RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALDO BRESSAN

Termodinamica e magneto-visco-elasticità con deformazioni finite in relatività generale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 34 (1964), p. 1-73

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1964__34__1_0>

TERMODINAMICA E MAGNETO-VISCO-ELASTICITÀ CON DEFORMAZIONI FINITE IN RELATIVITÀ GENERALE

Memoria (*) *di* ALDO BRESSAN (*a Padova*)

1. Introduzione.

Sfruttando largamente risultati [1]) ottenuti [2]) in [3] mi propongo di costruire una termodinamica relativistica fisicamente accettabile [3]) che tenga conto, oltre che dei fenomeni gravita-

---

(*) Pervenuta in redazione il 12 aprile 1963.
Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca n. 7 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno Accademico 1961-1962.

[1]) Tali risultati concernono la cinematica relativistica dei sistemi continui considerata anche da un punto di vista lagrangiano ed intesa in senso lato in modo da includere, per es., le formule che legano le forme euleriana e lagrangiana degli sforzi e del lavoro delle forze intime (ossia interne di contatto).

[2]) Convengo di denotare, ad es., la formula (27), la nota (5) ed il n. 4 contenuti nel lavoro [3] ordinatamente con « **3** (27) », « **3** nota (5) » e « **3** n. 3) ».

[3]) Dicendo fisicamente accettabile una teoria relativistica T_r intendo che essa approssima la realtà fisica almeno come la teoria classica corrispondente T_c cosicchè, nel campo dei fenomeni controllati sperimentalmente, le relazioni relativistiche puntuali affermate nella T_r ed espresse in un riferimento localmente proprio (o solidale) e geodetico [**3** nota (3)] devono differire dalle relazioni corrispondenti in T_c (espresse in coordinate cartesiane inerziali) al più per termini aventi c^{-2} come fattore ove c è la velocità della luce nel vuoto — almeno se le derivate che intervengono in tali relazioni sono di ordine non troppo elevato [**3** nn. 17, 18], cfr. nota (2) —.

zionali, di quelli di conduzione termica e dei fenomeni elettromagnetici; mi propongo inoltre di costruire una teoria generale di magneto-visco-elasticità e in particolare di elasticità su base termodinamica. Mi riferisco, in generale, a deformazioni finite e a sistemi eventualmente anisotropi e inomegenei. Mi soffermo specialmente sulla teoria dell'elasticità per mostrare concretamente come essa possa svilupparsi in relatività generale in modo parallelo a quanto si fa in fisica classica.

Lo scopo propostomi nel presente lavoro racchiude generalizzazioni, fatte in vari sensi e in forma unitaria, di vari lavori miranti, in parte, ad una trattazione relativistica dell'elasticità nell'ambito puramente meccanico e lineare [4]) (legge di Hooke) e, in parte, alla costruzione di una termodinamica relativistica dei fluidi in cui si tenga conto della conduzione termica e magari dei fenomeni elettromagnetici [5]).

---

[4]) Una bibliografia sulle teorie relativistiche dei sistemi continui si trova in [26] a pag. 790.

I primi tentativi di costruire una teoria relativistica della elasticità risalgono al 1911 — v. [12] — e concernono le piccole deformazioni (legge di Hooke) nella relatività ristretta, Nel trattato [13] (1952) del Möller il capitolo VI è intitolato « Mechanics of elastic continua » ma non considera il legame sforzi-deformazione altro che accennando appunto al lavoro [12] — cfr. 3 nota (6) —.

In [23] (1959) J. L. Synge dopo aver rilevato difficoltà connesse in relatività generale col concetto di strain, scrive le equazioni ipo-elastiche — cfr. [11] Cap. IX — dei materiali elastici lineari entro la relatività generale. Tali equazioni non sono atte a trattare problemi d'equilibrio ma hanno permesso all'Autore di rilevare l'identità fra le velocità di propagazione delle onde elastiche nella detta teoria e in quella classica — cfr. 3 nota (7) —. Mi risulta che in una pubblicazione di C. Rayner in corso di stampa — cfr. 3 note (1), (8) — si costruisce una teoria dell'elasticità lineare (legge di Hooke) nell'ambito puramente meccanico della relatività generale, la quale è anche atta alla trattazione dei problemi di equilibrio — cfr. 3 nota (7) —.

[5]) Questioni fondamentali di termodinamica sono considerate in vari trattati di relatività, per esempio [13] e [25]. Di questi solo il secondo tratta la termodinamica sia in relatività ristretta che in quella generale. Nei trattati di cui son venuto a conoscenza, la termodinamica non è però considerata in connessione con la conduzione termica (legge di Fourier).

Recenti lavori di relatività generale sui fluidi, in assenza di fenomeni elettromagnetici — [16], [18] — e in loro presenza contrastano profondamente con lavori precedenti e in particolare con uno di relatività ristretta — [19] — ma solo i procedimenti

---

Nel 1940 C. Eckart ha considerato in [7] una teoria termodinamica dei fluidi (anche viscosi) entro la relatività ristretta includendo anche la conduzione termica (legge di Fourier) e accennando al caso in cui siano presenti fenomeni elettromagnetici. La detta teoria è fisicamente accettabile secondo la nota (3) e in essa mi sembrano di rilievo i seguenti due punti: Ci si basa su un'equazione di conservazione della massa in forma analoga e quella classica — ossia del tipo della $(3\ 141)_2$ — in seguito ad un'opportuna distinzione fra la massa gravitazionale a riposo, che dipende dallo stato fisico, e la massa intesa come un certo numero di molecole di dato peso molecolare (quantità di materia), la quale invece non dipende dallo stato fisico.

Inoltre in [7] si scrivono delle equazioni di conservazione $\partial W^{LM}/\partial x^M = 0$ — v. pag. 920 — che riassumono quelle indefinite dei sistemi continui e, sostanzialmente, il primo principio della termodinamica, grazie alla inclusione in W^{LA} di un opportuno tensore termodinamico che dà luogo anche a piccolissime tensioni e ad un piccolissimo lavoro — v. nn. 8, 12 — che non hanno riscontro nelle teorie classiche. L'Autore mette in evidenza la parte $c^{-1}q_L Du^L/Ds$ di tale lavoro ove q_L è il vettore di corrente termica e $u^L = dx^L/ds$ la 4-velocità della materia. Egli chiama $c^{-1}q_L Du^L/Ds$ *lavoro fatto dal calore attraverso la materia accelerata.*

Nonostante le tensioni e il lavoro suddetti, l'intera teoria svolta in [7] è, come ho già detto, fisicamente accettabile secondo la nota (3) e il suaccennato tensore termodinamico, introdotto in [7], è stato usato alla stessa stregua del tensore degli sforzi e di quello energetico (o di impulso — energia), ossia è stato incluso al pari degli ultimi due tensori nel tensore energetico totale, da parte delle successive teorie relativistiche concernenti la termodinamica con conduzione del calore — v. [16], [17] e [18] —.

Nell'introduzione di [16] a pag. 121, dopo qualche accenno ai primi saggi relativistici di Einstein e Planck sulla natura di grandezze termodinamiche si afferma: « Puis d'autres recherches ont visé à établir les équations du fluide thermoynamique, soit en Relativité restreinte (C. Eckart) soit en relativité générale (D. Van Dantzig) mais d'une manière en générale peu satisfaisante. Van Dantzig se borna à l'etude des fluides qu'il nommait parfaitement parfaits, sans conduction de chaleur dans notre langage. Seul C. Eckart a introduit la conduction de chaleur d'une facon symétrique dans l'expression du tenseur d'impulsion-énergie. Malhereusement, sa généralisation de l'hypothèse de conduction de Fourier se révèle fort peu naturelle: la temperature y est présente usati in questi — e in particolare in [19] — sono, mi sembra, fisicamente accettabili — vedi più avanti —. In conformità di ciò il presente lavoro di relatività generale è in sostanziale accordo con [19] (relatività ristretta) mentre differisce da [16], [17], [18] dal punto di vista dell'impostazione fisica.

* * *

Stabilisco innanzitutto [n. 2] in forma relativistica e lagrangiana, la legge di Fourier sulla conduzione termica. Ammetto che i coefficienti di Fourier [6]) $\varkappa^{*\varrho\sigma}$ dipendano dall'elemento ma-

---

elle meme a coté de ses dérivées. En fait aucun de ces auteurs n'a effectivement utilisé l'equation de conduction ».

In [16] Pham Mau Quan costruisce una teoria dei fluidi nel quadro della relatività generale tenendo conto della conduzione termica in un modo che è in profondo contrasto con [7] e che, salvo casi particolari, non mi sembra accettabile per vari motivi di cui parlerò nella ultima sezione della presente introduzione.

Posso però dire di essermi giovato della deduzione delle equazioni di conservazione da quelle gravitazionali, scritta in [16] p. 142 usando il tensore termodinamico di Eckart e del riconoscimento dell'analogo relativistico del 1° principio della termodinamica in una combinazione delle dette equazioni di conservazione, riconoscimento, in forma parzialmente implicita, e in accordo con [7] fatto in [16] pag. 157.

Da calcoli fatti in [16] pag. 155 risulta che il suddetto lavoro $c^{-1}q_L Du^L/Ds$ considerato da C. Eckart figura due volte (e con lo stesso segno) nell'analogo relativistico del 1° principio della termodinamica. Naturalmente ciò non altera i fenomeni previsti in [7] nè la natura (nuova rispetto al caso classico) ad essi ivi riconosciuta.

Nella determinazione dei termini relativistici correttivi, del tipo suddetto, Pham Mau Quan, al pari di C. Eckart non esplicita il vettore di corrente termica q^L legato alla distribuzione di temperatura mediante l'ipotesi di Fourier o una sua generalizzazione — vedi invece al n. 8 del presente lavoro —.

Conviene aggiungere che il lavoro [16] è in parte dedicato ai fondamenti della teoria suddetta e in parte allo studio di problemi di unicità ed esistenza della soluzione delle equazioni stabilite, e allo studio della propagazione delle onde.

Il lavoro [17] è dello stesso tipo ma vi si considerano anche fenomeni elettromagnetici. Nello stesso ordine di idee è fatta la nota [18].

[6]) Tali coefficienti sono introdotti assieme al vettore lagrangiano $q^{*\varrho}$ di corrente termica sulla base di particolari esperienze, dopo di che si può definire $q^{*\varrho}$ in ogni caso.

teriale ε che si considera, ossia dalle y^λ, dalla temperatura T e dal tensore di deformazione [7]) $\varepsilon_{\alpha\beta}$ [**3** (20)]. Poi, sempre sfruttando largamente risultati contenuti in [3], passo alla forma euleriana. Mi è sembrato opportuno relativizzare allo stesso modo una certa generalizzazione della suddetta legge di Fourier dovuta a C. Cattaneo e concettualmente più soddisfacente di quella [8]).

Mi è sembrato interessante rilevare le differenze fra l'espressione relativistica q_{ass} del calore assorbito e dovuto alla distribuzione di temperatura e l'analoga espressione classica $q_{\text{ass}}^{(c)}$, tenendo conto della dipendenza del vettore q^L di corrente termica dalla distribuzione della temperatura. Si trova [n. 8] che queste differenze constano, oltre che di un piccolissimo (in senso più avanti precisato) termine già noto $q_{\text{ass}}^{(a)}$ dovuto all'accelerazione [nota (5)], di un termine $q_{\text{ass}}^{(d)}$, piccolissimo come $q_{\text{ass}}^{(a)}$, e dovuto alla variazione temporale di temperatura in presenza di una velocità di deformazione.

Per rilevare le suddette differenze premetto certe semplici decomposizioni [n. 5] della divergenza di un generico tensore $X^{\cdots LM}$ dato nel cronotopo (o universo) U, nelle quali figura una certa divergenza trasversa $X^{\cdots LM}{}_{/\tilde{M}}$. Inoltre mostro [n. 6] che $X^{ML}{}_{/\tilde{M}} = K^{L\sigma}{}_{|\sigma}$ ove $K^{L\sigma}$ è il corrispondente misto (o di Kirchhoff-Piola) del tensore euleriano X^{LM} [**3** n. 11] e $K^{L\sigma}{}_{|\sigma}$ la sua divergenza basata sulla derivazione lagrangiana trasversa [**3** n. 13]. La precedente eguaglianza corrisponde ad un noto teorema

[7]) La dipendenza di $\varkappa^*_{\varrho\sigma}$ dalle $\varepsilon_{\alpha\beta}$ induce da sola, nel caso dei solidi, ad ammettere che il tensore $\varkappa^*_{\varrho\sigma}$ possa essere anisotropo in quanto anche per materiali la cui costituzione appare isotropa rispetto alla configurazione di riferimento φ^*, il tensore $\varkappa^*_{\varrho\sigma}$ può divenire anisotropo per effetto di una deformazione in cui sia anisotropo il tensore $\varepsilon^{\alpha\beta}$.

[8]) In [5] C. Cattaneo osserva (con ragionamenti validi anche in relatività ristretta) che in fisica classica la legge di Fourier, pur approssimando molto bene la realtà sperimentale, implica che il calore si propaghi con velocità infinita, per cui l'Autore ne propone una generalizzazione in cui il detto inconveniente di principio è evitato.

Quanto precede induce a ritenere che anche quando il cronotopo sia curvo, una diretta relativizzazione della detta legge di Fourier classica possa implicare una propagazione di calore con velocità superiore a quella della luce.

classico, basilare nella teoria dei sistemi continui dal punto di vista lagrangiano.

Decomposti opportunamente $K^{L\sigma}{}_{|\sigma}$ e il derivato lagrangiano trasverso $\alpha^L{}_{\varrho|\sigma}$ del gradiente relativistico di deformazione $\alpha^L{}_\varrho$ [**3** n. 5], posso esprimere $K^{L\sigma}{}_{|\sigma}$ facendo intervenire il corrispondente (completamente) lagrangiano [**3** n. 11] $Y^{\varrho\sigma}$ di X^{LM} [n. 7].

Considero il caso molto comune che alcune equazioni costitutive determinino le $Y^{\varrho\sigma}$ come funzioni $Y^{\varrho\sigma}$ $(\varepsilon_{\alpha\beta},\ y^\lambda)$ delle coordinate y^λ del generico elemento materiale ε nella configurazione di riferimento φ^* [**3** n. 3], e del tensore relativistico $\varepsilon_{\alpha\beta}$ di deformazione [**3** n. 5] inerente ad ε all'istante t che si considera. Dunque $Y^{\varrho\sigma}$ dipende da y^λ sia esplicitamente che tramite $\varepsilon_{\alpha\beta}$. Introdotto il tensore classico di deformazione $\overset{c}{\varepsilon}_{\alpha\beta}$, differente da $\varepsilon_{\alpha\beta}$, le funzioni $Y^{\varrho\sigma}(\varepsilon_{\alpha\beta},\ y^\lambda)$ e $Y^{\varrho\sigma}(\overset{c}{\varepsilon}_{\alpha\beta},\ y^\lambda)$, pensate come dipendenti dalle y^λ anche implicitamente tramite $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ed $\overset{c}{\varepsilon}_{\alpha\beta}$, sono in generale differenti. Non è dunque superfluo dimostrare che $X^{LM}{}_{|\tilde{M}}$ (e $K^{L\sigma}{}_{|\sigma}$) si esprime allo stesso modo mediante $Y^{\varrho\sigma}(\varepsilon_{\alpha\beta},\ y^\lambda)$ e $Y^{\varrho\sigma}(\overset{c}{\varepsilon}_{\alpha\beta},\ y^\lambda)$ [n. 7]. Anzi ciò mi sembra molto utile in vista di applicazioni alla dinamica relativistica e, in particolare, di confronti col caso classico — fra l'altro, vedi n. 12 —.

* * *

Anche in elettromagnetismo stabilisco — v. [n. 9] — le formule che legano le forme euleriane e lagrangiane degli enti costitutivi fondamentali [9]) i quali sono caratterizzati dai tensori euleriani (spaziali) ζ_{LM}, η_{LM}, e μ_{LM} di conducibilità elettrica, di dielettricità e di permeabilità magnetica. Analoghe relazioni

---

[9]) Avverto che fra tali enti costitutivi non figura, ad esempio, una costante di assorbimento della radiazione elettromagnetica in quanto nella presente teoria — come del resto per es., in [8] e in [17] — la cessione di energia elettromagnetica all'interno dei corpi è esclusivamente dovuta all'effetto Joule e ad altri termini piccoli provenienti dall'uso del tensore energetico di Minkowski, il che impone l'uso del tensore di Abraham — v. [8], pag. 496, 475 —. Si tratta di termini inclusi pure in [8] pag. 475 a proposito della magnetofluido-dinamica.

fra le forme euleriane e lagrangiane degli sforzi si trovano già in [**3** n. 11].

Ritengo utili i suddetti legami in quanto, ad es., i tensori lagrangiani $\zeta^*_{\varrho\sigma}$, $\eta^*_{\varrho\sigma}$ e $\mu^*_{\varrho\sigma}$, ordinatamente corrispondenti a ζ_{LM}, η_{LM} e μ_{LM}, possono ritenersi, al pari dei suddetti coefficienti (tensoriali) termici lagrangiani, come funzioni delle $\varepsilon_{\varrho\sigma}$, T e y^ϱ (e indipendenti dalle contingenze dei fatti), mentre i tensori euleriani ζ_{LM}, η_{LM} e μ_{LM} hanno componenti (più numerose dei precedenti e) dipendenti, oltre che dalle $\varepsilon_{\varrho\sigma}$, T e y^ϱ, anche dal tensore fondamentale g_{LM} nel cronotopo U e dalla 4-velocità $u^L = dx^L/ds$ dell'elemento materiale ε che si considera; inoltre le dette componenti dipendono anche dall'orientazione [10]) di ε in U, la quale non è determinata solo dalle g_{LM}, u^L ed $\varepsilon_{\varrho\sigma}$.

Scrivo le equazioni gravitazionali [n. 11] includendo nel tensore energetico totale U_{LM}, oltre al tensore di impulso $T_{LM} = \varrho u_L u_M$ e alla parte simmetrica X_{LM} di quello degli sforzi, anche il tensore elettromagnetico $\overline{E}_{LM}$ di Abraham e un tensore termodinamico Q_{LM} che nel caso dei fluidi si identifica con quello introdotto da C. Eckart in [7] per trattare appunto i fluidi in relatività ristretta e usato nelle (successive) trattazioni termodinamiche dei fluidi in relatività generale [11]).

Dalle suddette equazioni deduco — in analogia con [16] — *le equazioni di conservazione* ossia quelle del moto e quelle di conservazione dell'energia (per sistemi continui).

---

[10]) Fra l'altro, esprimendo dapprima per es. $\zeta^*_{\varrho\sigma}$ mediante le $\varepsilon^{\alpha\beta}$, T e y^ϱ (o esprimendo $Y^{\varrho\sigma}$ mediante $\varepsilon_{\alpha\beta}$, T, y_ϱ e la velocità lagrangiana di deformazione $\Delta^*_{\varrho\sigma}$) e poi legando ζ_{LM} a $\zeta^*_{\varrho\sigma}$ (e X^{LM} a $Y^{\varrho\sigma}$), come si è accennato viene ad essere automaticamente soddisfatto il principio di isotropia fisica dello spazio che va ritenuto certo valido anche in relatività per materiali di ordine uno o due [**3** nn. 17, 18].

