in L_2(R^+, H) \;, \qquad u' \in L_2(R^+, H) \;.$$

DIM.: Sia g una qualunque funzione tale che, per ogni numero reale $\alpha > 0$, $e^{-\alpha t} g(t) \in L_2(R^+, H)$ (notiamo che, essendo limitato il semigruppo generato da $-A$, la funzione $u(t)$ data dalla $(2')$ gode di questa proprietà). La trasformata di Fourier-Laplace di una tale funzione

$$\widehat{g}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} exp(-2\pi i z\tau) g(\tau) d\tau$$

esiste nel semipiano aperto $\mathfrak{J}(z) < 0$. Posto $z = \xi + i\eta$ converrà considerare la $\widehat{g}$ come funzione della variabile reale ξ dipendente dal parametro η. Scriveremo allora

$$\widehat{g}(z) = {}_{\eta}\widehat{g}(\xi) \;.$$

Per ogni $\eta < 0$ si ha ${}_{\eta}\widehat{g}(\xi) = \mathcal{F}(e^{2\pi\eta t} g(t))$ dove il simbolo $\mathcal{F}$ indica la trasformata di Fourier ordinaria.

Applicando dunque la trasformata di Laplace-Fourier alla $(2')$ si trova facilmente, per $\eta < 0$

$$\widehat{u}(\xi + i\eta) = {}_{\eta}\widehat{u}(\xi) = [2\pi i z I + A]^{-1} \widehat{f}(z)$$

e quindi

$$2\pi iz\widehat{u}(\xi + i\eta) = 2\pi iz[2\pi izI + A]^{-1}\widehat{f}(\xi + i\eta) .$$

Teniamo presente che, essendo $-A$ generatore di un semigruppo analitico vale, per $\eta < 0$, la limitazione

$$\| 2\pi iz[2\pi izI + A]^{-1} \| \leqslant 2\pi \mid z \mid \frac{M_\varepsilon}{2\pi \mid z \mid} = M_\varepsilon .$$

Pertanto, fissato $\eta < 0$, si ha in L_2

$$\| 2\pi iz_\eta \widehat{u}(\xi) \|_2 \leqslant M_\varepsilon \| {}_\eta\widehat{f}(\xi) \|_2 .$$

Si prova facilmente che

$$2\pi iz_\eta \widehat{u}(\xi) = \mathcal{F}(e^{2\pi\eta t}u'(t)) .$$

La relazione trovata permette allora di affermare che, per ogni $\eta < 0$, $e^{2\pi\eta t}u'(t) \in L_2(R^+, H)$ e che

$$\| e^{2\pi\eta t}u'(t) \|_2 \leqslant M_\varepsilon \| e^{2\pi\eta t}f(t) \|_2 ;$$

poichè $f \in L_2(R^+, H)$ facendo tendere η a zero si trova, in virtù di noti risultati

$$\| u' \|_2 \leqslant M_\varepsilon \| f \|_2 .$$

Analogamente si procede per Au.

c.v.d.

Osservazione: Rifacendo i ragionamenti svolti nel corso della dimostrazione del lemma precedente, si prova senza difficoltà che anche per la funzione u_δ definita in (3) continua a valere, con uniformità rispetto a δ, la limitazione

$$\| u'_\delta \|_2 \leqslant M_\varepsilon \| f \|_2 .$$

§ 4. – Consideriamo ora il caso $1 < p < 2$.

Definiamo, in primo luogo, la seguente famiglia di operatori $K(t)$:

$$K(t) = \begin{cases} Ae^{-tA} & \text{se} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{se} \quad t < 0 \end{cases} \tag{5}$$

ed osserviamo che, se $f \in \mathcal{H}^\alpha(H)$, possiamo scrivere

$$Au(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t - \tau) f(\tau) d\tau \tag{6}$$

intendendo sempre l'integrale in senso improprio.

Indichiamo inoltre, se $\delta > 0$, con $\mathcal{K}_\delta$ la convoluzione definita dal nucleo

$$K_\delta(t) = \begin{cases} K(t) & \text{se} \quad t \geqslant \delta \\ 0 & \text{se} \quad t < \delta . \end{cases} \tag{5*}$$

La (6) allora si scrive, sempre se $f \in \mathcal{H}^\alpha(H)$,

$$Au = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{K}_\delta f = \lim_{\delta \to 0} \tilde{f}_\delta$$

con $\tilde{f}_\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_\delta(t - \tau) f(\tau) d\tau.$

Notiamo che $\tilde{f}_\delta(t)$ è definita ed è funzione continua di t qualunque sia $f \in L_p(R^+, H)$. Si tratta ora di far vedere che $\tilde{f}_\delta \in L_p(R^+, H)$ e che la norma di $\mathcal{K}_\delta$ può essere maggiorata in modo indipendente da δ.