Ricordo che in meccanica classica, per es. ζ^{lm} dipende, nel caso corrispondente al precedente, dalle $\partial x^l/\partial y^\varrho$, T e y^ϱ e in base al suddetto principio la considerata dipendenza è tale che, per ogni matrice ortogonale $\| \alpha^r{}_l \|$, (anche per corpi anisotropi) l'eguaglianza $\partial \overline{x}^r/\partial y^l = \alpha^r{}_l \partial x^l/\partial y^\varrho$ implica la $\overline{\zeta}^{rs} = \alpha^r{}_l \alpha^s{}_m \zeta^{lm}$.

[11]) Tale tensore è usato pure da Pham Mau Quan — v. [16], [17] e [18] —.

Messo in evidenza che (anche rispetto ad un osservatore inerziale ed istantaneamente solidale) la massa inerziale va rappresentata da un tensore doppio — anzichè da uno scalare — il quale si riduce ad uno scalare nel caso di assenza di sforzi tangenziali [n. 11], giovandomi dei suacennati preliminari — tra l'altro dell'eguaglianza $X^{LM}{}_{/\tilde{M}} = K^{L\sigma}{}_{|\sigma}$ — pongo in forma mista e lagrangiana le suddette equazioni indefinite del moto dei sistemi continui. Ciò e le suaccennate considerazioni sulle funzioni $Y^{\varrho\sigma}(\varepsilon_{\alpha\beta},\, y^{\lambda})$ e $Y^{\varrho\sigma}(\overset{e}{\varepsilon}_{\alpha\beta},\, y^{\lambda})$ permettono di rilevare con precisione le differenze fra tali equazioni relativistiche e le corrispondenti classiche quando siano associate le equazioni costitutive, per es. quelle dei materiali elastici.

Riguardo ai detti materiali la forma lagrangiana data alle dette equazioni dinamiche relativistiche mi sembra molto utile per la determinazione della velocità di propagazione delle onde ordinarie di discontinuità — ciò, in particolare, nel caso adiabatico — impiegando suppergiù gli stessi procedimenti usuali nel caso classico [12]).

Considero la suaccennata equazione di conservazione dell'energia come esprimente il 1° principio (della termodinamica) inteso in un senso lato in modo da tener conto anche dei fenomeni elettromagnetici.

Mostro — in un modo analogo a quanto si fa in fisica classica — che tale primo principio fornisce l'equazione del calore (dunque, stante l'ipotesi di Fourier o una sua generalizzazione, al pari di quasi tutti gli autori non introduco un principio di continuità del calore come principio indipendente dalle equazioni gravitazionali). A tal punto posso scrivere [nn. 15, 16] un quadro delle equazioni gravitazionali, elettromagnetiche, termiche e costitutive; in queste ultime suppongo che i tensori lagrangiani che esprimono i coefficienti termici ed elettromagnetici dipen-

---

[12]) Si tratta di considerare discontinue le derivate seconde delle funzioni $x^L = x^L(t, y)$ rappresentanti il moto e considerate in [3], a quanto mi consta, per la prima volta. Perciò, nonostante i suddetti procedimenti siano usuali in fisica classica, finora, non si disponeva, mi sembra, dei mezzi occorrenti per applicarli in relatività generale.

dano dalle $\varepsilon_{\alpha\beta}$, T e y^λ mentre gli sforzi lagrangiani $Y_{\varrho\sigma}$ possono dipendere anche dalla velocità (lagrangiana) $\Delta^*_{\varrho\sigma}$ di deformazione ottenendo così le equazioni della termo-magneto-visco-elasticità (non ereditaria) in relatività generale.

Discuto i problemi matematici connessi con le dette equazioni senza però dimostrare teoremi di unicità ed esistenza. Propongo invece un certo sistema di incognite (fra l'altro, mi giovo di una riduzione delle equazioni elettromagnetiche fatta introducendo [n. 10], secondo un uso comune, il 4-potenziale elettromagnetico φ_L) e in corrispondenza ad esso constato il pareggio fra il numero delle equazioni e quello delle incognite. Mostro pure come usando particolari coordinate solidali ($x^l \equiv y^l$, $x^0 \equiv t \equiv s$) il detto quadro di tutte le equazioni risulta semplificato [n. 16].

Mi è sembrato interessante considerare esplicitamente il caso adiabatico in assenza di corrente elettrica [13]) in modo da dare un'interpretazione termodinamica a trattazioni relativistiche dei fluidi o dell'elasticità — vedi per es. [8] pag. 474 e [19] — che ne prescindono.

Mostro come nel caso in cui la densità propria ϱ di energia sia l'unica grandezza nella cui espressione figuri la temperatura T, sia vantaggioso sostituire ϱ alla T, come funzione incognita delle x^L.

Considero, piuttosto brevemente, anche le condizioni di raccordo e al contorno, deducendole dalle equazioni gravitazionali ed elettromagnetiche intese in una forma generalizzata. Mi limito essenzialmente al caso in cui, pur venendo meno su una ipersuperficie Σ in U le proprietà di regolarità delle funzioni che interessano, valide quasi ovunque, tuttavia non vi sono forze o trasformazioni energetiche concentrate su Σ. Precisamente suppongo che Σ sia descritta da una superficie materiale non elettricamente carica e che lungo Σ non vi sia mutuo scorri-

---

[13]) I processi adiabatici sono anche isentropici purchè non vi sia cessione di energia elettromagnetica all'interno dei corpi. In tal caso gli sforzi dei corpi elastici (e l'energia di questi) sono pure funzioni della deformazione $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ (cosicchè si può ignorare la temperatura).

mento di due corpi con sviluppo di attrito. In conformità di ciò mi limito a considerare la legge di attrito statico.

* * *

Il secondo principio della termodinamica è enunciato [n. 19] come relazione scalare (invariante) indipendente dalle equazioni di cui sopra e in una forma generale in cui, tra l'altro, si tiene conto di possibili cessioni di energia elettromagnetica all'interno dei corpi, essenzialmente per effetto Joule [nota (9)].

I nn. 20 ... 22 sono rivolti alla costruzione di una teoria dell'elasticità a base termodinamica nel quadro delle suaccennate equazioni gravitazionali, elettromagnetiche e termiche.

Definisco i materiali elastici in senso lato [n. 20] in un modo diretto, basato sull'energia libera $\mathcal{F}$ e già usato nel caso non relativistico. Prescindo dalle condizioni di stabilità dato che, stante la grande somiglianza della presente teoria con l'analoga classica [14]), condizioni di tale tipo possono imporsi in pratica con le stesse parole nei casi classico e relativistico. Caratterizzo poi i materiali elastici in senso lato come materiali per cui $\mathcal{F}$. l'entropia η e gli sforzi lagrangiani sono esprimibili mediante T, le $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ ed eventualmente altri parametri fisici $p_1, p_2, \ldots$ i quali assieme alle $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ e T soddisfano alcune relazioni di vincolo di un certo tipo od eventualmente sono liberi. Tale caratterizzazione è conforme ad una nota impostazione della teoria dei corpi elastici [15]) — v. [22] — e per la sua generalità ha, penso, un certo interesse anche dal punto di vista classico.

---

[14]) Le espressioni del tensore lagrangiano $Y^{\varrho\sigma}$ degli sforzi mediante l'energia libera $\mathcal{F}(\varepsilon_{\varrho\sigma}, T, y^{\varrho})$ o l'energia specifica $w^{(\eta)}(\varepsilon_{\varrho\sigma}, \eta, y^{\varrho})$ ove η è l'entropia specifica di massa, sono le stesse che in fisica classica. Lo stesso dicasi delle espressioni delle $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ in un riferimento localmente proprio e geodetico — v. note (2) e **3** (3) —.

Già nella teoria dell'elasticità costruita in [19] c'è una certa somiglianza con l'analoga classica — vedi però **3** nota (8) —, somiglianza più spiccata di quella della teoria dell'elasticità considerata in [23].

[15]) Poichè in [22] non ci si riferisce a elementi materiali come si fa invece, ad esempio in [14], [15] e [4], ma a corpi, i fondamenti della teoria ivi svolta non sono direttamente e completamente estendibili alla relatività basandosi su [3].

Inoltre [n. 19] osservato che riferendosi ad opportune e comuni coordinate solidali ($x^l \equiv y^l$, $x^0 \equiv t \equiv s$) gli sforzi euleriani X_{lm} si esprimono mediante le $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ e i corrispondenti sforzi lagrangiani $Y^{\varrho\sigma}$, scrivo alcune condizioni sulle X_{lm} necessarie e sufficienti affinchè (non le X_{lm} ma) le $Y_{\varrho\sigma}$ derivino da un potenziale (elastico) in armonia col primo principio della termodinamica dedotto dalle equazioni gravitazionali (e anche con ciò che si fa nelle rigorose teorie classiche per deformazioni finite).

Dimostro [n. 22] che, in armonia con un noto teorema di elasticità classica, non possono [16]) esistere materiali elastici secondo la presente teoria, dotati di stress covariante X_{lm} rigorosamente lineare in certe comuni coordinate solidali [17]). Invece esistono materiali elastici con stress caratterizzati da un tensore lagrangiano $Y^{\varrho\sigma}$ lineare nelle $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (legge di Hooke).

* * *

A quanto mi consta solo nei lavori di Pham Mau Quan sui fluidi termodinamici in relatività generale si ammette un certo principio di continuità del calore, indipendente dalle equazioni gravitazionali — a ciò ci si riferisce nel passo francese citato nella nota (5) parlando di utilizzazione effettiva dell'equazione della conduzione del calore —. Però, trattandosi di varie pubblicazioni, complessivamente estese e apparse su ben conosciute

---

[16]) Tale teorema ha interesse, mi sembra, anche in fisica classica dove si può dimostrare con le stesse parole.

[17]) Di tale tipo è la sollecitazione considerata in [19]. Nonostante ciò, la presente teoria di elasticità va considerata in accordo con quella lineare e puramente meccanica svolta in [19] nel quadro della relatività generale, in quanto, usando la legge lineare di Hooke, usualmente si prescinde da termini di secondo ordine nelle $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ e, a meno di questi, l'accordo sussiste.

Stante il tipo della teoria proposta in [19], ivi si prescinde da eventuali potenziali elastici che siano in armonia col principio di conservazione dell'energia (conseguente alle equazioni gravitazionali) e quindi da condizioni di integrabilità del tipo suaccennato; inoltre esula dagli scopi del lavoro [19] pure la distinzione fra tensore euleriano e tensore lagrangiano dello stress, sia pure in coordinate solidali.

riviste italiane ed estere, mi sembra opportuno giustificare l'indirizzo secondo cui ho fatto il presente lavoro, dato che tale indirizzo è conforme a lavori precedenti quelli [16], [17] e [18] di Pham Mau Quan ed è seguito, in particolare, da C. Eckart [nota (5)], ma è giudicato insoddisfacente da Pham Mau Quan — v. [16] pag. 121-122 —. Precisamente, in [16] il detto indirizzo è considerato come insoddisfacente per certi aspetti analitici inerenti al modo in cui la temperatura figura nelle equazioni fondamentali — v. citato in nota (5) —. Non condivido tale giudizio in quanto l'unico altro indirizzo finora seguito in tale argomento presenta aspetti svantaggiosi dal punto di vista fisico, e ciò mi sembra di maggior peso.

Per essere più espliciti ricordo che, stante l'ipotesi di Fourier $\overset{c}{q}_l = -\varkappa T_{/l}$ sul vettore classico $\overset{c}{q}_l$ di conduzione termica, per i fluidi perfetti il 1° principio della termodinamica implica l'equazione di conduzione

$$a) \qquad \operatorname{div}(-\varkappa \operatorname{grad} T) = c\varrho \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt}$$

che, anzi, va considerata ad esso equivalente, sempre intendendo che l'unico assorbimento di energia da parte del detto fluido sia dovuto alla distribuzione di temperatura e, in particolare, non vi sia produzione di calore Joule.

In [16], [17] e [18], come ho già accennato, si usa una diretta relativizzazione della considerata equazione di conduzione, e la si considera come traducente in forma puntuale un principio di continuità del calore [18]).

---

[18]) In [16] si relativizzano, indipendentemente fra loro e anche dalle altre equazioni usate, sia l'ipotesi di Fourier — v. [16], (8.4), pag. 134 — che l'equazione di conduzione *a*) — vedi le formule coincidenti (10.4), (13.8) e (27.2) in [16], la (13.6) in [17] e la (5.8) in [18]. Più precisamente l'Autore postula un principio di continuità del calore in una certa speciale forma integrale — [16] pag. 137 — da cui ricava la suacennata forma puntuale (10.4) dalla quale ottiene pure una generale relazione integrale [(10.5)] che considera come traducente il postulato della continuità del calore — v. [16] pag. 138 —.

In primo luogo va osservato che tale principio è usato anche in casi quali quello di sviluppo di calore Joule [19]) e nei quali esso non è approssimato da alcuna legge classica. In tali casi il detto principio non è dunque fisicamente accettabile [20]) secondo la nota (3).

Riguardo ai fluidi perfetti — ai quali sostanzialmente ci si attiene in [16] — il considerato principio — v. [16] (27.2) pag. 167 — è fisicamente accettabile. Però esso è ivi considerato come indipendente dal 1° principio della termodinamica e d'altro canto questo è dedotto in [16] dalle equazioni gravitazionali [21]). L'equazione a cui questo è ridotto nel caso dei fluidi perfetti — ossia la formula (27.6) in [16] a pag. 167 — è presentata nel quadro delle equazioni fondamentali del fluido termodinamico relativistico — v. [16] pag. 167 — come indipendente dalla suddetta diretta relativizzazione della a).

Va osservato che, stante l'ipotesi di Fourier, si tratta — intendo le (27.2) e (27.6) in [16] pag. 167 — di due relativizzazioni differenti di una stessa equazione classica (il 1° principio della termodinamica). È vero che esse hanno forme differenti, però in conformità di quanto su di esse si è or ora osservato, vi sono fenomeni incompatibili con la teoria svolta in [16], [17] e [18], i quali appaiono invece come fisicamente possibili [22]).

---

[19]) In [17] un diretto analogo relativistico dell'equazione di conduzione termica a), in cui non si tien conto del calore Joule, è usato in presenza di correnti elettriche di conduzione — vedi formula (13.6) a pag. 500 [in 17]. Vedi pure ivi le formule (13.13) e (6.8).

[20]) Mi sembra invece ineccepibile dal punto di vista fisico il modo di trattare la legge di Ohm per fluidi nella relatività ristretta, brevemente accennato da C. Eckart in [7], pag. 923.

[21]) V. (13.5) in [16] pag. 142. Che (13.5) costituisca un analogo relativistico del 1° principio della termodinamica è riconosciuto in [16] a pag. 157.

[22]) Si consideri un recipiente ad intercapedine cilindrica, pieno di fluido perfetto rotante uniformemente e rigidamente assieme al recipiente stesso, rispetto ad un laboratorio inerziale. Vi sia un flusso di calore, per esempio, dall'interno verso l'esterno, tale che la temperatura sia, al pari della pressione p e della densità ϱ, stazionaria e a simmetria cilindrica. Evidentemente le suddette grandezze sono anche molecolarmente invariabili.

In terzo luogo, va osservato che mentre in fisica classica si hanno due relazioni distinte che legano la densità k di massa e quella kw di energia interna a p e T, invece nel quadro delle equazioni fondamentali considerato in [16] pag. 167 si ha, in corrispondenza ad esse, una unica relazione che lega $\varrho = k(c^2 + w)$ a p e T. Ciò è in certo senso imposto in [16] dall'esigenza di pareggiare i numeri delle equazioni e delle incognite e dalla suaccennata doppia relativizzazione del primo principio della termodinamica, il che non sembra una giustificazione fisicamente soddisfacente.

A tale proposito si può osservare che, è vero, in relatività massa ed energia vengono, in certo senso, ad identificarsi, però ciò non autorizza a trascurare la relazione di k con p e T in quanto $k = k^{*-1}dC/dC^*$ [**3** (50), **3** $(141)_1$] ha, sia in fisica classica che in relatività, il significato di rapporto di volumi corrispondenti rispetto ad una data configurazione di riferimento. Tale punto di vista è in pieno accordo con quello di C. Eckart — v. [7] — che in sostanza riferisce k alla quantità di materia e non alle sue proprietà gravitazionali (ϱ) o a quelle inerziali [23]).

Naturalmente, nonostante i precedenti tre aspetti dell'indirizzo seguito da Pham Mau Quam, la teoria svolta in [16], [17] e [18] può benissimo, in alcuni casi particolari, non essere in contrasto con la realtà fisica, e fra questi c'è certo quello adiabatico. Infatti in tal caso è nullo il vettore di corrente termica q^L e quindi il tensore termodinamico. Di conseguenza, da un lato le due suaccennate relativizzazioni del primo principio coincidono e dall'altro, sostituita, com'è d'uso, la variabile T con

---

Fissato un elemento ε del suddetto fluido, per quanto precede e, in particolare per la rigidità (locale) del moto, da un lato dalle equazioni (27.2) e (27.6) in [16] pag. 167 si deduce l'annullarsi del termine $q_L u^M u^L{}_{/M}$ proporzionale al calore complementare d'accelerazione introdotto sostanzialmente da Eckart — e ciò accade perchè le dette equazioni differiscono per esso, a meno di un fattore piccolissimo, a motivo dei differenti procedimenti di relativizzazione mediante i quali esse sono state ottenute (dal 1° principio della termodinamica) —; d'altro canto, nell'esperienza descritta quel termine deve invece risultare $\neq 0$.

[23]) Stante una qualunque di tali interpretazioni, per k vale la diretta relativizzazione $(ku^L)_{/L} = 0$ [**3** $(141)_2$] dell'equazione di continuità.

l'entropia η, la condizione stessa di adiabaticità equivale, riferendosi a fluidi perfetti non percorsi da correnti elettriche, all'equazione $\eta = \text{cost}$ che fornisce l'equazione (di stato) mancante in [16] ecc. secondo il punto di vista del presente lavoro.

Per esempio nel suddetto caso, i risultati ottenuti in [16] sono certo fisicamente accettabili — nota (3) — e facendo tendere c all'infinito devono tendere a quelli classici corrispondenti [24]). Però, in base ai tre precedenti aspetti dell'indirizzo seguito in [16], [17] e [18], mi sembra che, salvo casi particolari, anche in campi ben controllabili con l'esperienza le previsioni basate sulla teoria svolta in tali lavori possono discostarsi sensibilmente dalle analogie classiche e, in conformità di ciò, anche dalla realtà fisica [nota 3].

È appunto per quanto precede che preferisco la via seguita nei suaccennati lavori precedenti quelli di Pham Mau Quan sopra considerati, lavori per me accettabili, nonostante le suddette critiche fatte in [16].

PARTE I

Sulla conduzione termica.

2. Sul vettore lagrangiano di corrente termica. Ipotesi di Fourier e sua generalizzazione.

Nel presente lavoro presuppongo varie posizioni e risultati contenuti in [3], in particolare la convenzione sull'uso degli indici **3** [note (3) , (12)] secondo cui, di massima, gl'indici

[24]) A prima vista tale affermazione potrebbe apparire in contrasto col fatto che in [16] pag. 183 si trova un'espressione per la velocità di propagazione delle onde di discontinuità nel caso adiabatico, la quale per $c \longrightarrow \infty$ prende l'aspetto di quella classica nel caso isotermo — fra l'altro, quest'ultima in vari casi non è in accordo con l'esperienza, v. [21], pag. 144 —. Ciò dipende dal fatto che in [16] si ammettono continue le derivate prime della funzione $T = T(x^L)$. Applicando un procedimento analogo in fisica classica è attendibile un analogo risultato (nel caso adiabatico la temperatura, usualmente, non è considerata ma si riconosce che essa ha derivate prime discontinue).

maiuscoli variano da 0 a 3, mentre quelli minuscoli da 1 a 3 e inoltre gli indici latini si riferiscono al cronotopo U e quelli greci allo spazio astratto S_3^*, tridimensionale ed euclideo in cui si considera la configurazione di riferimento φ^* della materia [3 n. 3].

Suppongo ora che nella configurazione φ^* la porzione $\mathcal{T}$ di materia circostante il punto P^* di S_3^* sia omogenea [25]). Si fissino ad arbitrio i valori ammissibili $\bar{\varepsilon}_{\varrho\sigma}$ e $\overline{T}$ del tensore di deformazione $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ [3 n. 5] e della temperatura T nel punto P^* di S_3^* (e magari quelli $\bar{p}_i$ di alcuni parametri fisici p_i caratterizzanti assieme ad $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ e T lo stato interno dell'elemento materiale ε occupante P^* in φ^*).

Si ritagli dalla porzione $\mathcal{T}$ un sottile muro in modo che la normale ad esso corrisponda alla direzione dell'asse ξ di S_3^*. Indi si interponga tale muro fra una sorgente di calore S e un refrigerante R di capacità termiche grandi, e in modo che nel muro sia ovunque $\varepsilon_{\varrho\sigma} = \bar{\varepsilon}_{\varrho\sigma}$ e T si discosti poco da $\overline{T}$ (e l'analogo valga pure per p_i e $\bar{p}_i$); inoltre supponiamo che il verso di ξ corrisponda a quello da S a R.

Per la esigenza che gli esperimenti qui descritti siano compatibili con la teoria sviluppata nei prossimi paragrafi è bene pensare il suddetto esperimento come fatto mantenendo il laboratorio praticamente solidale ad un sistema di coordinate sensibilmente pseudo-euclideo entro il muro, S ed R e durante tutta l'esperienza (fra l'altro, si può pensare di fare la detta esperienza in una regione dove la curvatura del cronotopo sia molto piccola, per es. ponendo il laboratorio in un razzo rotante attorno al sole).

Manteniamo mediante l'uso di opportune forze superficiali, agenti sulle facce del muro, le condizioni (ossia T, $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ e p_i) pressochè stazionarie e misuriamo i piccoli incrementi di temperatura subiti in un lungo tempo da S e R (di capacità termiche note). Possiamo allora conoscere la quantità di calore cQ^* che ha attraversato il muro per secondo e per unità di superficie

---

[25]) Intendo che le equazioni costitutive dell'elemento ε rimangono inalterate al variare di ε nella porzione $\mathcal{T}$.

(in metri quadrati) nella configurazione φ^*, ove c è la velocità della luce nel vuoto.

Si può ritenere che nelle considerate condizioni Q^* sia proporzionale al gradiente di temperatura che, per quanto precede, va ritenuto contraverso all'asse ξ. Reso unitario tale gradiente, non escludo che al variare del detto asse ξ in S_3^* Q^* vari. Ammetto però che, conformemente a proprietà generali del comportamento dei corpi anisotropi, esistano (almeno) tre assi ξ_i, mutuamente ortogonali, che rendono Q^*, pensato come funzione di ξ, stazionario.

Si scelga il sistema (y) di coordinate, euclideo e con ξ_i per assi. Detto $Q^*_{(i)}$ ciò che diviene Q^* per $\xi = \xi_i$, si ponga

$$\varkappa^{*\varrho\sigma} = \sum_{i=1}^{3} Q^*_{(i)}\delta_i^\varrho\delta_i^\sigma = \varkappa^{*\varrho\sigma}\,. \tag{1}$$

Si prolunghi ora la definizione di $\varkappa^{*\varrho\sigma}$ in relazione ad ogni scelta del sistema (y) in S_3^* considerando $\varkappa^{*\varrho\sigma}$ come un tensore controvariante associato ad S_3^* in P^*.

I fenomeni prodotti nelle considerate esperienze sono stazionari, cosicchè in essi la temperatura

$$T = \overset{*}{T}(t, y) \tag{2}$$

dipende solo da y e non dal tempo t. Allora da **3** (111′) risulta

$$\frac{\partial \overset{*}{T}}{\partial y^\sigma} = \overset{*}{T}_{/\sigma} = T_{|\sigma} \tag{3}$$

ove $T_{|\sigma}$ è la derivata lagrangiana trasversa di T.

Almeno nel caso stazionario possiamo chiamare

$$q^{*\varrho} = -\,\varkappa^{*\varrho\sigma}T_{|\sigma} \tag{4}$$

vettore lagrangiano della corrente termica. Si può ritenere, in analogia col caso classico, che almeno nei fenomeni stazionari e pressochè solidali a spazi inerziali, lo scalare $cq^{*\varrho}d\sigma_\varrho^*$ rappresenti [26])

[26]) Ciò implica che nei casi di non totale anisotropia termica — nei quali la precedente determinazione del tensore $\varkappa^{*\varrho\sigma}$ può farsi rispetto a più scelte della terna (ξ_i) — il tensore $\varkappa^{*\varrho\sigma}$ a cui si arriva non dipende dalla terna (ξ_i).

il calore che attraversa per secondo la superficie $d\sigma^*_\varrho$ [3 n. 9].

Ritenere che $q^{*\varrho}$ definito da (4) abbia il suddetto significato anche nel caso non stazionario equivale ad accettare la legge (o ipotesi) di Fourier.

Va ricordato che, come ha osservato C. Cattaneo — v. [5] — tale legge, senz'altro accettabile come un'ottima approssimazione, implica che producendo una variazione di temperatura in una parte di un corpo, questa sia avvertita (ossia si propaghi) istantaneamente in tutto il corpo. Come ho già detto, ciò fa ritenere che dirette relativizzazioni della legge di Fourier implichino che variazioni di temperatura si propaghino con velocità superiore a c. Tale fenomeno non è logicamente incompatibile con l'esistenza della velocità limite affermata in relatività, in quanto questa si riferisce ai segnali che si propagano nel vuoto e non risentono della velocità della loro sorgente. Tuttavia, da un punto di vista di principio, una propagazione termica con velocità superiore a c in relatività, appare certo più insoddisfacente di una propagazione termica con velocità infinita in fisica classica, tenuto conto che in questa le forze a distanza rappresentano azioni propagantisi appunto con velocità infinita.

Per quanto sopra ritengo opportuno che sulla base della formula (18) di [5] pag. 92, stante per esempio l'espressione **3** (99′) della derivata lagrangiana trasversa e inoltre (2) e (3), si sostituisca la definizione (4) di $q^{*\varrho}$ con la seguente

$$(5)\qquad q^{*\varrho} = -\varkappa^{*\varrho\sigma}T_{|\sigma} + c^{-1}\sigma^{*\varrho\sigma}\left(\frac{\partial \overset{*}{T}}{\partial t}\right)_{|\sigma} \qquad (\varkappa^{*\varrho\sigma} = \varkappa^{*\sigma\varrho},\ \sigma^{*\varrho\sigma} = \sigma^{*\sigma\varrho})$$

ove il tensore $c^{-1}\sigma^{*\varrho\sigma}$ è molto piccolo rispetto a $\varkappa^{*\varrho\sigma}$ e va determinato con ulteriori esperienze, sempre del tipo precedente ma non stazionarie.

Conformemente a quanto precede intenderò, di regola $\varkappa^{*\varrho\sigma}$ e $\sigma^{*\varrho\sigma}$ come funzioni di y^β, $\varepsilon_{\beta\gamma}$ e T (e dei parametri p_ι, se vanno considerati).

3. Vettore euleriano di corrente termica. Relativizzazione in forma euleriana di una generalizzazione classica dell'ipotesi di Fourier. Caso delle coordinate solidali.

Si può definire il vettore euleriano q^L di corrente termina con le condizioni che q^L sia spaziale, ossia ortogonale alla4- velocità u^L [**3** (10)] e che, detta $d\sigma_R$ la superficie corrispondente [**3** (54)] alla superficie infinitesima $d\sigma^*_\varrho$ in S^*_3, sia $q^{*\varrho}d\sigma^*_\varrho = q^R d\sigma_R$. Allora per **3** (54) è $q^{*\varrho} = \gamma_R{}^\varrho q^R$ ove $\gamma_R{}^\varrho$ è il tensore complementare di deformazione — v. **3** (55) oppure **3** (63) —. Allora, considerato il gradiente $\alpha^L{}_\varrho$ di deformazione [**3** (13')] e l'analogo relativistico $\mathfrak{D}$ dello jacobiano relativo al passaggio tra la configurazione di riferimento e quella attuale [**3** (49)], stante **3** $(63)_1$ è

$$q^L = \mathfrak{D}^{-1}\alpha^L{}_\varrho q^{*\varrho} \qquad (q^{*\varrho} = \gamma_R{}^\varrho q^R,\ q^{*\varrho}d\sigma^*_\varrho = q^R d\sigma_R)\,. \tag{6}$$

Riprendo le equazioni **3** (1) del moto $\mathcal{M}$ della materia nel cronotopo U, ossia le

$$x^L = x^L(t, y^1, y^2, y^3); \tag{7}$$

indico con c la velocità della luce, con $ds^2 = g_{LM}dx^L dx^M$ la metrica cronometrica del cronotopo — v. [**3** n. 2] — che, in particolare, ha segnatura — 2, ossia è localmente riducibile alla forma $ds^2 = \delta'_{LM}dx^L dx^M$ ove

$$\delta'_{lm} = -\,\delta_{lm}\,, \qquad \delta'_{OL} = \delta'_{LO} = \delta_{LO}\,. \tag{8}$$

Indico con s l'arco cronotopico lungo le linee orarie, ossia il tempo römeriano; infine pongo, anche in vista di futuri usi,

$$s \equiv ct\,, \qquad v^L \equiv cu_L \frac{\partial x^L(t, y)}{\partial t}\,, \tag{9}$$

$$a^L = c^2 u^L{}_{/M} u^M = c^2 \frac{Du^L}{Ds} - c^2\left(\frac{\partial^2 x^L(t, y)}{\partial t^2} + \begin{Bmatrix} L \\ AB \end{Bmatrix} \frac{\partial x^A}{\partial t}\frac{\partial x^B}{\partial t}\right). \tag{10}$$

Chiamerò a^L *accelerazione propria* e la dirò *römeriana* per $c = 1$.

Stanti $(9)_1$ e (2) è $c^{-1}\partial \overset{*}{T}/\partial t = d\overset{*}{T}/ds = dT/ds = T_{/R}u^R$ ove, stante (7) e (2) è

$$(11) \qquad T = T(x) = T(x^0, \ldots, x^3) = \overset{*}{T}(t, y) \,.$$

Inoltre per **3** (91) $T_{|\sigma} = T_{/M}\alpha^M_\varrho$ e $(T_{/L}u^L)_{|\sigma} = (T_{/R}u^R)_{/M}u^M$. Allora posto [27])

$$(12) \qquad \varkappa^{LM} = \mathfrak{D}^{-1}\alpha^L_\varrho\alpha^M_\sigma\varkappa^{*\varrho\sigma} = \varkappa^{ML}, \quad \sigma^{LM} = \mathfrak{D}^{-1}\alpha^L_\varrho\alpha^M_\sigma\sigma^{*\varrho\sigma} = \sigma^{ML}$$
$$(u_L\varkappa^{LM} = u_L\sigma^{LM} = 0) \,,$$

per (6) l'eguaglianza (5) equivale alla

$$(13) \qquad q^L = -\varkappa^{LM}T_{/M} + \sigma^{LM}(T_{/R}u^R)_{/M} \qquad (q^Lu_L = 0) \,.$$

$\varkappa^{LM}$ e σ^{LM} dipendono, oltre che da y^σ, $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ e T (ep_i) come $\varkappa^{*\varrho\sigma}$ e $\sigma^{*\varrho\sigma}$, anche dalle g_{RS} e u^R che spesso van riguardate come incognite. Ho considerato le quantità lagrangiane $\varkappa^{*\varrho\sigma}$ e $\sigma^{*\varrho\sigma}$ e le espressioni (12) di $\varkappa^{LM}$ e σ^{LM} principalmente, perchè, salvo qualche caso (per es. quello dei fluidi) secondo cose dette nell'introduzione le funzioni $\varkappa^{*\varrho\sigma}$ e $\sigma^{*\varrho\sigma}$ costituiscono, mi sembra, la più semplice possibile forma per i dati e inoltre in (12) è esplicitata la dipendenza di $\varkappa^{LM}$ e σ^{LM} dalle g_{RS} e u^R.

Si osservi che, detta $ds^* = a^*_{\varrho\sigma}dy^\varrho dy^\sigma$ la metrica in S^*_3 e intendendo $g = \det \| g_{LM} \|$ e $a^* = \det \| a^*_{\varrho\sigma} \|$, per **3** (81) e **3** (82), in coordinate solidali $(x^r \equiv y^r)$ le eguaglianze (12) divengono, stante **3** (15)

$$(12') \qquad \varkappa^{LM} = \sqrt{\frac{g_{00}a^*}{-g}}\, \bar{g}^L{}_\varrho\bar{g}^M{}_\sigma\varkappa^{*\varrho\sigma}, \qquad \sigma^{LM} = \sqrt{\frac{a^*g_{00}}{-g}}\, \bar{g}^L_\varrho\bar{g}^M_\sigma \qquad (y^r \equiv x^r) \,.$$

L'elemento ε (occupante P^* nella configurazione di riferimento φ^*) si dice *termicamente isotropo* in φ^* se in ε — ossia in P^* — le funzioni $\varkappa^{*\varrho\sigma}$ e $\sigma^{*\varrho\sigma}$ dipendono dal tensore di deformazione $\varepsilon_{\alpha\beta}$, ovvero del tensore destro $C_{\varrho\sigma}$ di Cauchy-Green

[27]) In base a **3** (63) da (12) segue $\varkappa^{*\varrho\sigma} = \mathfrak{D}^{-1}\gamma_L^\varrho\gamma_M^\sigma\varkappa^{LM}$ e $\sigma^{*\varrho\sigma} = \mathfrak{D}^{-1}\gamma_L^\varrho\gamma_M^\sigma\sigma^{LM}$.

[**3** (20)] tramite i tre invariati principali del tensore $C_{\alpha\beta} = a^*_{\alpha\beta} + 2\varepsilon_{\alpha\beta}$ ove $a^*_{\varrho\sigma}$ è il tensore fondamentale in S^*_3. Anche per tali elementi materiali $\varkappa^*_{\varrho\sigma}$ può essere anisotropo; ciò può accadere in corrispondenza a valori anisotropi del tensore $C_{\beta\gamma}$, ossia valori che non hanno la forma $C_\varrho{}^\varrho a^*_{\beta\gamma}$.

Fissato il punto-evento E, ivi il sistema (x) di coordinate in U sia localmente proprio e geodetico, cioè, stante (8) ivi sia

$$(14) \qquad g_{LM} = \delta'_{LM}\,, \qquad u^L = \delta^L_0\,, \qquad \left\{ {L \atop AB} \right\} = 0 \qquad \text{(in } E)$$

onde $dx^0 = ds = cdt$. Allora, stante $(12)_{5,6}$, la (13) diviene

$$(15) \qquad -q_\iota = q^\iota = -\varkappa^{\iota m} \frac{\partial T}{\partial x^m} + \sigma^{\iota m} \frac{\partial T}{\partial x^m}\,.$$

Dunque la componente controvariante q^ι di q^L misura, stante (14), il flusso di calore in E per unità di superficie ortogonale alla linea coordinata [28]) x^ι.

4. Sul tensore termodinamico Q_{LM}.

Stanti (13) e **3** (10), chiamerò tensore termodinamico [29])

$$(16) \qquad Q_{LM} = q_L u_M + u_L q_M = Q_{ML} \qquad (\text{onde } u^L Q_{LM} = q_M\,,\ u^L u^M Q_{LM} = 0)\,.$$

Stante $(13)_2$ e la nota relazione $u^L u_L \equiv 1$, si ha

$$(17) \qquad u^L u_{L/M} = 0\,, \qquad q_{L/M} u^M = -q_L u^L{}_{/M}$$

[28]) In [16] (8.4) pag. 134 si dà invece tale significato alle componenti covarianti q_ι di q^L, onde c'è differenza di segno. Nel caso dei fluidi — considerati in [16] — nella (13), stante **3** (15), va inteso $\varkappa^{LM} = -\varkappa \bar{g}^{LM}$, $\sigma^{LM} = -\sigma \bar{g}^{LM}$. Allora, facendo $\sigma \equiv 0$ si ottiene il caso considerato in [16] e anzi $\varkappa$ ha lo stesso significato che nella formula (8.4) di [16].

[29]) Nel caso $\sigma_{LM} = 0$ e $\varkappa_{LM} = -\varkappa \bar{g}_{LM}$ Q_{LM} coincide a meno del segno [nota (28)] col tensore termodinamico considerato da Pham Mau Quan, per es., in [16] pag. 140. Tale tensore è stato sostanzialmente introdotto nello stesso caso da C. Eckart in [7] (relatività ristretta) come addendo del tensore d'impulso-energia.

da cui — cf. [16] pag. 142 — segue

$$(18) \qquad u_L Q^{LM}{}_{/M} = q^L{}_{/M} u_L u^M + q^M{}_{/M} = q^L{}_{/L} - q^L u^L{}_{/M} u^M .$$

Nel riferimento (x) localmente proprio e geodetico in E [(14)], per (17) è

$$(19) \qquad u^0 = u_0 = 1 , \qquad u_L = u^L = \delta^L_O , \qquad u^O{}_{/M} = u_{O/M} = 0 ,$$

$$(20) \quad q^O{}_{/M} = q_{O/M} = - q_i u^i{}_{/M} , \qquad q^L{}_{/L} = q^i{}_{/i} + q^O{}_{/O} = q^i{}_{/i} - q_i u^i{}_{/O} .$$

Al n. 12 si affermerà sulla base di deduzioni tratte dalle equazioni gravitazionali, che $q_{ass} = - c^{-1} u^L Q_L{}^M{}_{/M}$ è la densità propria di *calore assorbito* — precisamente il calore assorbito per unità di tempo e di configurazione attuale misurato da un osservatore solidale alla materia — *e dovuto alla distribuzione di temperatura.*

Mi propongo di dimostrare che tale affermazione è fisicamente accettabile, per es., sulla base di (16) e dell'ipotesi di Fourier (13) con $\sigma^{LM} \equiv 0$. Nel presente numero uso considerazioni del tipo di quelle svolte nel caso dei fluidi nella pubblicazione [7] di relatività ristretta e in quella [16] di relatività generale (ciò non toglie che vi possano essere differenze essenziali); intendo che riguarderò Q_{LM} come espresso mediante (16) ove q^L è il vettore di corrente termica e non espliciterò tale vettore. Nei numeri seguenti mostrerò che tale esplicitazione è molto opportuna quando s'intenda rilevare tutte le differenze fra le teorie classica e relativistica riguardo al considerato calore assorbito q_{ass} (oltre quelle rilevate nel presente numero ve ne sono altre dello stesso ordine di grandezza).