Come abbiamo accennato nella premessa, utilizzeremo un risultato di J. Schwartz *), unitamente ad un teorema d'interpolazione stabilito da J. Marcinkiewicz per funzioni scalari e che, come ha fatto vedere lo stesso J. Schwartz *), si estende in modo ovvio alle funzioni a valori in un spazio di Banach. Converrà a questo punto riferire gli enunciati di tali teoremi, adattati per semplicità al caso particolare di cui ci stiamo occupando.

TEOREMA 4,1 (J. MARCINKIEWICZ).

Siano: X uno spazio di Banach.

s, p, r numeri reali soddisfacenti alle condizioni:

$$1 \leqslant s < p < r ; \quad \frac{1}{p} = \frac{\alpha}{s} + \frac{(1-\alpha)}{r}$$

con $0 < \alpha < 1$.

*) [5] pag. 785-790.

T una applicazione lineare dello spazio $L^0(X)$ di tutte le funzioni limitate, misurabili, definite in R con valori in X e nulle fuori di un intervallo limitato, nello spazio costituito dalla totalità delle funzioni misurabili definite in R con valori in X.

Se φ è una funzione reale misurabile si scriva (per ogni $a > 0$)

$$\mu_\varphi(a) = \text{mis}\,(\{x : |\varphi(x)| > a\})$$

e si supponga che

$$\left.\begin{aligned} [\mu_{Tf}(a)]^{\frac{1}{s}} &\leqslant \frac{h}{a}\,\|f\|_s \\ [\mu_{Tf}(a)]^{\frac{1}{r}} &\leqslant \frac{h}{a}\,\|f\|_r \end{aligned}\right\} \quad \forall f \in L^0(X)\,, \qquad \forall a > 0\,.$$

Allora esiste una costante finita h' dipendente dalla T solo attraverso h, tale che

$$\|Tf\|_p \leqslant h'\,\|f\|_p\,.$$

TEOREMA 4,2 (J. SCHWARTZ).

Siano: X uno spazio di Banach.

$K(t)$ una funzione di $t \in R$ a valori nello spazio di Banach degli operatori limitati in X.

Si supponga inoltre che:

$K(t)$ sia integrabile su ogni intervallo limitato.

Esistano un numero reale $a > 1$ ed una costante $C < +\infty$ in modo tale che, per qualunque numero η della forma 2^j si abbia:

$$\int\limits_{|t| \geqslant a} \|K[\eta(t-\tau)] - K(\eta t)\|\,dt \leqslant C\eta^{-1} \tag{7}$$

qualunque sia τ soddisfacente alla limitazione $|\tau| \leqslant \leqslant a^{-1}$. Posto

$$K * f = \tilde{f}(t) = \int\limits_R K(t-\tau) f(\tau)\,d\tau\,,$$

per ogni $f \in L^0(X)$ sia soddisfatta la disuguaglianza

$$\| \tilde{f} \|_r \leqslant C' \| f \|_r \tag{8}$$

essendo r un numero reale > 1.

Allora, $\forall f \in L^0(X)$,

$$[\mu_{\tilde{f}}(a)] \leqslant \frac{H}{a} \| f \|_1$$

essendo H una opportuna costante finita dipendente solo da C e da C'.

Ciò premesso, sia $f \in L^0(R^+, H)$ e si consideri la convoluzione $K_\delta * f$. Faremo vedere che il nucleo K_δ soddisfa alla limitazione (7) con una costante C indipendente da δ. In virtù del lemma 3,1 completato dall'osservazione che lo segue potremo applicare all'operatore $\mathcal{K}_\delta$ il teorema di J. Schwartz ponendo $r = 2$. Sarà allora possibile valersi del teorema di J. Marcinkiewicz, assumendo per gli esponenti i valori $r = 2$ ed $s = 1$, per dedurre che

$$\| \tilde{f}_\delta \|_p \leqslant C \| f \|_p \qquad \forall f \in L^0(R^+, H) \tag{9}$$

dove C è una opportuna costante positiva indipendente da δ.