Valgano (9) e (14) in E, cosicchè ivi è $dx^0 = ds = cdt$. Allora da $(9)_2$, (14) e (20) segue

$$(21) \qquad q_{ass} = - c u_L Q^{LM}{}_{/M} = - c(q^L{}_{/L} - q_L u^L{}_{/M} u^M) =$$

$$= - c(q^i{}_{/i} + 2q^O{}_{/O}) = - c \left[\sum_i \frac{\partial q^i}{\partial x^i} + \frac{2}{c^2} \sum_i q^i \frac{\partial^2 v^i}{\partial t^2} \right] .$$

Dunque, poichè q^l è il vettore della corrente termica per unità di configurazione di riferimento [n. 3], l'espressione (21) di q_{ass} (in q^l) differisce da quella classica $-\operatorname{div}\overset{(c)}{\boldsymbol{q}}$ con $\overset{(c)}{q}{}^l = cq^l$ per il termine addizionale $-2c^{-2}\overset{(c)}{\boldsymbol{q}} \times \boldsymbol{a}$, prodotto scalare del detto vettore $\overset{(c)}{\boldsymbol{q}}$ per l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ a meno del piccolissimo fattore c^{-2}. Ammesso (per es. come cosa evidente) che, come risulterà dal n. 8, oltre ad essere in E $\overset{(c)}{q}{}^l = cq^l$, anche div $\overset{c}{q}$ differisce di molto poco da $c\delta_r{}^s \partial q^r/\partial x^s$, il precedente risultato mostra che l'espressione (21) di q_{ass} è compatibile con i risultati sperimentali, ossia è fisicamente accettabile [nota (3)].

Da $(20)_3$ e (21) appare che il diretto analogo relativistico dell'espressione classica $-\operatorname{div}\overset{c}{\boldsymbol{q}}$ del calore assorbito per unità di tempo e di configurazione attuale è

$$(22) \qquad \bar{q}_{ass} = -c(q^L{}_{/L} - q^L{}_{/M}u^M u_L) = -cq^L{}_{/M}\bar{g}^M{}_L \qquad (\bar{g}_{LM} = g_{LM} - u_L u_M)$$

In base all'ipotesi $(21)_1$ che, direi, sarà imposta al n. 13 dal 1° principio della termodinamica [(108)], segue che il calore q_{ass} assorbito per unità di tempo e di configurazione attuale, e dovuto alla distribuzione di temperatura, si compone di due termini: Uno ha l'espressione (22) che per (x) verificante (14) coincide con quella classica pur di non esplicitare q^L secondo (13) magari con $\sigma^{LM} \equiv 0$. L'altro è espresso, stante $(14)_3$, da

$$(23) \qquad q^{(a)}_{ass} = q_{ass} - q_{ass} = -2cq^L{}_{/M}u^M u_L = 2cq^L u_{L/M}u^M =$$
$$= 2cq^L \frac{Du_L}{Ds} = \frac{2}{c} q_L \frac{\partial^2 x^L}{\partial t^2}$$

cosicchè si potrebbe dirlo *complementare d'accelerazione* [30]).

---

[30]) Il lavoro $q^{(a)}_{ass}/2$ è stato considerato in relatività ristretta a proposito del termine $q_L u^L{}_{/M}u^M$ [(18)] da C. Eckart [nota (5)]. Tale Autore — a differenza di Pham Mau Quan in [16] pag. 155 — non osserva, in [7], che un altro termine uguale si trova in $-cQ^{LM}{}_{/M}$ e proviene dal-

Si osservi che $q^{(a)}_{ass}$ *è nullo, in particolare, nei processi (localmente) adiabatici* ($q^L = 0$) *o quando sia localmente nulla l'accelerazione della materia rispetto ad un riferimento localmente inerziale.*

5. Sulla decomposizione di divergenze nel cronotopo.

Questo numero e il seguente contengono preliminari in vista di discutere l'equazione di conduzione del calore e le equazioni dinamiche dedotte dalle equazioni gravitazionali; precisamente si vogliono precisare le differenze tra queste equazioni riferite a coordinate localmente geodetiche e proprie, e le analogie classiche [31]). A tale scopo comincio con fissare i seguenti semplici lemmi che dimostrerò per comodità del lettore:

Lemma 51.: *Se il tensore* $X^{L_1 \cdots L_n M} = X^{\cdots M}$ *dato in* U ($n \leqslant 0$) *è spaziale rispetto all'indice* M, *ossia* $X^{\cdots M} u_M = 0$, *allora*

$$X^{\cdots M}{}_{/M} = X^{\cdots M}{}_{/\tilde{M}} - X^{\cdots M} \frac{Du_M}{Ds} \qquad (T^{\cdots M} u_M = 0) \tag{24}$$

ove si intende [**3** nn. 2, 15]

$$\frac{Du_M}{Ds} = u_{M/A} u^A \,, \quad X^{\cdots M}{}_{/\tilde{H}} = X^{\cdots M}{}_{/A} \tilde{g}^A{}_H \,, \quad \tilde{g}_{LM} = g_{LM} - u_L u_M \,. \tag{25}$$

e si dirà $X^{\cdots M}{}_{/\tilde{H}}$ *gradiente trasverso di* $X^{\cdots M}$ *e* $X^{\cdots M}{}_{/\tilde{M}} = X^{\cdots M}{}_{/H} \tilde{g}^H{}_M$ *divergenza trasversa* di $X^{\cdots M}$ — cfr. [6] pag. 160 —.

---

l'addendo $q^L{}_{/L}$. Perciò c'è una certa differenza di terminologia fra il presente lavoro e [7]. Tale differenza non comporta però differenze nella previsione di fenomeni.

La formula (23) è sostanzialmente in accordo con la formula (21.6) di [16], pag. 155 — dedotta nella relatività ristretta — anzi coincide con (21.6) quando in questa si faccia $\beta = v/c = 0$. Ciononostante, rispetto a [16] il presente lavoro ha differenze non solo di nomenclatura ma di interpretazione fisica e di previsioni [nota 5]. Ad esempio dall'equazione del calore (10.4) considerata in [16], pag. 138, sembra che, stanti $(21)_1$ e (22), ivi si attribuisca a $q_{ass} - q^{(a)}_{ass}/2$ il significato fisico dato nella presente teoria a q_{ass}.

[31]) I lettori a cui tali discussioni non interessino possono saltare al n. 9.

LEMMA 5.2: *Se* $X^{\cdots LM}$ *è spaziale rispetto ad* L $(X^{\cdots LM}u_L = 0)$, *allora*

$$(26) \qquad X^{\cdots LM}{}_{/M} = \tilde{g}^L{}_A X^{\cdots AM} - u_{A/M} X^{\cdots AM} u^L \qquad (X^{\cdots\cdot L}{}_M u_L = 0)\,.$$

LEMMA 5.3: *Se* $X^{\cdots LM}$ *è spaziale rispetto a* L *e* M, *allora*

$$(27) \qquad X^{\cdots LM}{}_{/M} = \tilde{g}^L{}_A X^{\cdots AM}{}_{/\tilde{M}} - X^{\cdots LM} \frac{Du_M}{Ds} - u_{A/M} X^{\cdots AM} u^L$$

$$(28) \qquad \tilde{g}^L{}_A X^{\cdots AM}{}_{/M} = X^{\cdots LM}{}_{/\tilde{M}} - X^{\cdots LM} \frac{Du_M}{Ds} + u_{A/M} X^{\cdots AM} u^L\,.$$

DIMOSTRAZIONE: Per $(25)_3$, $(25)_2$ e $(24)_2$ è $X^{\cdots M}{}_{/M} = X^{\cdots M}{}_{/H}\tilde{g}_M{}^H + X^{\cdots M}{}_{/H} u_M u^H = X^{\cdots M}{}_{/\tilde{M}} - X^{\cdots M} u_{M/A} u^A$ onde per $(25)_1$ segue $(24)_1$. Dunque vale il lemma 5.1.

Per $(25)_3$ è $X^{\cdots LM}{}_{/M} = \tilde{g}^L{}_A X^{\cdots AM}{}_{/M} + u^L u_A X^{\cdots AM}{}_{/M}$ onde per $(26)_2$ vale $(26)_1$. Dunque vale il Lemma 5.2.

Infine valgano $(24)_2$ e $(26)_2$. Allora per $(24)_1$ e $(26)_2$ è $\tilde{g}^L{}_A X^{\cdots LM}{}_{/M} = \tilde{g}^L{}_A X^{\cdots AM}{}_{/\tilde{M}} - X^{\cdots\cdot LM} Du_M/Ds$ cosicchè per $(26)_1$ segue (27). Inoltre da $(24)_1$ e (26) $(X^{\cdots M} = X^{\cdots LM})$ segue (28). Dunque vale il Lemma 5.3.

c.d.d.

Considerata la funzione scalare $\theta = \theta(x)$ e supposto $X^{\cdots LM} = X^{LM}$ spaziale $[(24)_2,\ (26)_2]$, per la convenzione $(25)_2$ e per (27) si ha

$$(29) \qquad (X^{LM}\theta_{/L})_{/M} = X^{LM}\theta_{/LM} + \tilde{g}^L{}_A X^{AM}{}_{/\tilde{M}}\theta_{/L} - X^{LM} \frac{Du_M}{Ds}\theta_{/L} - u_{A/M} X^{AM} \frac{d\theta}{ds}\,.$$

Parlando dell'equazione del calore si vedrà l'interesse dell'ultimo termine di (29). L'esistenza in questa di un termine del tipo del penultimo era già nota.

Se in E il sistema (x) *soddisfa* (14), *stante* (9) *le* (27) *e gli ultimi* *due termini di* (29) (*a meno del fattore* -1) *si scrivono ivi*

$$(27') \quad \begin{cases} X^{\dots lM}{}_{/M} = \bar{g}^l{}_A X^{\dots AM}{}_{/M} = X^{\dots lM}{}_{/\bar{M}} - \dfrac{\delta_{rs}}{c^2} X^{\dots lr} \dfrac{\partial^2 x^s}{\partial t^2} \\ X^{\dots oM}{}_{/M} = -\dfrac{1}{c^2} v_{r/s} X^{\dots rs} \qquad\qquad [v_L = v_L(x)] \end{cases}$$

$$(30) \quad \begin{cases} X^{LM} \dfrac{Du_M}{Ds} \theta_{/L} = \delta_{rs} X^{lr} \dfrac{\partial^2 x^s}{\partial t^2} \theta_{/l}\,, \\ u_{A/M} X^{AM} \dfrac{d\vartheta}{ds} = \dfrac{1}{c^2} X^{rs} \dfrac{\partial v_r}{\partial x^s} \dfrac{d\theta}{dt}\,. \end{cases}$$

6. Una relazione relativistica fra la divergenza di un tensore doppio euleriano e quella del corrispondente misto.

Sia $X^{LM} = X^{LM}(x)$ un tensore spaziale (non necessariamente simmetrico) definito in $\mathfrak{U}$ e $K^{L\varrho}$ sia il suo corrispondente misto onde, fatto $\overset{*}{a}_{\varrho\sigma} \equiv \delta_{\varrho\sigma}$ e $y^0 \equiv t \equiv s$ — ossia supposta $(9)_1$ valida con $c = 1$ — si ha [**3** $(78)_1$, **3** (73), **3** (49)]

$$(31) \quad \begin{cases} X^{LM} = \dfrac{1}{\mathfrak{D}} K^{L\sigma} \alpha^M{}_\sigma\,, \qquad K^{L\varrho} = X^{LM} \gamma_M{}^\sigma\,, \\ \mathfrak{D} = \sqrt{-g}\, \dfrac{\partial(x^0, \dots, x^3)}{\partial(y^0, \dots, y^3)} \qquad (\overset{*}{a}_{\varrho\sigma} = \delta_{\varrho\sigma},\ t \equiv y^0 \equiv s). \end{cases}$$

Com'è noto

$$(32) \qquad X^{LM}{}_{/M} = \sum_M \frac{\partial \sqrt{-g} X^{LM}}{\partial x^M} + \left\{ \begin{matrix} L \\ HM \end{matrix} \right\} X^{HM}\,.$$

Per (31) e **3** (13')

$$(33) \qquad \sqrt{-g}\, X^{LM} = \frac{\sqrt{-g}}{\mathfrak{D}} \alpha^M{}_\sigma K^{L\sigma} = \frac{\sqrt{-g}}{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial x^M}{\partial y^\sigma} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial x^H}{\partial y^\sigma} u_H u^M \right) K^{L\sigma}\,.$$

Ricordo che, stante $(31)_3$ si ha [32])

$$\frac{\partial}{\partial x^L}\left(\frac{\sqrt{-g}}{\mathfrak{D}}\frac{\partial x^M}{\partial y^\sigma}\right) = \frac{\partial}{\partial x^L}\left[\frac{\partial(y^0, \ldots, y^3)}{\partial(x^0, \ldots, x^3)}\frac{\partial x^M}{\partial y^\sigma}\right] = 0 . \tag{34}$$

Allora da (33) e (34) segue, pensando tutto opportunamente in funzione delle x^L,

$$\sum_M \frac{\partial\sqrt{-g}\, X^{LM}}{\partial x^M} = \frac{\sqrt{-g}}{\mathfrak{D}}\sum_M\left[\frac{\partial K^{L\sigma}}{\partial x^M}\alpha^M{}_\sigma - \right. \tag{35}$$

$$\left. - K^{L\sigma}\frac{\partial}{\partial x^M}\left(\frac{\partial x^H}{\partial y^\sigma}u_H\right)u^M - \frac{\partial x^H}{\partial y^\sigma}u_H\frac{\partial u^M}{\partial x^M}K^{L\sigma}\right].$$

Si supponga, com'è lecito, il sistema (x) tale per cui [(8)]

$$g_{LM} = \delta'_{LM}, \qquad u^L = \delta^L_0, \qquad \left\{ {L \atop AB} \right\} = \tag{36}$$

$$= 0, \quad \frac{\partial x^H}{\partial y^\varrho}u_H = 0 \quad \text{in } E \qquad (t \equiv s\,,\ \overset{*}{a}_{\varrho\sigma} \equiv \delta_{\varrho\sigma}) .$$

Per $(36)_4$ e **3** (13') in E è $\alpha^H{}_\varrho = \partial x^H/\partial y^\varrho$ inoltre, con ovvio significato delle notazioni [(7)], è $u_H\partial u^H/\partial y^\varrho = 0$. Allora per $(36)_2$ in E è [**3** (111)]

$$\frac{\partial}{\partial x^M}\left(\frac{\partial x^H}{\partial y^\sigma}u_H\right)u^M = \frac{D}{Ds}\left(\frac{\partial x^H}{\partial y^\sigma}u_H\right) = \tag{37}$$

$$= \frac{\partial u^H}{\partial y^\sigma}u_H + \frac{\partial x^H}{\partial y^\sigma}\frac{Du_H}{Ds} = \frac{\partial x^H}{\partial y^\sigma}\frac{Du_H}{Ds} = \alpha^H{}_\sigma\frac{Du_H}{Ds} .$$

Si aggiunga che in E, oltre ad $\alpha^L{}_\sigma = \partial x^L/\partial y^\sigma$, si ha, per $(36)_1$ $\sqrt{-g} = 1$. Allora da (32), (35), $(36)_{3,4}$ e (37) segue

$$X^{LM}{}_{/M} = \sum_M \frac{\partial\sqrt{-g}\, X^{LM}}{\partial x^M} = \frac{1}{\mathfrak{D}}\left(\sum_\varrho \frac{\partial K^{L\sigma}}{\partial y^\sigma} - \alpha^{H\sigma}\frac{Du_H}{Ds}K^{L\sigma}\right). \tag{38}$$

---

[32]) **La formula $(34)_2$ è stata dimostrata per la prima volta da Piola. Essa si ottiene riferendo a coordinate cartesiane la formula (18.1) in [26], pag. 247.**

Allora, ricordando la definizione **3** (98) di derivata langragiana trasversa e stanti (10) e $(21)_1$, per $(31)_1$ (38) *prende l'utile forma.*

$$(39)\qquad X^{LM}{}_{/M} = \frac{1}{\mathfrak{D}} K^{L\sigma}{}_{|\sigma} - X^{LH}\frac{Du_H}{Ds} = \frac{1}{\mathfrak{D}}\left(K^{L\sigma}{}_{|\sigma} - \frac{1}{c^2} a_H \alpha^H{}_\sigma K^{L\sigma}\right).$$

Confrontando (39) con (24) si ottiene, stante $(25)_2$, l'*interessante formula*

$$(40)\qquad X^{LM}{}_{/\tilde{M}} = \frac{1}{\mathfrak{D}} K^{L\sigma}{}_{|\sigma}.$$

Da (28), (40) e $(31)_1$ si ha, stante (10),

$$(41)\qquad \tilde{g}^L{}_H X^{HM}{}_{/M} = \mathfrak{D}^{-1}\left(K^{L\sigma}{}_{|\sigma} - X^{LH}\frac{a_H}{c^2} - \Pi^{(i)}\frac{u^L}{c}\right) =$$

$$= \mathfrak{D}^{-1}\left(K^{L\sigma}{}_{|\sigma} - K^{L\sigma}\alpha^H{}_\sigma\frac{a_H}{c^2}\right) - \Pi^{*(i)}\frac{u^L}{c}$$

$$\left(\text{con}\ \frac{\Pi^{(i)}}{\mathfrak{D}} = \Pi^{*(i)} = -\,cX^{AB}u_{A/B}\right).$$

Evidentemente

$$(41')\qquad u_L K^{L\varrho}{}_{|\varrho} = c^{-1}\Pi^{*(i)} \qquad\qquad (u_L K^{L\sigma} = 0)\,.$$

7. Decomposizione di $\alpha^L{}_{\varrho|\sigma}$ e $K^{L\sigma}{}_{|\sigma}$. Espressione di $X^{LM}{}_{/\tilde{M}}$ mediante il corrispondente langrangiano $Y^{\varrho\sigma}$ di X^{LM}. Sul risultante delle forze di contatto.

Da **3** (104) e **3** (104') si hanno le seguenti espressioni del gradiente lagrangiano di velocità $\overset{*}{u}_{\varrho\sigma}$.

$$(42)\qquad \overset{*}{u}_{\varrho\sigma} = -\,u_{R/S}\alpha^R{}_\varrho\alpha^S{}_\sigma = -\,\alpha^R{}_\varrho u_{R|\sigma} = -\frac{\partial x^R}{\partial y^\varrho}u_{R|\sigma}\,.$$

Secondo **3** $(122)_2$ denoto la parte spaziale di $\alpha^L{}_{\varrho|\sigma}$ con

$$(43)\qquad \overset{(2)}{\alpha^L{}_{\varrho\sigma}} = \tilde{g}^L{}_M\alpha^M{}_{\varrho|\sigma} = \alpha^L{}_{\varrho|\sigma} - u^L u_M \alpha^M{}_{\varrho|\sigma}\,.$$

Essendo $u_M \alpha^M{}_\varrho = 0$, si ha $[(42)_{1,2}]$

$$u^*_{\varrho\sigma} = - u_{R|\sigma}\alpha^R{}_\varrho = u_M \alpha^M{}_{\varrho|\sigma} \tag{44}$$

cosicchè per (43) *si ha la decomposizione*

$$\alpha^L{}_{\varrho|\sigma} = \overset{(2)}{\alpha^L}{}_{\varrho\sigma} + u^*_{\varrho\sigma} u^L \tag{45}$$

che mi sembra utile in quanto per **3** (127) *in un riferimento localmente proprio e geodetico è*

$$\overset{(2)}{\alpha^l}{}_{\varrho\sigma} = \partial^2 x^l / \partial y^\varrho \partial y^\sigma \,, \qquad \overset{(2)}{\alpha^0}{}_{\varrho\sigma} = 0 \,.$$

Introdotto il corrispondente lagrangiano $Y^{\varrho\sigma}$ di $K^{L\sigma}$ e X^{LM} [**3** (73), **3** (74), **3** (78)], si ha

$$K^{L\sigma} = \alpha^L{}_\varrho Y^{\varrho\sigma} \,, \qquad X^{LM} = \mathfrak{D}^{-1} \alpha^L{}_\varrho \alpha^M{}_\sigma Y^{\varrho\sigma} \,. \tag{46}$$

Allora, stante (45), *vale per* $K^{L\sigma}{}_{|\sigma}$ *la decomposizione*

$$K^{L\sigma}{}_{|\sigma} = \overset{(2)}{\alpha^L}{}_{\varrho\sigma} Y^{\varrho\sigma} + u^*_{\varrho\sigma} Y^{\varrho\sigma} u^L + \alpha^L{}_\varrho Y^{\varrho\sigma}{}_{|\sigma} \,. \tag{47}$$

Per (41) e $(44)_1$ è

$$\Pi^{*(i)} = \mathfrak{D}\Pi^{(i)} = - c\mathfrak{D} X^{AB} u_{A/B} = + c Y^{\varrho\sigma} u^*_{\varrho\sigma} \tag{48}$$

cosicchè, in accordo con una deduzione tratta da (41), in base $(43)_1$ e (47) *si ha*

$$K^{L\sigma}{}_{|\sigma} = \tilde{g}^L{}_A K^{A\sigma}{}_{|\sigma} + c^{-1} \Pi^{*(i)} u^L \tag{49}$$

$$\text{con } \tilde{g}^L{}_A K^{A\sigma}{}_{|\sigma} = \overset{(2)}{\alpha^L}{}_{\varrho\sigma} Y^{\varrho\sigma} + \alpha^L{}_\varrho Y^{\varrho\sigma}{}_{|\sigma} \,.$$

Per (40) in base a $(49)_2$ [e a $(49)_1$ e $(48)_1$] *si ha* $[(25)_2]$

$$\mathfrak{D}\tilde{g}^L{}_A X^{AM}{}_{/\tilde{M}} = \overset{(2)}{\alpha^L}{}_{\varrho\sigma} Y^{\varrho\sigma} + \alpha^L{}_\varrho Y^{\varrho\sigma}{}_{|\sigma} \qquad \left[u_L X^{AM}{}_{/\tilde{M}} = \frac{1}{c}\Pi^{(i)} \right]. \tag{50}$$

Di conseguenza, per cose dette dopo (45), *se* (x) *verifica in* E

$(36)_1, \dots, _4$ — *onde* $a^l{}_\varrho = \partial x^l / \partial y^\varrho$ — *allora ivi è*

$$(51) \qquad X^{lM}{}_{/\tilde M} = K^{l\sigma}{}_{|\sigma} = g^l{}_A X^{AM}{}_{/\tilde M} = \mathfrak{D}^{-1} \sum_{\varrho\sigma} \left(\frac{\partial^2 x^l}{\partial y^\varrho \partial y^\sigma} Y^{\varrho\sigma} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial x^l}{\partial y^\varrho} \frac{\partial Y^{\varrho\sigma}}{\partial y^\sigma} \right) = \mathfrak{D}^{-1} \sum_{\varrho\sigma} \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \left(\frac{\partial x^l}{\partial y^\varrho} Y^{\varrho\sigma} \right).$$

Inoltre per $(36)_1, \dots _4$ $\mathfrak{D}$ ha in E la stessa espressione dello jacobiano nella trasformazione classica fra le coordinate nelle configurazioni φ^* e φ, come si riconosce facendo $-g = 1$ in **3** (61). Allora il secondo membro di (51) è l'espressione classica di $X^{lm}{}_{/m}$ mediante il corrispondente langraugiano $Y^{\varrho\sigma}$ di X^{lm} — v. [22] pag. 96 —. Dunque *la parte spaziale della divergenza relativistica* $X^{LM}{}_{/M}$ *ha in un riferimento localmente geodetico e proprio, una espressione — fornita da* (27) *e* (51) *— nel corrispondente lagrangiano* $Y^{\varrho\sigma}$ *di* X^{LM} *coincidente con l'analoga espressione classica a meno del piccolissimo ultimo termine in* $(27)_1$ *involgente l'accelerazione.*

Ne segue che l'*espressione* $-\, \tilde g^L{}_A X^{AM}{}_{/M}$ *è fisicamente accettabile* [*nota* (3)] *come risultante delle forze di contatto per unità di configurazione attuale* [33]).

Mi sembra utile completare le considerazioni precedenti, osservando che, almeno nel caso dei corpi elastici, per varie grandezze quali le costanti termiche $\varkappa^{*\varrho\sigma}$ e $\sigma^{*\varrho\sigma}$ o gli sforzi lagrangiani si useranno equazioni costitutive del tipo

$$(52) \qquad Y^{\varrho\sigma} = k^*(y) \tilde Y^{\varrho\sigma}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, y)$$

ove $k^*(y)$ è la densità di massa convenzionale nella configurazione di riferimento φ^*[**3** n. 19] e [**3** (20)]

$$(53) \qquad C_{\beta\gamma} = 1 + 2\varepsilon_{\beta\gamma} = -\, g_{LM} a^L{}_\beta a^M{}_\gamma = -\, a_{L\beta} a^L{}_\gamma$$

$$\left(a^L{}_\varrho = \frac{\partial x^A}{\partial y^\varrho} \tilde g^L{}_A \right).$$

---

[33]) Tali considerazioni di dinamica serviranno al n. 12. Le faccio a questo punto perchè si fondano sulle formule (27) e (51), preliminari per la discussione dell'espressione del calore assorbito q_{ass} fornito da $(21)_1$ e (13).

Conviene osservare che per **3** (101) e **3** (102) è [34])

$$(54) \qquad C_{\beta\gamma|\sigma} = 2\varepsilon_{\beta\gamma|\sigma} = -\alpha_{L\beta|\sigma}\alpha^{L}{}_{\gamma} - \alpha_{L\beta}\alpha^{L}{}_{\beta|\sigma} = - \\ = -\overset{(2)}{\alpha}_{L\beta\sigma}\alpha^{L}{}_{\gamma} - \alpha_{L\beta}\overset{(2)}{\alpha}{}^{L}{}_{\beta\sigma}\,.$$

Allora se (x) soddisfa $(36)_{1\ldots4}$, per cose già dette, in E risulta

$$(55) \qquad 2\frac{\partial \varepsilon_{\beta\gamma}}{\partial y^{\sigma}} = 2\varepsilon_{\alpha\gamma|\sigma} = \delta_{rs}\frac{\partial^2 x^r}{\partial y^\sigma \partial y^\beta}\frac{\partial x^s}{\partial y_\gamma} + \delta_{rs}\frac{\partial x^r}{\partial y_\beta}\frac{\partial^2 x^s}{\partial y^\sigma \partial y^\beta} = 2\frac{\partial \overset{e}{\varepsilon}_{\varrho\sigma}}{\partial y^\sigma}$$

ove si è introdotto, in coordinate localmente proprie e geodetiche in E, la formazione ordinaria (classica) di deformazione

$$(56) \qquad \overset{e}{\varepsilon}_{\varrho\sigma} = \frac{1}{2}\delta_{rs}\frac{\partial x^r}{\partial y^\varrho}\frac{\partial x^s}{\partial y^\sigma} - \frac{1}{2}\delta_{\varrho\sigma}\,.$$

da considerarsi come una formazione definita ovunque.

Stante (52), in (51) $Y^{\varrho\sigma}$ va pensata come funzione di y sia direttamente che tramite $\varepsilon_{\alpha\beta}$ e T. Da quanto precede [(55)] risulta che, stante (56), l'ultimo membro di (51) è ***identico all'analogo classico calcolato per*** $Y^{\varrho\sigma} = k^{*}\tilde{Y}^{\varrho\sigma}(\overset{e}{\varepsilon}_{\alpha\beta}, T, y)$. Inoltre, supposto (x) verificante $(36)_{1\ldots4}$ e stante (56), si introduca la formazione ordinaria (classica) di Kirchhoff $\overset{e}{K}{}^{r\sigma}$ mediante l'eguaglianza

$$(57) \qquad \overset{e}{K}{}^{r\sigma} = \overset{e}{K}{}^{r\sigma}(t, y) = \sum_{r}\frac{\partial x^r}{\partial y^\varrho} Y^{\varrho\sigma}(\overset{e}{\varepsilon}_{\alpha\beta}, T, y)$$

Allora per (51) si ha in E, stanti $(36)_{1\ldots4}$,

$$(58) \qquad X^{lM}{}_{/\bar{M}} = K^{l\sigma}{}_{|\sigma} = \mathfrak{D}^{-1}\sum_{\sigma}\frac{\partial \overset{e}{K}{}^{l\sigma}}{\partial y^\sigma} \quad \text{con} \quad \mathfrak{D} = \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(y^1, y^2, y^3)}\,.$$

---

[34]) Mi sembra interessante riprendere il tensore lagrangiano $\overset{(2)}{C}_{\lambda\varrho\sigma} = -\alpha_{L\lambda}\overset{(2)}{\alpha}{}^{L}{}_{\varrho\sigma}$ [**3** (123)] e porre (55) nella forma $C_{\beta\gamma|\sigma} = 2\varepsilon_{\beta\gamma|\sigma} = \overset{(2)}{C}_{\beta\gamma\sigma} + \overset{(2)}{C}_{\gamma\beta\sigma}$.

8. Sulla differenza fra i casi classico e relativistico riguardo all'espressione della densità propria q_{ass} del calore assorbito dovuto alla distribuzione della temperatura.

Poichè $q_L u^L = 0$ [(13)$_2$], in base al Lemma 5.1 [(24), (25)] da (21)$_1$ segue [(25)$_2$]

$$(59)\qquad q_{ass} = - c u_L Q^{LM}{}_{/M} = - c q^L{}_{/\bar{L}} + 2 c q^L D u_L / Ds = -$$

$$- c q^L{}_{/\bar{L}} + \frac{2}{c} q^L a_L$$

ove q^L è dato da (13). Facendo ivi $\varkappa^{LM} = - \varkappa \bar{g}^{LM}$ si ottiene sostanzialmente il calore assorbito dovuto alla distribuzione di temperatura, usato da C. Eckart in [7] (relatività ristretta). In [16], [17], [18] si assume

$$(59')\qquad - c q^L{}_{/L} = - c q^L{}_{/\bar{L}} + c q^L D u_L / Ds = - c q^L{}_{/\bar{L}} + c^{-1} q^L a_L \,.$$

per espressione del calore assorbito per unità di tempo e di configurazione attuale. Però la quantità $q^{(d)}_{ass}$ data da (59) viene implicitamente considerata e valutata anche da Pham Mau Quan — v. [16] pag. 155 — per determinare la differenza fra l'espressione del 1° principio della termodinamica in uno spazio della relatività ristretta e la corrispondente espressione classica.

Si è osservato, sempre riferendosi al detto spazio e a fluidi, la presenza in q_{ass} del piccolissimo termine $q^{(d)}_{ass}$ dato da (23). Esso è stato sostanzialmente [35]) riconosciuto da C. Eckart, che lo ha chiamato *lavoro del calore attraverso la materia accelerata*, sulla base di una formula del tipo (21), dove non si esplicita q^L [(13)].

In un riferimento localmente proprio e geodetico l'espressione (13) di q^L si identifica con la corrispondente espressione classica. Anzi, supposto che in E, oltre (36)$_{1,2,3}$ valga (36)$_4$ — onde $\alpha^i{}_\varrho = \partial x^i / \partial y^\varrho$ — la detta identificazione sussiste anche quando si

---

[35]) Nel caso dei fluidi in [7] si usa la decomposizione $q_{ass} = - c q^L{}_{/L} + c q_L D u^L / Ds$. Ne segue ciò che è detto in nota (30).

pensi q^L espresso mediante $\varkappa^{*\varrho\sigma}$ e $\sigma^{*\varrho\sigma}$ tramite (12) e (13). D'altro canto, in (59) e (59') figura non solo q^L ma anche $q^L{}_{/L}$ o $q^L{}_{/\bar{L}}$ [(25)$_2$] e le espressioni di queste sia mediante T, $\varkappa^{LM}$ e σ^{LM} che mediante T, $\varkappa^{*\varrho\sigma}$ e $\sigma^{*\varrho\sigma}$ si identificano con le corrispondenti classiche solo a meno di piccolissimi termini.

Tenendo conto di questi si vede che le espressioni classiche e relativistiche di q_{ass} (e $- cq^L{}_{/L}$) differiscono, oltre che per il calore complementare di accelerazione [(23)] di C. Eckart, anche per il *calore complementare di deformazione* (*sotto temperatura variabile*) definito da

$$(60)\qquad q^{(d)}_{ass} = cu_{A/L}\left(- \varkappa^{AL}\frac{dT}{ds} + \sigma^{AL}\frac{d^2T}{ds^2}\right) = \\ = \frac{1}{c}\left(- \varkappa^{LM}\frac{\partial \overset{*}{T}}{\partial t} + \frac{\sigma^{LM}}{c}\frac{\partial^2\overset{*}{T}}{\partial t^2}\right)$$

ove si tien conto di (9) e si intende, stante (7), $\overset{*}{T}(t, y) = T(x)$ [(2)]. La denominazione proposta per $q^{(d)}_{ass}$ si giustifica in quanto, essendo $\varkappa^{LM} = \varkappa^{ML}$, $\sigma^{LM} = \sigma^{ML}$ e $\varkappa^{LM}u_M = \sigma^{LM}u_M = 0$, q_{ass} è nullo quando localmente è nulla la velocità spaziale di deformazione $\Delta_{LM} = - (u_{A/B} + u_{B/A})g^A{}_L g^B{}_M/2$ oppure quando la temperatura non varia.

Per assodare l'intervento di $q^{(d)}_{ass}$ nell'espressione di q_{ass}, suppongo che in E valga (36)$_{1 \ldots 4}$. Allora, riferendosi al tensore spaziale X^{LM} figurante in (29), si ha in E

$$(61)\qquad X^{LM}\theta_{/LM} + \bar{g}^L{}_A X^{AM}{}_{/\bar{M}}\,\theta_{/L} = \sum_{lm}\left(X^{lm}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^l\partial x^m} + \frac{\partial X^{lm}}{\partial x^m}\frac{\partial\theta}{\partial x^l}\right) = \\ = \sum_{lm}\frac{\partial}{\partial x^m}\left(X^{lm}\frac{\partial\theta}{\partial x^l}\right)$$

dunque il primo membro di (61) si identifica con l'espressione classica di $(X^{lm}\theta_{/l})_{/m}$. Inoltre, stanti (36)$_{1 \ldots 4}$, si identificano con le analoghe classiche non solo l'*espressione* (31) *di* X^{LM} *mediante* $Y^{\varrho\sigma}$ *ma anche quella di* $\bar{g}^L{}_A X^{AM}{}_{/\bar{M}}$ *nel senso che vale* (51). *Dunque anche l'espressione relativistica lagrangiana — ossia mediante le* $Y^{\varrho\sigma}$ *— del primo membro di* (61) *si identifica con quella classica lagrangiana di* $(X^{lm}\theta_{/l})_{/m}$.

Si considerino ora le eguaglianze ottenute dalla (29) facendovi una volta $X^{LM} = -\varkappa^{ML}$ e $\theta = T$ e un'altra volta $X^{LM} = \sigma^{ML}$ e $\theta = dT/ds = T_{/B}u^B$. Sommando membro a membro le due eguaglianze così ottenute, scambiando gli indici L ed M e tenendo conto di (13) e (61), si ottiene in E

$$(62) \qquad q^L{}_{/L} = (-\varkappa^{LM}T_{/M})_{/L} + \left[\sigma^{LM}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{/M}\right]_{/L} = \\ = \frac{1}{c}\overset{e}{q}{}^l{}_{/l} - \overset{e}{q}{}^L\frac{Du^L}{Ds} - \frac{1}{c}q^{(d)}_{ass}$$

ove valgono (60) e [(61)]

$$(63) \qquad -\overset{e}{q}_{ass} = \frac{1}{c}\overset{e}{q}{}^l{}_{/l} = \sum_{lm}\frac{\partial}{\partial x^l}\left[-\varkappa^{lm}\frac{\partial T}{\partial x^m} + \sigma^{lm}\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{dT}{ds}\right].$$

Confrontando (62) con l'eguaglianza $q^L{}_{/L} = q^L{}_{/\bar{L}} - q^L Du_L/Ds$ [(24)] riconosce che $cq^L{}_{/\bar{L}} = \overset{e}{q}{}^l{}_{/l} - q^{(d)}_{ass}$. Allora in base a (23) e (59) si conclude che, stanti le espressioni (23) e (60) di $q^{(a)}_{ass}$ e $q^{(d)}_{ass}$, *il calore assorbito relativistico ha la seguente decomposizione*

$$(64) \qquad q_{ass} = -cu_LQ^{LM}{}_{/M} = \overset{e}{q}_{ass} + q^{(a)}_{ass} + q^{(d)}_{ass} = -(cq^L{}_{/\bar{L}} + q^{(d)}_{ass}) + \\ + q^{(a)}_{ass} + q^{(d)}_{ass}.$$

nel calore ordinario (classico) $\overset{e}{q}_{ass} = cq^L{}_{/\bar{L}} + q^{(d)}_{ass}$, *nel calore complementare d'accelerazione* $q^{(a)}_{ass}$ [(23)] *e in quello complementare* $q^{(d)}_{ass}$ *di deformazione sotto temperatura variabile* [(60)].

La decomposizione (64) vale, per $\sigma^{LM} \equiv 0$ e nel caso dei fluidi, anche nella teoria svolta in [7]. Da quanto precede si riconosce pure che per la quantità $q_{ass} - q^{(a)}_{ass}/2$ assunta in [16] per calore assorbito, vale la decomposizione dello stesso tipo $q_{ass} - q^{(a)}_{ass}/2 = \overset{e}{q}_{ass} + q^{(a)}_{ass}/2 + q^{(d)}$.