Per stabilire la validità della (9) in $L^0(R^+, H)$ basterà dunque verificare che è soddisfatta la (7) con una costante C indipendente da δ.

Lemma 4,3: Sia $K_\delta(t)$ la funzione (5*) e sia a un numero reale maggiore di 1. Vale allora la disuguaglianza

$$\int_{|t| \geqslant a} \| K_\delta[\eta(t - \tau)] - K_\delta(\eta t) \| \, dt \leqslant C\eta^{-1}$$

qualunque sia $\eta > 0$ e qualunque sia τ verificante la condizione $|\tau| \leqslant a^{-1}$, essendo C una costante positiva che non dipende da δ.

Dim.: Ricordiamo anzitutto che, in virtù delle ipotesi fatte sull'operatore A, è valida la seguente rappresentazione di $K_\delta(t)$ per $t \geqslant \delta$

$$K_\delta(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}} z e^{tz} R(z, -A) dz ,$$

essendo $\mathscr{C}$ una curva che «circonda» la regione angolare T_ε in cui è contenuto lo spettro $\sigma(-A)$, orientata in modo che $\mathfrak{J}(z)$ sia crescente. Sia k la massima ascissa dei punti di $\mathscr{C}$.

Si tratta ora di dare delle maggiorazioni per

$$\int_{|t|\geqslant a} \| K_\delta[\eta(t-\tau)] - K_\delta(\eta t) \| \, dt \tag{10}$$

con la condizione $|\tau| \leqslant a^{-1}$.

Consideriamo dapprima il caso $\delta = 0$. È immediato constatare che:

$$K[\eta(t-\tau)] - K(\eta t) = 0 \quad \text{per} \quad t \leqslant -a \,, \quad |\tau| \leqslant a^{-1}$$

$$K[\eta(t-\tau)] - K(\eta t) = Ae^{-\eta(t-\tau)A} - Ae^{-\eta tA} =$$

$$= \begin{cases} Ae^{-\eta(t-\tau)A}[I - e^{-\eta tA}] & \text{per} \quad t \geqslant a > a^{-1} \geqslant \tau \geqslant 0 \quad \text{(I)} \\ -Ae^{-\eta tA}[I - e^{\eta\tau A}] & \text{per} \quad t \geqslant a > 0 \geqslant \tau \geqslant -a^{-1} \quad \text{(II)} \,. \end{cases}$$

Nel caso (I) si ha

$$K[\eta(t-\tau)] - K(\eta t) = \tag{11}$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}} ze^{\eta(t-\tau)z}(1 - e^{\eta\tau z})R(z, -A)dz \,.$$

Fatte le posizioni

$$\alpha = \eta(t-\tau) > 0$$

$$\beta = \eta\tau \geqslant 0$$

la (11) diventa

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}} ze^{\alpha z}[1 - e^{\beta z}]R(z, -A)dz =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}'} \frac{\lambda}{\alpha^2}\, e^{\lambda}[1 - e^{\frac{\beta}{\alpha}\lambda}]R\left(\frac{\lambda}{\alpha}\,, -A\right)d\lambda$$

dove $\lambda = \alpha z$ e $\mathscr{C}'$ sta ad indicare la curva in cui si muta $\mathscr{C}$ in seguito al cambiamento di variabile operato. Non è difficile verificare che deformando con continuità la curva $\mathscr{C}'$ in $\mathscr{C}$ l'ultimo integrale scritto non varia. Per conseguenza la differenza (11) è espressa da

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}} \frac{\lambda}{\alpha^2}\, e^{\lambda}(1 - e^{\frac{\beta}{\alpha}\lambda}) R\left(\frac{\lambda}{\alpha}\,,\, -A\right) d\lambda\,.$$