PARTE II

Sull'elettromagnetismo da un punto di vista Lagrangiano

9. Forma lagrangiana delle equazioni costitutive elettromagnetiche.

Le grandezze elettromagnetiche caratteristiche degli elementi materiali (dei loro materiali) sono essenzialmente il tensore ζ_{LM} di conducibilità elettrica, il tensore dielettrico e quello di permeabilmente magnetica. In relatività queste due ultime quantità vengono a fondersi in un unico tensore $\eta_{AB}{}^{LM}$ caratterizzante il legame

$$f_{AB} = \eta_{AB}{}^{LM} F_{LM} \qquad \text{con} \qquad \eta_{ABCD} = -\eta_{BACD} = -\eta_{ABDC} \tag{65}$$

fra i tensori elettromagnetici F_{LM} e f_{AB}. Considerato nel punto evento E occupato da materia un osservatore solidale a questa, e detti E_L, H_L, D_L e B_L i vettori covarianti ortogonali ad u^L rappresentanti rispetto al considerato osservatore ordinatamente il campo elettrico, quello magnetico e le corrispondenti induzioni [36]), i tensori F_{LM} e f_{AB}, stante **3** (44), restano determinati dalle due eguaglianze

$$\begin{cases} F_{AB} = E_A u_B - E_B u_A - \varepsilon_{ABPR} u^R B^P, \\ f_{AB} = D_A u_B - D_B u_A - \varepsilon_{ABPR} u^R H^P. \end{cases} \tag{66}$$

Poichè $\varepsilon^{AB}{}_{LM}\varepsilon_{ABCD} = -2(g_{LC}g_{MD} - g_{LD}g_{MC})$ e

$$E_L u^L = H_L u^L = D_L u^L = B_L u^L = 0, \qquad u^M u_M = 1, \tag{67}$$

di conseguenza, *sotto la condizione dell'emisimmetria di* F_{AB} *e* f_{AB},

[36]) Intendo che, fissato E e scelto (x) in modo che sia $g_{LM} = \delta'_{LM}$ e $u^L = \delta^L_0$, le $E_r = -E^r$ siano componenti del campo elettrico misurato dal considerato osservatore e l'analogo valga per H_r, D_r e B_r — cfr. [8], pag. 423.

le eguaglianze (66) *equivalgono ordinatamente ai due gruppi*

$$(68)\qquad E_A = F_{AB}u^B\,,\qquad B_L = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{AB}{}_{LM}u^M F_{AB}\,.$$

$$(69)\qquad D_A = f_{AB}u^B\,,\qquad H_L = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{AB}{}_{LM}u^M f_{AB}\,.$$

Per analogia col caso classico e con la precedente trattazione relativistica della conduzione termica, si riterrà

$$(70)\qquad D_A = \eta_A{}^L E_L\,,\quad B_A = \mu_A{}^L H_L;\quad E_M = \overset{-1}{\eta}{}_M{}^A D_A\,,\quad H_M = \overset{-1}{\mu}{}_M{}^A B_A$$

ove i tensori euleriani η^{LM}, μ^{LM}, $\overset{-1}{\eta}{}^{LM}$ e $\overset{-1}{\mu}{}^{LM}$ sono espressi da

$$(71)\qquad \eta^{LM} = \mathfrak{D}^{-1}\alpha^L{}_\varrho \alpha^M{}_\sigma \eta^{*\varrho\sigma}\,,\quad \overset{-1}{\eta}{}_{LM} = \mathfrak{D}^{-1}\gamma_L{}^\varrho\gamma_M{}^\sigma \overset{-1}{\overset{*}{\eta}}{}_{\varrho\sigma}$$
$$(\overset{-1}{\overset{*}{\eta}}{}_{\varrho\lambda}\eta^{*\sigma\lambda} = a^{*\sigma}_\varrho)$$

$$(72)\qquad \mu^{LM} = \mathfrak{D}^{-1}\alpha^L{}_\varrho \alpha^M{}_\sigma \mu^{*\varrho\sigma}\,,\quad \overset{-1}{\mu}{}_{LM} = \mathfrak{D}^{-1}\gamma_L{}^\varrho\gamma_M{}^\sigma \overset{-1}{\overset{*}{\mu}}{}_{\varrho\sigma}$$
$$(\overset{-1}{\overset{*}{\mu}}{}_{\varrho\lambda}\mu^{*\sigma\lambda} = a^{*\sigma}_\varrho)$$

e inoltre i tensori lagrangiani $\eta^{*\varrho\sigma}$ e $\mu^{*\varrho\sigma}$ sono simmetrici [37]) e da considerarsi come funzioni note di y^β, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, T (e p_i) onde per $(71)_3$ e $(72)_3$ tali sono pure i tensori reciproci $\overset{-1}{\overset{*}{\eta}}{}_{\varrho\sigma}$ e $\overset{-1}{\overset{*}{\sigma}}{}_{\varrho\sigma}$. Osservo che, stanti $(71)_{1,2}$ e $(72)_{1,2}$, le $(71)_3$ e $(72)_3$ equivalgono rispettivamente a [38])

$$(73)\qquad \eta^{LR}\overset{-1}{\eta}{}_{LS} = \tilde{g}^R{}_S\qquad \mu^{LR}\overset{-1}{\mu}{}_{LS} = \tilde{g}^R{}_S\,.$$

---

[37]) Si può ritenere μ_{LM} isotropo ossia $\mu^{LM} = -\,\mu\tilde{g}^{LM}$ — v. [21], pag. 83. Non dovendo fare particolari applicazioni, seguendo [8], pag. 389, per maggiore generalità considero μ^{LM} come un generico tensore spaziale simmetrico.

[38]) Infatti, riguardo al tensore dielettrico, per **3** $(63)_1$ da $(71)_3$ segue $\eta^{LR}\overset{-1}{\eta}{}_{LS} = \mathfrak{D}^{-2}\alpha^L_\lambda\alpha^R_\varrho\eta^{*\lambda\varrho}\gamma^\beta_L\gamma^\sigma_S\overset{-1}{\eta}{}^*{}_{\varrho\sigma} = \mathfrak{D}^{-1}\alpha^R_\varrho\gamma^\sigma_S\eta^{*\beta\varrho}\overset{-1}{\eta}{}^*{}_{\beta\sigma}$; allora da un lato $(71)_3$ implica $\eta^{LR}\overset{-1}{\eta}{}_{LS} = \mathfrak{D}^{-1}\alpha^R_\varrho\gamma^\sigma_S$ cosicchè per **3** $(63)_1$ segue $(73)_1$. Dall'altro $(73)_1$ implica l'eguaglianza $\tilde{g}^R_S = \mathfrak{D}^{-1}\alpha^R_\varrho\gamma^\sigma_S\eta^{*\beta\varrho}\overset{-1}{\eta}{}^*{}_{\beta\sigma}$. Moltiplicatala membro a membro per $\mathfrak{D}^{-1}\gamma^\tau_R\alpha^S_\vartheta$, in base a **3** (63) segue $\delta^\tau_\vartheta = \mathfrak{D}^{-1}\gamma^\tau_R\alpha^S_\vartheta\tilde{g}^R_S = \delta^\tau_\varrho\delta^\sigma_\vartheta\eta^{*\beta\varrho}\overset{-1}{\eta}{}^*{}_{\beta\sigma} = \eta^{*\beta\tau}\overset{-1}{\eta}{}_{\beta\vartheta}$ ossia $(71)_3$. L'analogo vale per la permeabilità magnetica.

Le eguaglianze (71) e (72) [e (73)] sono utili perchè esplicitano la dipendenza di η^{LM}, $\overset{-1}{\eta}_{LM}$, μ^{LM} e $\overset{-1}{\mu}_{LM}$ dalle g_{LM} ed u^R e quella dalla rotazione locale $R^L{}_\varrho$ che influisce su $\alpha^L{}_\varrho = R^L{}_\lambda \mathfrak{D}^\lambda{}_\varrho$ [**3** (26)] e su $\gamma_L{}^\varrho = - \mathfrak{D}^{-1} R_{L\lambda} \overset{-1}{\mathfrak{D}}{}^{\lambda\varrho}$ [**3** (65)] e non sulla $\varepsilon_{\varrho\sigma}$, cosicchè fissato T (e p), $\eta^{*\varrho\sigma}$ dipende da sei variabili mentre η^{LM} dipende, oltre che dalle g_{LM} e u^R, anche dalle $\alpha^L{}_\varrho$ che, noto u^L equivalgono a nove scalari indipendenti.

Da $(66)_2$, $(70)_{1,4}$ e (68) segue

$$(74) \qquad f_{AB} = \eta_A{}^L F_{LM} u^M u_B - \eta_B{}^L F_{LM} u^M u_A - \varepsilon_{ABPR} u^R \overset{-1}{\mu}{}^{PQ} \frac{1}{2} \varepsilon^{LM}{}_{QS} F_{LM} u^S$$

cosicchè (65) vale pensandovi $2\eta_{AB}{}^{LM} = \grave{\eta}_{AB}{}^{LM} - \grave{\eta}_{AB}{}^{ML}$ ove

$$(75) \qquad \grave{\eta}_{AB}{}^{LM} = u^M (u_B \eta_A{}^L - u_A \eta_B{}^L) - \frac{1}{2} u^R u^S \varepsilon_{ABPR} \varepsilon^{LM}{}_{QS} \overset{-1}{\mu}{}^{PQ} .$$

Per $(71)_1$ e $(72)_2$ da (75) segue

$$(76) \qquad \eta^{ABLM} = \frac{1}{2\mathfrak{D}} (u^M \alpha^L{}_\varrho - u^L \alpha^M{}_\varrho)(u^B \alpha^A{}_\sigma - u^A \alpha^B{}_\sigma) \eta^{*\varrho\sigma} - \\ - \frac{1}{2\mathfrak{D}} \varepsilon^{AB}{}_{PR} \varepsilon^{LM}{}_{QS} u^P u^Q \gamma^R{}_\varrho \gamma^S{}_\sigma \overset{-1}{\mu}{}^{*\varrho\sigma}$$

che fornisce η_{ABLM}, noti il tensore dielettico lagrangiano $\eta^{*\varrho\sigma}$ e quello lagrangiano $\mu^{*\varrho\sigma}$ della permeabilità magnetica — o il suo reciproco — i quali tensori $\eta^{*\varrho\sigma}$ e $\mu^{*\varrho\sigma}$ sono funzioni solo di ε_{AB} e T (e p).

Sia j^L il vettore controvariante distribuzione elettrica totale; esso è caratterizzato dalla condizione che se, come è lecito, il sistema (x) soddisfa (14), allora con referenza ad un osservatore solidale al sistema (x), $j^0 = j^L u_L = j$ rappresenta la densità propria di carica elettrica e j^l la l-ma componente della densità propria di corrente elettrica moltiplicata per c. Di conseguenza, supposto il sistema (x) generico, $\tilde{g}^L{}_M j^M = j^L - j u^L$ esprime la corrente elettrica di conduzione. La legge di Ohm si scrive [(68)] nella forma

$$(77) \qquad j^L = j u^L + \zeta^{LM} F_{MP} u^P$$

ove il tensore spaziale ζ^{LM} si dice conducibilità elettrica. Si può supporre che esso abbia la forma

$$(78) \qquad \tilde{\zeta}^{LM} = \mathfrak{D}^{-1}\alpha^L{}_\varrho \alpha^M{}_\varrho \zeta^{*\varrho\sigma} \qquad (\tilde{\zeta}^{LM} u_L = \tilde{\zeta}^{ML} u_L = 0)$$

dove $\zeta^{*\varrho\sigma}$ dipende solo dalle y^σ ed $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (e p).

Le eguaglianze (76) e (78) costituiscono la forma lagrangiana di cui nel titolo. Essa offre gli stessi vantaggi di cui si è parlato a proposito delle $(71)_{1,2}$ e $(72)_{1,2}$.

Conviene osservare che in base ad **3** (80), **3** (81), **3** (82) e **3** (83), in coordinate solidali le formule (76) e (78), che riducono le equazioni elettromagnetiche costitutive alla forma lagrangiana, si semplificano nelle

$$(76') \quad \eta^{ABLM} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^*}{-gg_{00}}}(\delta_0{}^M \tilde{g}^L{}_\varrho - \delta^L{}_0 \tilde{g}^M{}_\varrho)(\delta_0{}^B \tilde{g}^A{}_\sigma - \delta_0{}^A \tilde{g}^B{}_\sigma)\eta^{*\varrho\sigma} -$$

$$- \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-g}{a^* g_{00}^3}}\varepsilon^{AB}{}_{0\varrho}\varepsilon^{LM}{}_{0\sigma}\overset{-1}{\mu}{}^{*\varrho\sigma}$$

$$(77') \qquad \tilde{\zeta}^{LM} = \sqrt{\frac{a^*}{-g}}\,\tilde{g}^L{}_\varrho \tilde{g}^M{}_\sigma \zeta^{*\sigma\varrho} .$$

10. Forme opportune delle equazioni di Maxwell. Tensori delle forze ponderomotrici e dell'energia.

Le equazioni elettromagnetiche si scrivono

$$(79) \qquad \varepsilon^{LABC} F_{AB/C} = 0 , \qquad f_{LM}{}^{/M} = j_L .$$

Anche nel cronotopo Riemanniano — v. [8] p. 414 — la $(79)_1$ equivale all'esistenza di un 4-vettore potenziale φ_L per cui

$$(80) \qquad F_{LM} = \varphi_{L/M} - \varphi_{M/L} = \frac{\partial \varphi_L}{\partial x^M} - \frac{\partial \varphi_M}{\partial x^L} \qquad (\varphi_0 \equiv 0) .$$

Potendosi imporre a φ_L una condizione scalare, con lo scopo di pareggiare agevolmente in seguito i numeri delle equazioni e delle incognite, impongo la $(80)_2$.

Da (65) e (80) segue $f_{LM} = 2\eta_{LM}{}^{AB}\varphi_{A/B}$ onde da (77) e (78) seguono le eguaglianze

$$ju^L = 2(\eta^{LMAB}\varphi_{A/B})_{/M} - \zeta^{LM}(\varphi_{M/P} - \varphi_{P/M})u^P \tag{81}$$

che, note le g_{LM}, u_L e le funzioni (7), costituiscono, stanti le equazioni costitutive (76) e (78), quattro equazioni nelle quattro incognite j e φ_P.

Ricordo che il vettore K_L delle *forze ponderomotrici ordinarie* del campo elettromagnetico, il tensore energetico E_{LM} di Minkowski e il tensore $\overline{E}_{LM}$ di Abraham possono definirsi come segue — v. [8] pag. 425 —.

$$\left\{\begin{aligned} & K_L = F_{LA}j^A\,, \qquad E_{LM} = F_{LA}f^A{}_M + \frac{1}{4}F_{AB}f^{AB}g_{LM}\,, \\ & \qquad\qquad \overline{E}_{LM} = \frac{1}{2}(E_{LM} + E_{ML})\,. \end{aligned}\right. \tag{82}$$

Se nel punto evento E vale (14) K_l rappresenta, essendo nulla la forza di Lorentz, quella elettrica — v. [8] pag. 419 — e inoltre — $cK_0 = K_Lu^L$ è il calore Joule prodotto per unità di configurazione attuale. Si tratta di grandezze considerate anche nella Fisica classica. Perciò ho parlato di azioni ponderomotrici ordinarie. Basandosi su un uso diffuso — v. [8] pag. 426 e 474 — e del resto ben giustificato, quando si accetti il tensore di Minkowski — nelle equazioni gravitazionali userò il tensore $\overline{E}_{LM}$ [(82)$_3$] per riassumere le azioni del campo elettromagnetico. Ciò fatto, com'è ben noto, queste risultano espresse dalla divergenza $\overline{E}_{LA}{}^{/A}$. Son note le formule [39])

$$E_{LM}{}^{/M} = K_L + K'_L\,, \qquad \overline{E}_{LM}{}^{/M} = K_L + K'_L + K''_L \tag{83}$$

---

[39]) Vedi in [8] le formule (77) e (77') a pag. 426, e le (76) e (76'), ove le variabili $E_{\alpha\beta}$, H_α e L_α hanno ordinatamente i ruoli delle $\overline{E}_{LM}$, K'_L e K''_L

ove K'_L e K''_L, da interpretarsi come *azioni ponderomotrici aggiuntive*, sono determinate dalle eguaglianze

$$(84)\qquad 4K'_L = f_{AB/L}F^{AB} - F_{AB/L}f^{AB}\,, \qquad 2K''_L = (F^{AB}f_{LA} - f^{AB}F_{LA})_{/B}\,.$$

Per (68), (82) e il suddetto significato di E_L e j^L, come ho già accennato è $-\,K_L u^L = E_A j^A = c^{-1}$ calore joule/sec. Dunque, dette $\Pi^{(e)}$ la potenza spesa dal campo elettromagnetico sulla materia per unità di configurazione attuale, e $\Pi^{*(e)}$ quella per unità di configurazione di riferimento, nel caso $K'_L = K''_L = 0$ è $\Pi^{(e)} = -\,cE_{LM}{}^{/M}u^L = -\,c\overline{E}_{LM}{}^{/M}u^L$. Ciò induce a ritenere che — come al n. 13 si potrà affermare sulla base di deduzioni tratte dalle equazioni gravitazionali — in generale, stanti **3** (49) e **3** (50), sia [40])

$$(85)\qquad -\frac{1}{c}\,\Pi^{(e)} = -\,\frac{1}{c\mathfrak{D}}\,\Pi^{*(e)} = \overline{E}_{LM}{}^{/M}\,u^L = \\ = K_L u^L + K'_L u^L + K''_L u^L\,.$$

Poichè $\Pi^{(e)}$, $K'_L u^L$ e $K''_L u^L$ sono invarianti, essi possono riferirsi ad un osservatore solidale con la materia. Di conseguenza il lavoro di una qualunque forza risulta nullo e quindi $-\,c^{-1}k^{-1}K'_L u^L$ e $-\,c^{-1}k^{-1}K''_L u^L$, che eguagliano le potenze specifiche aggiuntive del campo elettromagnetico, vanno interpretati come le quantità di calore prodotte per secondo e unità di massa dal campo elettromagnetico.

Riuscirà utile osservare che in base a (65) e (81) l'eguaglianza $(82)_2$ diviene

$$(86)\qquad E_{LM} = 4\eta^{A}{}_{M}{}^{BC}\frac{\partial\varphi_B}{\partial x^C}\frac{\partial\varphi_L}{\partial x^A} + \eta^{ABCD}\frac{\partial\varphi_A}{\partial x^B}\frac{\partial\varphi_C}{\partial x^D}\,g_{LM}$$

---

[40]) Ciò è pienamente conforme, ad es., con quanto è detto in [8] pag. 425-427.

Assunta valida nella materia l'equazione (83), che nel vuoto e in casi particolari diviene la $E_{LM}{}^{/M} = K_L$, l'uso del tensore $\overline{E}_{LM}$ di Abraham si giustifica mediante le equazioni indefinite dei risultanti e dei momenti per materiali capaci di stress asimmetrici — v. per es. [1], n. 7 (58), (59) —.

Parte III

Sulle equazioni gravitazionali e sulle conseguenti equazioni di conservazione dell'impulso e dell'energia.

11. Equazioni gravitazionali e conseguenti equazioni di conservazione.

Detto R_{ABCD} il tensore di Riemann in U pongo, com'è d'uso,

$$R_{LM} = R_{LA}{}^{A}{}_{M}\,, \qquad R = R_{L}{}^{L}\,, \qquad A_{LM} = R_{LM} - \frac{R}{2}\, g_{LM}\,. \tag{87}$$

Inoltre, detta $c^{-2}\varrho$ la massa per unità di configurazione di riferimento [**3** n. 19] si usa chiamare tensore energetico o tensore d'impulso energia il tensore

$$T_{LM} = \varrho u_L u_M\,. \tag{88}$$

Allora, detta X_{LM} la parte simmetrica del tensore euleriano degli sforzi [**3** n. 20] onde

$$X_{LM} = X_{ML}\,, \qquad X_{LM}u^M = 0\,, \tag{89}$$

e stanti (16) — con (13) — e $(82)_{2,3}$, assumo come tensore energetico totale [41])

$$\begin{aligned} U^{LM} = T^{LM} + X^{LM} + \overline{E}^{LM} + Q^{LM} = \varrho u^L u^M +\\ + X^{LM} + \overline{E}^{LM} + q^L u^M + u^L q^M\,. \end{aligned} \tag{90}$$

[41]) Riguardo all'intervento nelle (90) e (91) del tensore di Abraham vedi per es. [8], formule (88) a pag. 471 e (95) e pag. 474. Quanto al tensore termodinamico Q^{LM} introdotto sostanzialmente da C. Eckart in relatività ristretta — v. [7] — esso, a parte una differenza di segno di cui nella nota (29), è stato usato suppergiù allo stesso modo in [16] pag. 140 nel caso dei fluidi [nota (29)].

La presente teoria è in contrasto con [16] solo riguardo l'equazione di conduzione del calore [n. 13]. Uso il tensore Q^{LM} in (90) e (91) come in [16] (nel caso dei fluidi) perchè non conosco altri metodi per trattare in relatività generale la termodinamica con inclusione della temperatura, e perchè l'uso del tensore Q_{LM} è semplice e dà risultati, a mio avviso, soddisfacenti.

e scrivo le equazioni gravitazionali

$$A_{LM} + \chi U_{LM} = 0 \qquad \left(\chi = \frac{8\pi}{c^4}\right). \tag{91}$$

Essendo $A_{LM}{}^{/M} \equiv 0$ e $u^L u_{L/M} = 0$, con l'usuale procedimento da (91) si trae successivamente, stante $(25)_3$,

$$0 = U^{LM}{}_{/M} \equiv (\varrho u^M)_{/M} u^L + \varrho u^L{}_{/M} u^M + (X^{LM} + \overline{E}^{LM} + Q^{LM})_{/M}\,, \tag{92}$$

$$u_A U^{AM}{}_{/M} \equiv (\varrho u^M)_{/M} + u_A(X^{AM} + \overline{E}^{AM} + Q^{AM})_{/M} = 0\,, \tag{93}$$

$$\varrho u^L{}_{/M} u^M + \bar{g}^L{}_A(X^{AM} + \overline{E}^{AM} + Q^{AM})_{/M} = 0 \tag{94}$$
$$(\bar{g}^L{}_A = g^L{}_A - u^L u_A)\,.$$

Le equazioni (92) si dicono *di conservazione*; dirò la (93) *equazione di conservazione dell'energia* e le (94) *equazioni dinamiche*. Da queste risulta che

$$R^L = -\bar{g}^L{}_A X^{AM}{}_{/M}\,, \qquad P^L = -\bar{g}^L{}_A \overline{E}^{AM}{}_{/M}\,, \qquad Q^L = -\bar{g}^L{}_A Q^{LM}{}_{/M} \tag{95}$$

rappresentano i risultati controvarianti [42]) delle pressioni rispettivamente meccaniche, elettromagnetiche e termodinamiche per unità di configurazione attuale.

Da $(83)_2$ segue che $\bar{g}^L{}_A \overline{E}^{AM}{}_{/M}$ si scinde nei tre termini $-\bar{g}^L{}_A K_A$, $-\bar{g}^{LA} K'_A$, $-\bar{g}^{LA} K''_A$ da interpretarsi $-\bar{g}^{LA} K_A$ come *forza pondero-motrice* (controvariante) ordinaria e gli altri due come *forze pondero-motrici aggiuntive.*

Quanto alle pressioni termodinamiche [43]) per (16) $(95)_3$ diviene

$$-Q^L = \bar{g}^L{}_A Q^{AM}{}_{/M} = \bar{g}^L{}_A q^A{}_{/M} u^M + q^L u^M{}_{/M} + u^L{}_{/M} q^M\,. \tag{96}$$

---

[42]) Se (x) è localmente geodetico e proprio, si ha $R^l = -R_l, \ldots$ e inoltre $R^l,\ldots$ differiscon di poco dagli analoghi classici. Per questo parlo esplicitamente di risultati covarianti.

[43]) Mi sembra valga la pena di introdurre brevemente i risultati R^L, P^L e Q^L, di considerare l'espressione (96) di Q^L e mostrare l'espressione (97) assunta da Q^L in un riferimento localmente proprio e geode-

In E il sistema (x) verifichi $(14)_{1,2}$ onde vale (19). Allora, stante (9) e ricordando che cq^l è l'analogo del vettore classico di corrente termica [n. 3], (96) diviene, in E,

$$(97) \qquad Q^l = -\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial cq^l(t,y)}{\partial t} + cq^l v^m{}_{/m} + v^l{}_{/m} cq^m\right] \quad [v^l = v^l(x)]$$

e risulta molto piccolo — cfr. nota (43) —.

Per (24) e $(25)_1$, stante (95), le equazioni dinamiche (94) divengono $[\varrho Du^L/Ds = \varrho \bar{g}^L{}_M Du^M/Ds]$

$$(98) \qquad (\varrho \bar{g}^{LM} - X^{LM})\frac{Du_M}{Ds} = P^L + Q^L - \bar{g}^L{}_A X^{AM}{}_{/\bar{M}} \,.$$

Per quanto si è detto su Q^L poco sopra e su $\bar{g}^L{}_A X^{LM}{}_{/\bar{M}}$ al n. 7 [(51)] e inoltre per la piccolezza di $Du^L/Ds = c^{-2}a_L$ [(10)] e per l'usuale accettazione di P^L $[(95)_2]$ come risultante delle azioni elettromagnetiche (relativistiche) per unità di configurazione attuale, le equazioni dinamiche (98) sono fisicamente accettabili.

La differenza fra le (98) e le analoghe classiche sta nel termine $X^{LM}Du_L/Ds$, e nel caso della sola pressione $(X^{LM} = -p\bar{g}^{LM})$ esse prendono la forma, sostanzialmente molto usuale — v. [8] (97) pag. 476 —,

$$(98') \qquad (\varrho + p)\frac{Du^L}{Ds} = P^L + Q^L + \bar{g}^{LM} p_{/M} \,.$$

Infatti per $(25)_3$ è $\bar{g}^{LM}{}_{/H} = -u^L{}_{/M}u^M - u^L u^M{}_{/H}$ onde, stante la convenzione $(25)_2$, è

$$(99) \qquad \bar{g}^L{}_A \bar{g}^{LM}{}_{/\bar{M}} = 0 \,.$$

---

tico (del cronotopo Riemanniano) specialmente perchè la piccolezza di Q^L è stata verificata in [16], pag. 155 in uno spazio della relatività ristretta.

Sostanzialmente (97) non ha nulla di nuovo rispetto a quanto si fa in [16] ove d'altro canto, non si suppone localmente nulla la velocità, il che però è sempre lecito.

Ne segue [**3** $(15)_2$] appunto

$$\tilde{g}^L{}_A X^{AM}{}_{/\tilde{M}} = -\tilde{g}^L{}_A \tilde{g}^{AM} p_{/H} \tilde{g}^H{}_M = -\tilde{g}^{LM} p_{/M} \qquad \text{per } X^{LM} = -p\tilde{g}^{LM}, \tag{100}$$

onde (98′).

12. Forma mista delle equazioni dinamiche.

Scrivo le equazioni dinamiche in forma mista (o se si vuole lagrangiana) facendovi figurare direttamente le funzioni (7) rappresentanti il moto $\mathcal{M}$, e il tensore (relativizzato) di Kirchhoff-Piola $K^{L\sigma}$ [$(31)_2$] o addirittura quello $Y^{\varrho\sigma}$ di Piola [(46)]. Ciò costituisce una estensione alla relatività generale di noti teoremi di Meccanica classica dei sistemi continui — v. [22] pag. 96 — per cui ritengo che la cosa abbia interesse in se stessa. Essa ha interesse, mi sembra, anche perchè, date le $Y^{\varrho\sigma}$ in funzione delle $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (equazioni costitutive), in base alle considerazioni fatte al n. 7 sulla divergenza trasversa $X^{LM}{}_{/\tilde{M}}$, in coordinate localmente proprie e geodetiche le suaccennate equazioni miste, da un lato, permettono di vedere, direi, con esattezza le piccole differenze rispetto alle analoghe equazioni classiche e, dall'altro, esse costituiscono un efficace (nuovo) strumento per la determinazione (esatta) delle velocità di propagazione delle onde ordinarie di discontinuità nei mezzi elastici di tipo generale, e di determinare le differenze rispetto al caso classico [44]).

Detta $c^{-2}\varrho^*$ la densità lagrangiana di massa a riposo [**3** n. 19] e detto dC l'elemento spaziale ortogonale alla 4-velocità u^L corrispondente all'elemento spaziale dC^* in S_3^* [**3** n. 9], è $\varrho dC = \varrho^* dC^*$. Essendo $dC = \mathfrak{D} dC^*$ [**3** $(50)_2$] si ha $\varrho^* = \mathfrak{D}\varrho$.

Pensiamo ϱ^* come dipendente del generico punto P^* variante

[44]) Tale problema non è stato ancora affrontato. Si è considerata la detta velocità di propagazione per fluidi — v. [16] — o in corpi elastici lineari pei quali valga la legge di Hooke, magari in forma di equazioni ipoelastiche — v. [19] e [23] —.

nella regione C^* di S^* occupata dalla materia nella configurazione φ^* di riferimento, oppure delle coordinate y^ϱ di P^*; più precisamente ϱ^* sia una funzione delle y^ϱ, del tensore $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ di deformazione e della temperatura T. Delle stesse variabili risulta allora funzione $\varrho = \mathfrak{D}^{-1}\varrho^*$ perchè $\mathfrak{D}$ è una funzione delle $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ [**3** n. 10].

Si fissi un particolare stato dell'elemento ε che occupa P^* in φ^*, ad esempio quello in cui è $\varepsilon_{\varrho\sigma} = 0$ e T eguaglia la temperatura T^* di zero gradi centigradi. Siano k^* e k ciò che divengono $c^{-2}\varrho^*$ e $c^{-2}\varrho$ per $\varepsilon_{\varrho\sigma} = 0$ e $T = T^*$. Allora evidentemente $k^* dC^* = kdC$ e $k^* = \mathfrak{D}k$ [**3** n. 19].

Conviene porre, specialmente in vista di future applicazioni, $\varrho^* = k(c^2 + w)$ cosicchè w risulta funzione di $\varepsilon_{\varrho\sigma}$, T e y^ϱ. Conviene pure interpretare w come energia interna specifica di massa sulla base della nota equivalenza relativistica fra massa ed energia. Riassumendo valgono le eguaglianze

$$(101) \qquad \varrho^* = \mathfrak{D}\varrho\,, \quad k^* = \mathfrak{D}k\,, \quad \varrho^* = k^*(c^2 + w)\,, \quad \varrho = k(c^2 + w)\,.$$

Stanti le eguaglianze (95) e ricordando che per il coefficiente di dilatazione cubica δ_C vale la formula $1 + \delta_C = \mathfrak{D} = dC/dC^*$ [**3** (50)], introduco le forze

$$(102) \qquad \begin{aligned} P^{*L} &= \mathfrak{D}P^L = -\,\mathfrak{D}\tilde{g}^L{}_A \overline{E}^{AM}{}_{/M}\,, \\ Q^{*L} &= \mathfrak{D}Q^L = -\,\mathfrak{D}\tilde{g}^L{}_A Q^{AM}{}_{/M} \end{aligned}$$

per unità di configurazione di riferimento e di origine elettromagnetica e rispettivamente termica. In base a (40), $(101)_3$ e (102) le equazioni (98) prendono, stante $(31)_1$, la forma mista

$$(103) \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{c^2}(\varrho^*\tilde{g}^L{}_A - K^{L\sigma}\alpha_{M\sigma})\left(\frac{\partial^2 x^M}{\partial t^2} + \begin{Bmatrix} M \\ AB \end{Bmatrix}\frac{\partial x^A}{\partial t}\frac{\partial x^B}{\partial t}\right) = \\ &\qquad = P^{*L} + Q^{*L} - K^{L\sigma}{}_{|\sigma} \qquad (s = ct)\,. \end{aligned}$$

Fissato il punto evento E e supposto com'è lecito, che ivi il sistema (x) verifichi $(36)_{1\ldots4}$, in base a $(101)_2$ e (51) (103) *as-*

sume in E la forma lagrangiana

$$(103') \qquad \left[k^*\left(1+\frac{w}{c^2}\right)\delta^l{}_m + \frac{Y^{\varrho\sigma}}{c^2}\frac{\partial x^l}{\partial y^\varrho}\frac{\partial x^h}{\partial y^\sigma}\delta_{hm}\right]\frac{\partial^2 x^m}{\partial t^2} =$$

$$= P^{*l} + Q^{*l} - \sum_{\varrho\sigma}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial x^l}{\partial y^\sigma}Y^{\varrho\sigma}\right).$$

Infine per cose dette sulla formula (57), nell'ipotesi (52) (di elasticità in un senso molto lato), stante (57) e quindi (58), e infine valendo in E $(36)_{1\cdots 4}$, la (103) diviene

$$(103'') \qquad \left[k^*\left(1+\frac{w}{c^2}\right)\delta^l{}_m + c^{-2}\overset{c}{K}{}^{l\sigma}\frac{\partial x^h}{\partial y^\sigma}\delta_{hm}\right]\frac{\partial^2 x^m}{\partial t^2} =$$

$$= P^{*l} + Q^{*l} - \sum_\sigma \frac{\partial \overset{c}{K}{}^{l\sigma}}{\partial y^\sigma}$$

dove, a parte il noto termine P^{*l} di origine elettromagnetica, si sono messe in evidenza le differenze di (103'') rispetto al caso classico, differenze che, stante (97) constano dei piccoli termini

$$\frac{1}{c^2}\left(k^* w\delta^l_m + K^{l\sigma}\frac{\partial x^h}{\partial y^\sigma}\delta_{hm}\right)\frac{\partial^2 x^m}{\partial t^2} - Q^{*l}.$$

13. Deduzione del principio di conservazione dell'energia dalle equazioni gravitazionali.

In base a **3** (140) e all'invariabilità di k^* da $(101)_{2,3}$ segue

$$(104) \qquad (\varrho u^L)_{/L} = \mathfrak{D}^{-1}\frac{D\varrho^*}{Ds} = \mathfrak{D}^{-1}k^*\frac{Dw}{Ds} = k\frac{Dw}{Ds}.$$

Fissato l'elemento materiale ε, in relazione ad esso, stante $(9)_1$, è [**3** (111')]

$$(105) \qquad dw = \frac{\partial w(t,y)}{\partial t}dt = \frac{Dw}{Ds}ds$$

e inoltre, stante $(9)_1$ pongo [(89)]

$$(106) \qquad kdQ = -(\overline{E}^{LM} + Q^{LM})_{/M} u^L ds ,$$

$$(107) \qquad dl^{(i)} = \Pi^{(i)} dt = -X^{LM}{}_{/M} u_L ds = X^{LM} u_{L/M} ds \qquad (s = ct) .$$

In base a (104), ..., (107), $(85)_{1,2}$ e $(21)_1$ l'equazione scalare invariante (93) può mettersi nella forma

$$(108) \qquad kdw + dl^{(i)} = kdQ \equiv -ku_L(\overline{E}^{LM}{}_{/M} + q^L{}_{/L} + q^L{}_{/M} u^M u_L) \quad \text{ossia}$$

$$k\frac{dw}{dt} + \Pi^{(i)} = \Pi^{(e)} + q_{ass} \qquad (s = ct) .$$

In un riferimento localmente proprio e geodetico $dl^{(i)}$ [(107)] assume l'espressione classica del lavoro elementare delle forze intime per unità di configurazione attuale [**3** (147)]. Inoltre dw è l'incremento dell'energia specifica di massa, quindi in base ad una nota forma [45]) del 1° principio della termodinamica [46]) dobbiamo considerare il termine kdQ $[(106)_1]$ come il calore o l'energia assorbita per unità di configurazione attuale nel tempuscolo dt. Esso è in parte dovuto al campo elettromagnetico che si manifesta attraverso il termine $\Pi^{(e)} dt = -\overline{E}^{LM}{}_{/M} u^M ds$ scindibile nel calore joule e in altri due termini aggiuntivi [(85)]; la rimanente parte q_{ass} del detto calore [(64)] è dovuta alla distribuzione di temperatura e consta di un termine ordinario $q^{(\circ)}_{ass}$ [(63)] e di due aggiuntivi $q^{(a)}_{ass}$ e $q^{(d)}_{ass}$ [(23), (60)] dipendenti dall'accelerazione e dalla velocità di deformazione.

---

[45]) In [22] pag. 106 è scritto il corrispondente lagrangiano della accennata forma. Questa si ottiene semplicemente moltiplicando $(108)_1$ per $\mathfrak{D}$ e tenendo conto di $(101)_2$ e (110).

[46]) Differendo nella nomenclatura da [7], identifico il 1° principio con quello di conservazione dell'energia che però intendo in senso lato in modo da poter tener conto di fenomeni elettromagnetici.

14. Forma lagrangiana del 1° principio della termodinamica. Equazione di conduzione termica.

Introdotta la parte simmetrica $Y^{\varrho\sigma}$ del tensore lagrangiano degli sforzi — ossia il corrispondente lagrangiano di X^{LM} [(89)] — e il lavoro $d^*l^{(i)}$ delle forze intime per unità di configurazione di riferimento e la relativa potenza $\Pi^{*(i)} = d^*l^{(i)}/dt$, in base a **3** (74), **3** (149) e **3** (149′), stante **3** (55) o **3** (63), si ha

$$(109) \qquad Y^{\varrho\sigma} = \mathfrak{D}^{-1}\gamma_L{}^{\varrho}\gamma_M{}^{\sigma}X^{LM} = Y^{\varrho\sigma}\,, \qquad X^{LM} = \mathfrak{D}^{-1}\alpha^L{}_{\varrho}\alpha^L{}_{\sigma}Y^{\varrho\sigma}\,,$$

$$(110) \qquad d^*l^{(i)} = \mathfrak{D}dl^{(i)} = Y^{\varrho\sigma}d\varepsilon_{\varrho\sigma}\,, \qquad \Pi^{*(i)} = \mathfrak{D}\Pi^{(i)} = Y^{\sigma\varrho}\frac{d\varepsilon_{\varrho\sigma}}{ds}\,.$$

Le eguaglianze (108), in base a (110), (101) e $(85)_1$ equivalgono a

$$(111) \qquad Y^{\varrho\sigma}d\varepsilon_{\varrho\sigma} \equiv d^*l^{(i)} = kdQ - k^*dw \quad \text{ossia} \quad k^*\frac{dw}{dt} + \Pi^{*(i)} = \\ = \Pi^{*(e)} + q^*_{ass} \qquad (q^*_{ass} = \mathfrak{D}q_{ass}\,,\ s \equiv ct)\,.$$

Suppongo ora che per l'elemento ε l'energia interna specifica sia una funzione

$$(112) \qquad w = \tilde{w}(\varepsilon_{\varrho\sigma}\,, T\,, p_i)$$

delle $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ [(53)], della temperatura T ed eventualmente di altri parametri fisici $p_1, p_2, \ldots$. Suppongo che gli sforzi lagrangiani siano funzioni [47])

$$(113) \qquad Y^{\varrho\sigma} = k^*\tilde{Y}^{\varrho\sigma}(\varepsilon_{\alpha\beta}\,, u^*_{\alpha\beta}\,, T\,, p_i) \\ [u^*_{\varrho\sigma} = \Delta^*_{\varrho\sigma} + \omega^*_{\varrho\sigma} = -\,u_{L/M}\alpha^L{}_{\varrho}\alpha^M{}_{\sigma}]$$

delle $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $u^*_{\alpha\beta}$, T e p_i.

---

[47]) La dipendenza di $Y^{\varrho\sigma}$ dalla velocità lagrangiana $\omega^*_{\alpha\beta}$ di rotazione — cfr. [3] n. 14 — è compatibile con l'isotropia fisica dello spazio — v. [1] n. 8 —. Essa non è però compatibile col principio d'indifferenza materiale — v. [15], objectivity principle a pag. 208 e Theor. 4 a pag. 217 —.

L'impossibilità che le $Y^{\varrho\sigma}$, l'entropia η e l'energia interna w siano funzioni delle $\varepsilon_{\alpha\beta}$, T e $w^*_{\alpha\beta}$, dipendenti effettivamente da $\omega^*_{\alpha\beta}$, sarà dimostrata al n. 20 prescindendo dal detto principio.