Valgono allora le seguenti disuguaglianze

$$\begin{aligned}(12)\qquad & \| K[\eta(t-\tau)] - K(\eta t) \| \leqslant \\ & \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathscr{C}} \frac{1}{\alpha^2}\, |\lambda|\, |e^{\lambda}|\, |1 - e^{\frac{\beta}{\alpha}\lambda}|\, \left\|R\left(\frac{\lambda}{\alpha}, -A\right)\right\|\, |d\lambda| \leqslant \\ & \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathscr{C}} \frac{|\lambda|}{\alpha^2}\, |e^{\lambda}|\, |1 - e^{\frac{\beta}{\alpha}\lambda}|\, \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|}\, \alpha\, |d\lambda|\end{aligned}$$

dato che, per le ipotesi fatte,

$$\| R(z\,,\, -A) \| \leqslant \frac{M_\varepsilon}{|z|}\,.$$

Si riconosce che, se σ appartiene al semipiano Σ dei numeri complessi soddisfacenti la limitazione

$$\Re(\sigma) \leqslant \Lambda < +\infty \qquad (\Lambda \text{ costante reale})$$

esiste una costante positiva L tale che

$$(13)\qquad |1 - e^{\sigma}| \leqslant L\, |\sigma|\,.$$

Sia allora $\sigma = \dfrac{\beta}{\alpha}\lambda$. Poichè

$$\frac{\beta}{\alpha} \geqslant 0\,, \qquad \Re(\lambda) \leqslant k\,, \qquad \text{è} \qquad \Re(\sigma) \leqslant k\,\frac{\beta}{\alpha}\,;$$

è possibile applicare la (13) ottenendo così

$$\left|1 - e^{\frac{\beta}{\alpha}\lambda}\right| \leqslant L\,\frac{\beta}{\alpha}\,|\lambda|\,.$$

La 12) è allora maggiorata da

$$(14)\qquad \frac{M_\varepsilon}{2\pi\alpha}\cdot L\cdot\frac{\beta}{\alpha}\int_{\mathscr{C}}|e^{\lambda}|\;|\lambda|\;|d\lambda| = L'\frac{\beta}{\alpha^2}\int_{\mathscr{C}} e^{\Re(\lambda)}|\lambda|\;|d\lambda| \leqslant$$

$$\leqslant M\frac{\beta}{\alpha^2} = M\frac{\tau}{\eta(t-\tau)^2},$$

dato che l'ultimo integrale scritto converge.

Per il caso (II) osserviamo che con la sostituzione

$$t-\tau=\xi\,;\qquad \tau'=-\tau$$

si ottiene

$$K[\eta(t-\tau)]-K(\eta t)=K(\eta\xi)-K[\eta(\xi-\tau')]$$

con

$$a^{-1}\geqslant\tau'\geqslant 0\,,\qquad \xi\geqslant a+\tau'\geqslant a\,.$$

Questa espressione è del tutto analoga a quella che si presenta nel caso (I) sicchè, passando alle norme, si ottiene ancora una maggiorazione del tipo (14). Il caso $t\leqslant -a$ è banale.

Integrando ora rispetto a t sull'insieme complementare dell'intervallo $(-a,\,a)$ si ottiene:

$$\int_{|t|\geqslant a}\|\,K[\eta(t-\tau)]-K(\eta t)\,\|\,dt\leqslant\frac{M\tau}{\eta}\int_a^{+\infty}\frac{dt}{(t-\tau)^2}\qquad(|\,\tau\,|\leqslant a^{-1})\,.$$

Poichè l'integrale scritto converge si trova, in definitiva

$$\int_{|t|\geqslant a}\|\,K[\eta(t-\tau)]-K(\eta t)\,\|\,dt\leqslant H\eta^{-1}\,;\qquad|\,\tau\,|\leqslant a^{-1}\,,$$

dove H rappresenta una certa costante positiva.

Per quanto riguarda la trasformazione $\mathcal{K}_\delta$ non è restrittivo per i nostri scopi supporre che sia $a - a^{-1} > \delta > 0$. In tal caso si ha:

$$(15) \quad K_\delta[\eta(t-\tau)]-K_\delta(\eta t) = \begin{cases} K[\eta(t-\tau)]-K(\eta t) \text{ per } \eta(t-\tau)\geqslant\delta & a) \\ -K(\eta t) \quad \text{per} \quad \eta(t-\tau) < \delta \leqslant \eta t & b) \\ 0 \quad \text{per} \quad \eta t < \delta & c) \end{cases}$$

e quindi valgono le maggiorazioni

$$(16) \quad \|K_\delta[\eta(t-\tau)] - K_\delta(\eta t)\| \leqslant \begin{cases} \dfrac{M\tau}{\eta(t-\tau)^2} & \text{nel caso} \quad a) \\ \dfrac{M'}{\eta t} & \text{nel caso} \quad b) \\ 0 & \text{nel caso} \quad c) \end{cases}$$

Integrando ora la (16) nell'intervallo $a \leqslant t < +\infty$ e distinguendo i casi

$$\frac{\delta}{\eta} < a - \tau$$

$$a - \tau \leqslant \frac{\delta}{\eta} < a$$

$$\frac{\delta}{\eta} \geqslant a$$

si trova che, in tutti i casi, tale integrale non supera la quantità

$$(M' \log 2 + H)\eta^{-1} .$$

Nel caso in cui è $0 \geqslant \tau \geqslant -a^{-1}$ basta operare la sostituzione di cui si è fatto uso per $\delta = 0$ nel caso (II).

Il lemma risulta così dimostrato completamente.

Per il lemma 4,3 e per i teoremi 4,2 e 4,1 possiamo allora affermare che vale la (9), ossia che l'applicazione $\mathcal{K}_\delta$, considerata in $L^0(R^+, H)$ è limitata in modo indipendente da δ. Ma allora, essendo lo spazio $L^0(R^+, H)$ denso in $L_p(R^+, H)$ $(1 < p < 2)$ si conclude, in base a note proprietà, che $\tilde{f}_\delta \in L_p(R^+, H)$ e che

$$(17) \qquad \|\tilde{f}_\delta\|_p \leqslant C\|f\|_p \qquad \forall f \in L_p(R^+, H) .$$

Siamo ora in grado di stabilire il risultato menzionato nella premessa, dimostrando il seguente teorema.

TEOREMA 4,4: Se $f \in L_p(R^+, H)$, $p > 1$, la sua trasformata $\tilde{f}_\delta$ converge nella norma di L_p, al tendere a zero di δ. Detto $\mathcal{K}f = \tilde{f}$ tale limite, si ha $\tilde{f} \in L_p(R^+, H)$ con

$$\| \tilde{f} \|_p \leqslant C \| f \|_p$$

essendo C una costante che può dipendere solo da A e p.

DIM.: Sia $1 < p < 2$. La limitazione $\| \tilde{f}_\delta \|_p \leqslant C \| f \|_p$ fornisce, per la norma di $\tilde{f}_\delta$, una maggiorazione indipendente da δ. D'altra parte, il lemma 2,2 permette di affermare che, nel caso di una funzione f hölderiana e nulla fuori di un insieme limitato, $\tilde{f}_\delta$ converge in L_p. Essendo l'insieme di tali funzioni denso in $L_p(R^+, H)$ si deduce che la famiglia di operatori $\mathcal{K}_\delta$ converge fortemente verso un operatore $\mathcal{K}$ la cui norma è ancora maggiorata dalla costante C.

Consideriamo infine il caso $p > 2$. Sarà sufficiente, a questo proposito, far vedere che continua a valere la limitazione (17) e rifare poi i ragionamenti svolti per il caso $1 < p < 2$. Siano allora

$f \in L_p(R^+, H)$ e nulla fuori di un intervallo limitato

$g \in L_q(R^+, H)$ e nulla fuori di un intervallo limitato ,

con $1/p + 1/q = 1$.

Per il fatto che f e g sono nulle fuori di un insieme limitato è evidente che l'integrale

$$\int_R \left(\tilde{f}_\delta(t) \, , \, g(t) \right) dt$$

esiste e che è lecito scrivere

$$\int_R \left(\tilde{f}_\delta(t) \, , \, g(t) \right) dt = \int_R \left(\int_{-\infty}^{+\infty} K_\delta(t - \tau) f(\tau) d\tau \, , \, g(t) \right) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(K_\delta(t-\tau)f(\tau)\,,\ g(t)\Big)dt\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(f(\tau)\,,\ K_\delta^*(t-\tau)\,g(t)\Big)dt\,d\tau\,;$$

ponendo

$$\bar{g}(t) = g(-t)\,, \quad \bar{f}(t) = f(-t)\,, \quad t' = -t\,, \quad \tau' = -\tau$$

l'ultimo integrale si scrive

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\bar{f}(\tau')\,,\ \int_{-\infty}^{+\infty} K_\delta^*(\tau'-t')\bar{g}(t')dt'\Big)d\tau'\,. \tag{18}$$

Esaminiamo ora l'operatore

$$K_\delta^*(t) = \begin{cases} [Ae^{-tA}]^* & \text{per} \quad t \geqslant \delta \\ 0 & \text{per} \quad t < \delta\,. \end{cases}$$

Poichè A (chiuso e con insieme di definizione denso) commuta con e^{-tA} e quest'ultimo operatore è limitato, si ha intanto

$$[Ae^{-tA}]^* = A^*[e^{-tA}]^*\,.$$

Osserviamo poi che, per noti teoremi sugli operatori lineari, il risolvente $(zI + A)^{-1}$ esiste quando e solo quando esiste $[(zI + A)^{-1}]^*$, avendosi inoltre

$$[(zI + A)^{-1}]^* = (zI + A^*)^{-1}\,;$$

ciò implica $\sigma(-A^*) = \overline{\sigma(-A)}$. Nel nostro caso lo spettro di $-A^*$ sarà contenuto nella medesima regione angolare T che contiene lo spettro di $-A$.

Consideriamo allora la rappresentazione di $[e^{-tA}]^*$:

$$[e^{-tA}]^* = \left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}} e^{tz}R(z,\ -A)dz\right]^* =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}} \overline{e^{tz}}[R(z,\ -A)]^*d\bar{z} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}} e^{t\bar{z}}(\bar{z}I + A^*)^{-1}d\bar{z}\,.$$

Fatta la posizione $\bar{z} = \zeta$ e detta $\overline{\mathscr{C}}$ la curva simmetrica di $\mathscr{C}$ rispetto all'asse reale, abbiamo ancora

$$[e^{-tA}]^* = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{\mathscr{C}}} e^{t\zeta}(\zeta I + A^*)^{-1}d\zeta \,.$$

In particolare, se la curva $\mathscr{C}$ viene presa simmetrica rispetto all'asse reale, è $\overline{\mathscr{C}} = -\mathscr{C}$ (dove il segno $-$ sta ad indicare che l'orientamento è opposto) e quindi

$$[e^{-tA}]^* = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}} e^{t\zeta}(\zeta I + A^*)^{-1}d\zeta \,.$$

Possiamo dunque concludere che se $-A$ è generatore di un semigruppo analitico, tale è pure $-A^*$, avendosi

$$[e^{-tA}]^* = e^{-tA^*} \,.$$

Riprendiamo ora in considerazione l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_\delta^*(\tau' - t')\bar{g}(t')dt' = \bar{g}_\delta^*(\tau') \tag{19}$$

che figura nella (18). Essendo, come è evidente, $\bar{g} \in L_q(R^+, H)$ $(1 < q < 2)$ ed essendo, come abbiamo visto, $-A^*$ generatore di un semigruppo analitico ne consegue, per i risultati ottenuti in precedenza, che la (19) rappresenta una trasformazione di $L_q(R^+, H)$ in sè, la cui norma si mantiene limitata indipendentemente da δ. Si ha, cioè

$$\| K_\delta^* * \bar{g} \|_q \leqslant C \| \bar{g} \|_q = C \| g \|_q$$

con C costante positiva opportuna. Valgono allora le disuguaglianze

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\tilde{f}_\delta(t) \,,\ g(t)\Big) dt \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} K_\delta(t-\tau)f(\tau)d\tau \,,\ g(t)\Big) dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{f}(\tau')| \, |\bar{g}_\delta^*(\tau')| \, d\tau' \leqslant \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{f}(\tau')|^p d\tau' \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{g}_\delta^*(\tau')|^q d\tau' \right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \| f \|_p \cdot C \| g \|_q$$

essendo C indipendente da δ. Dall'arbitrarietà della funzione $g(t)$ segue che dev'essere

$$\| \tilde{f} \|_p \leqslant C \| f \|_p$$

Il teorema è così completamente provato.

BIBLIOGRAFIA

[1] Calderon A. P., Zygmund A.: *On the existence of certain singular integrals.* Acta Math., **88**, 85-139, 1952.

[2] Dunford N., Schwartz J.: *Linear operators.*, Part. I. Interscience publishers, New York, 1958.

[3] Hille E., Phillips R.: *Functional analysis and semi-groups.* American Math. Soc. Colloquium Publ., Vol. XXXI, Providence, 1957.

[4] Riesz F., Nagy Sz.: *Leçons d'analyse fonctionnelle.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.

[5] Schwartz J.: *A remark on inequalities of Calderon–Zygmund type for vector-valued functions.* Communications on pure and appl. mathematics, Vol. XIV, n. 4, 785-799, 1961.