In base a $(101)_2$, (110) e (113) è $dl^{(i)} = k\bar{Y}^{\varrho\sigma}d\varepsilon_{\varrho\sigma}$ cosicchè, stanti (106) — ove si presuppongono (12), (13) e (16) — e $(82)_3$, il principio di conservazione dell'energia $(108)_1$ prende la forma

$$(114)\qquad k\frac{\partial\bar{w}}{\partial T}\frac{dT}{ds} + k\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\varepsilon_{\varrho\sigma}} - \bar{Y}^{\varrho\sigma}\right)\frac{d\varepsilon_{\varrho\sigma}}{ds} + k\sum_i\frac{\partial\bar{w}}{\partial p_i}\frac{dp_i}{ds} =$$

$$= k\frac{dQ}{ds} \equiv -u_L\overline{E}^{LM}{}_{/M} - q^L{}_{/L} - q^L{}_{/M}u_Lu^M$$

nella quale, a causa dell'intervento della derivata dT/ds, il considerato principio può dirsi *equazione della conduzione termica.*

Si può osservare che nel processo elementare $d\varepsilon_{\varrho\sigma}$, dT, dp_i il calore specifico per unità di massa è espresso da

$$(115)\qquad \mathcal{C} = \mathcal{C}\left(\varepsilon_{\alpha\beta},\ T,\ p_i,\ \overset{*}{u}_{\alpha\beta},\ \frac{d\varepsilon_{\varrho\sigma}}{dT},\ \frac{dp_i}{dT}\right) \equiv \frac{dQ}{dT} = \frac{\partial\bar{w}}{dT} +$$

$$+\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\varepsilon_{\varrho\sigma}} - \bar{Y}^{\varrho\sigma}\right)\frac{d\varepsilon_{\varrho\sigma}}{dT} + \Sigma\frac{d\bar{w}}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dT}\,.$$

PARTE IV

Sulle equazioni indefinite, di raccordo e al contorno della termo-magneto-visco-elasticità in relatività generale.

15. Quadro delle equazioni relativistiche indefinite della gravitazione e dell'elettromagnetismo per sistemi viscoelastici non ereditari, in presenza di conduzione termica.

Conviene esporre il quadro di equazioni di cui nel titolo, dei dati indipendenti dalle contingenze dei fatti e infine delle grandezze che invece ne dipendono. Conviene accennare ad un possibile generale sistema di funzioni incognite e confrontarne il il numero con quello delle suddette equazioni. Tale quadro riuscirà utile specialmente al numero seguente, dove, nel caso di coordinate solidali, si verificherà il pareggio fra il numero delle equazioni e quello di certe opportune funzioni incognite.

In un primo tempo considero come variabili le quattro x^L, le tre y^ϱ e il parametro temporale t. Inoltre suppongo fissato nello spazio euclideo (astratto) S_3^* di riferimento un sistema (y) $[y^\sigma \equiv y^\sigma(P^*)]$ di coordinate onde una metrica $ds^{*2} = a^*_{\varrho\sigma} dy^\varrho dy^\sigma$.

Sia data una configurazione φ^* della materia [**3** n. 3] in S_3^*, nella quale questa occupi la regione C^*, eventualmente connessa ma opportunamente regolare.

Ai precedenti dati (indipendenti dalle contingenze dei fatti) vanno aggiunte la funzione che nello schema finora adottato rappresentano le proprietà costitutive, energetiche gravitazionali, termiche, elettromagnetiche e meccaniche della materia; esse sono le seguenti funzioni delle coordinate y^σ in (y) del punto P^* variabile in C^*, della temperatura T, del tensore di deformazione $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ ed eventualmente della velocità lagrangiana di deformazione $u^*_{\varrho\sigma}$ **3** (108):

a) la massa $k^* = k^*(y)$ *per unità di configurazione di riferimento, alla temperatura* T^* *di zero gradi centigradi (nella configurazione* φ^* *di riferimento), ovvero la densità propria in corrispondenza all'elemento* ε *(occupante* P^* *nella configurazione* φ^**) quando esso si trovi alla temperatura* T^* *e per esso sia inoltre* $\varepsilon_{\varrho\sigma} = 0$,

b) la determinazione $w = \tilde{w}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, y^\varrho)$ *dell'energia specifica di massa che si annulla identicamente in* C^* *per* $\varepsilon_{\varrho\sigma} = 0$ *e* $T = T^*$,

c) la conducibilità termica lagrangiana $\overset{*}{\varkappa}_{\varrho\sigma} = \overset{*}{\varkappa}_{\varrho\sigma}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, y^\varrho)$ [n. 2] *e, se si vuole, anche il coefficiente* $\overset{*}{\sigma}_{\varrho\sigma} = \overset{*}{\sigma}_{\varrho\sigma}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, y^\alpha)$ [n. 2],

d) le espressioni lagrangiane $\overset{*}{\zeta}_{\varrho\sigma} = \overset{*}{\zeta}_{\varrho\sigma}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, y^\alpha)$, $\overset{*}{\eta}_{\varrho\sigma} = \overset{*}{\eta}_{\varrho\sigma}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, y^\alpha)$ *e* $\overset{*}{\mu}_{\varrho\sigma} = \overset{*}{\mu}_{\varrho\sigma}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, y^\alpha)$ *del tensore di conducibilità elettrica* [(77), (78)], *del tensore dielettrico e di quello di permeabilità magnetica* [(70), (71), (72)],

e) l'espressione (completamente) lagrangiana $Y^{\varrho\sigma} = Y^{\varrho\sigma}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, \Delta^*_{\alpha\beta}, y^\alpha)$ *della parte simmetrica del tensore degli sforzi* [$(46)_2$].

Quanto alle funzioni incognite assumo come tali le dieci $g_{AB}(x^L)$, le quattro

$$x^L = x^L(t, y) \tag{116}$$

rappresentanti il moto della materia [(7)], la temperatura

$$(117)\qquad T = T(x^L) \quad \text{oppure} \quad T = \overset{*}{T}(t, y) \equiv T[x(t, y)],$$

la densità propria $j = j(x^L)$ di corrente elettrica e i potenziali elettromagnetici $\varphi_\nu(x)$ $[\varphi_0(x) \equiv 0]$. Le funzioni incognite sono dunque $10 + 4 + 1 + 1 + 3 = 19$ (si badi che alcune dipendono dalle t e y e altre dalle x^L).

Mediante le funzioni (116), le $g_{LM}(x)$ e i dati $\overset{*}{a}_{\varrho\sigma}(y)$ si possono esprimere in funzione di x^L, y^σ e t le seguenti grandezze cinematiche: le $u^L = dx^L/ds$ [**3** (10)], $\tilde{g}^{LM}$ [**3** (15)], $\alpha^L{}_\varrho$ [**3** (13)] le $C_{\varrho\sigma}$ e le $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ [**3** (20)], $\mathfrak{D}$ [**3** (49)] e $\gamma_L{}^\varrho$ [**3** (55)] oppure [**3** (63)] e $\overset{*}{\Delta}_{\varrho\sigma}$ [**3** (108)].

A questo punto sfruttando anche i dati materiali *a*), ..., *e*) mediante le considerate funzioni incognite possiamo costruire:

I) $\varrho = k(c^2 + w)$ $[(101)_4]$ e il tensore d'impulso $T^{LM} = \varrho u^L u^M$ [(88)],

II) i tensori termodinamici $\overset{\cdot}{\varkappa}^{LM}$, σ^{LM}, q^L e Q_{LM} [(12), (13), (16)],

III) il tensore η^{LMAB} [(76)] che lega quelli elettromagnetici f^{LM} ed F^{LM}, e inoltre F^{LM} [(80)], f^{LM} $[(65)_2]$, E^{LM} e $\overline{E}^{LM}$ $[(82)_{2,3}]$,

IV) il tensore euleriano X^{LM} degli sforzi $[(46)_2]$,

V) il tensore energetico totale U_{LM} [(90)] e quello gravitazionale A_{LM} [(87)].

Passo ora a considerare le equazioni fondamentali poste nei precedenti paragrafi, equazioni che stanti le suaccennate espressioni *I*, ... *V* di T^{LM}, Q^{LM}, $\overline{E}^{LM}$ ed X^{LM} potrebbero dirsi della termo-magneto-visco-elasticità relativistica (non ereditaria). Si tratta delle dieci equazioni gravitazionali (91) e delle quattro equazioni (81) nei potenziali φ_ν $[\varphi_0 \equiv 0]$ e nella densità propria j di carica elettrica. La differenza fra il numero delle incognite e quello delle equazioni è $19 - 14 = 5$.

In conformità della detta differenza si può imporre al ds^2 la forma geodetica, tradotta dalle identità — v. [8] pag. 431 —

$$(118) \qquad g_{00} \equiv 1 \,, \qquad g_{0i} \equiv 0 \,,$$

e al parametro temporale t una qualunque delle tre identità

$$(119) \qquad t \equiv s \,, \qquad ct \equiv s \,, \qquad t \equiv x^0 \,,$$

delle quali le prime due (essenzialmente) si traducono [(7)] rispettivamente nelle

$$(120) \qquad g_{LM} \frac{\partial x^L}{\partial t} \frac{\partial x^M}{\partial t} = 1 \qquad g_{LM} \frac{\partial x^L}{\partial t} \frac{\partial x^M}{\partial t} = c^2 \,.$$

16. Semplificazione del quadro precedente mediante coordinate solidali. Pareggio del numero delle equazioni a quello delle incognite.

Considero ora il caso delle coordinate solidali ($x^r = y^r$) per le grandi semplificazioni che comporta.

Nel quadro precedente, come ho già notato, alcune funzioni incognite — le g_{LM}, φ_v e j — devono dipendere dalle sole x^L, altre — le (116) — dalle sole t e y. È opportuno fare il computo delle equazioni e delle funzioni incognite pensando tutte le funzioni incognite come funzioni delle stesse variabili x^L. Perciò impongo le condizioni

$$(121) \qquad x^l = x^l(t, y) = y^l \,, \qquad x^0 = x^0(t\, y) = t \,.$$

Pur rimanendo sostanzialmente nell'ambito del quadro precedente, possiamo portare il numero delle equazioni da quattordici a diciannove — ossia a quello delle funzioni incognite — aggiungendo alle quattordici equazioni (81) e (91), anzichè le quattro (118) e per es. $(120)_1$, le quattro equazioni (121) e la

$$(122) \qquad g_{00} = 1 \,.$$

In altre parole escludiamo le funzioni $x^L = x^L(t, y)$ dal novero delle incognite cosicchè queste si riducono alle g_{LM}, j, φ_ν e T il cui numero è $9 + 1 + 3 + 1 = 14$, pari a quello delle equazioni da considerare, cioè le dieci equazioni gravitazionali (91) e le quattro elettromagnetiche (81). La considerata parità rende attendibile la risolubilità del generico problema di Cauchy relativo alle equazioni (81) e (91).

Mediante una trasformazione $\bar{x}^L = \bar{x}^L(x^M)$ di coordinate in U, una $\bar{y}^\sigma = \bar{y}^\sigma(y^\varrho)$ in S_3^* e una $\bar{t} = \bar{t}(t, y)$ del parametro temporale ci si riporta al quadro generale considerato nel paragrafo precedente e si possono, fra l'altro, soddisfare condizioni del tipo di (118) e $(120)_1$.

Ritengo utile esplicitare le suaccennate semplificazioni dovute alle condizioni (121) e (122). Per quanto riguarda la cinematica (121) e (122) implicano [**3** (8), **3** (80)]

$$t = x^0 = s + \tilde{s}(y^1, y^2, y^3)\,, \quad u^L = \delta^L{}_0\,, \quad u_M = g_{0M} \quad (u_0 = 1) \tag{123}$$

e inoltre è [**3** (81), **3** (82), **3** (83), **3** (84), **3** (121)]

$$\alpha^L{}_\varrho = \tilde{g}^L{}_\varrho = \delta^L{}_\varrho - g_{\varrho 0}\delta^L{}_0 \qquad (\text{onde}\, \alpha^0{}_\varrho = \tilde{g}^0{}_\varrho = -\, g^0{}_\varrho\,, \alpha_{0\varrho} = 0) \tag{124}$$

$$\mathfrak{D} = \sqrt{\frac{-g}{a^*}}\,, \qquad \gamma_L{}^\varrho = \mathfrak{D}\delta_L{}^\varrho\,, \tag{125}$$

$$C_{\varrho\sigma} = a^*_{\varrho\sigma} + 2\varepsilon_{\varrho\sigma} = \tilde{g}_{\varrho\sigma} = g_{\sigma\varrho} - g_{0\varrho}g_{0\sigma}\,, \tag{126}$$

$$\Delta^*_{\varrho\sigma} = \frac{d\varepsilon_{\varrho\sigma}}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{g}_{\varrho\sigma}}{\partial x^0} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}(g_{\varrho\sigma} - g_{0\varrho}g_{0\sigma})\,. \tag{127}$$

Mediante i dati $a), \dots, e)$ [n. 15] si possono ora costruire le espressioni semplificate delle grandezze $I) \dots V)$ [n. 15]. Precisamente per (125) le $(101)_2$, $(101)_1$ e l'espressione (88) del tensore d'impulso T_{LM} divengono

$$k = \sqrt{\frac{a^*}{-g}}\, k^*\,, \qquad \varrho = \sqrt{\frac{a^*}{-g}}\,(c^2 + w)\,, \tag{128}$$

$$T_{LM} = \varrho u_L u_M = \sqrt{\frac{a^*}{-g}}\,(c^2 + w) g_{0L} g_{0M}\,. \tag{129}$$

Inoltre per (12), (13), (16), (122) e (123) il vettore euleriano q^L di corrente termica e il tensore termodinamico Q_{LM} [magari con $\overset{*}{\sigma}_{\varrho\sigma} = 0$] sono espressi da

$$\begin{cases} q^L = -\varkappa^{*\varrho\sigma}\sqrt{\dfrac{a^*}{-g}}\,\tilde{g}_\varrho{}^L \tilde{g}_\sigma{}^H T_{/H} + \sigma^{*\varrho\sigma}\sqrt{\dfrac{a^*}{-g}}\,\tilde{g}_\varrho{}^L \tilde{g}_\sigma{}^H T_{/0H}\,, \\ Q_{LM} = q_L g_{0M} + q_M g_{0L}\,. \end{cases} \tag{130}$$

Poichè per (124) è

$$g_\sigma{}^H T_{/H} = T_{/\sigma} - g_{0\sigma} T_{/0}\,, \qquad \tilde{g}^H{}_\sigma T_{/0H} = T_{/0\sigma} - g_{0\sigma} T_{/0}\,, \tag{131}$$

in base a $(130)_1$ la $(131)_2$ diviene

$$\begin{aligned} Q_{LM} = {} & \sqrt{\frac{a^*}{-g}}\,(\tilde{g}_{\varrho L} g_{0M} + \tilde{g}_{\varrho M} g_{0L}) \cdot \\ & \cdot [-\varkappa^{*\varrho\sigma}(T_{/\sigma} - g_{0\sigma} T_{/0}) + \sigma^{*\varrho\sigma}(T_{/0\sigma} - g_{0\sigma} T_{/00})]\,. \end{aligned} \tag{132}$$

Per **3** (44), (86), (121) e (122) le eguaglianze (76′), (77′) e $(82)_2$ divengono, intendendosi $\eta^* = \eta^*(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, x^i)$ e $\overset{-1}{\mu}{}^{*\varrho\sigma} = \overset{-1}{\mu}{}^{*\varrho\sigma}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, x^i)$,

$$\begin{aligned} \eta_{AB}{}^{LM} = {} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^*}{-g}}\,(g_0{}^M \tilde{g}^L{}_\varrho - g_0{}^L \tilde{g}^M{}_\varrho)(g_{0B} g_{A\sigma} - g_{0A} \tilde{g}_{B\sigma})\eta^{*\varrho\sigma} - \\ & - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-g^3}{a^*}}\,\varepsilon_{AB0\varrho}\varepsilon_{CD0\sigma} g^{CL} g^{DM} \overset{-1}{\mu}{}^{*\varrho\sigma}\,, \end{aligned} \tag{133}$$

$$\begin{cases} \zeta^{lm} = \sqrt{\dfrac{a^*}{-g}}\,\zeta^{*lm}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, x^i)\,, \qquad \zeta^{00} = \sqrt{\dfrac{a^*}{-g}}\,g_{0\varrho} g_{0\sigma} \zeta^{*\varrho\sigma}\,, \\ \zeta^{0l} = -\sqrt{\dfrac{a^*}{-g}}\,g_{0\varrho} \zeta^{*\varrho l}\,, \end{cases} \tag{134}$$

$$(135)\qquad \overline{E}_{LM} = 2\left(\eta^{A}{}_{M}{}^{BC}\frac{\partial\varphi_L}{\partial x^A} + \eta^{A}{}_{L}{}^{BC}\frac{\partial\varphi_M}{\partial x^A}\right)\frac{\partial\varphi_B}{\partial x^C} + \\ + \left(\eta^{ABCD}\frac{\partial\varphi_A}{\partial x^B}\frac{\partial\varphi_C}{\partial x^D}\right)g_{LM}\,.$$

Per $(46)_2$, (124) e (125) si hanno [n. 15 e)] le eguaglianze

$$(136)\qquad X_{LM} = \sqrt{\frac{a^*}{-g}}\,\bar{g}_{L\varrho}\bar{g}_{M\sigma}\bar{Y}^{\varrho\sigma}\,(\varepsilon_{\alpha\beta},\, \Delta^*_{\alpha\beta},\, T,\, x^t)$$

analoghe alla (134). Stanti $(87)_3$, (129), (132), (135) e (136) si possono scrivere le equazioni gravitazionali

$$(137)\qquad A_{LM} + \frac{8\pi}{c^4}U_{LM} = 0 \quad \text{con} \quad U_{LM} = T_{LM} + X_{LM} + \overline{E}_{LM} + Q_{LM}$$

alle quali vanno aggiunte quelle elettromagnetiche (81) che per 122) e $(123)_2$ divengono, stanti (133) e (134),

$$(138)\qquad \begin{cases} 2\left(\eta^{lMAB}\dfrac{\partial\varphi_A}{\partial x^B}\right)_{/B} = \sqrt{\dfrac{a^*}{-g}}\,\zeta^{*l\sigma}\dfrac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_0} & (\varphi_0 \equiv 0) \\ j = 2\left(\eta^{0mab}\dfrac{\partial\varphi_a}{\partial x^b}\right)_{/m} + \sqrt{\dfrac{a^*}{-g}}\,g_{0\varrho}\zeta^{*\varrho\sigma}\varphi_{\sigma/0}\,. \end{cases}$$

Per $(13)_2$ e (89) da (90) e (91) segue

$$(139)\qquad \begin{cases} \dfrac{8\pi}{c^4}q_L + \left(A_{LM} + \dfrac{8\pi}{c^4}\overline{E}_{LM}\right)u^M = -\varrho u_L\,, \\ \varrho = -\left(A_{LM} + \dfrac{8\pi}{c^4}\overline{E}_{LM}\right)u^L u^M \end{cases}$$

cosicchè, fra l'altro, u^L ***è autovettore del tensore*** $A_{LM} + 8\pi c^{-4}(\overline{E}_{LM} + Q_{LM})$ ***e quindi del tensore gravitazionale*** A_{LM} ***durante processi adiabatici in assenza di campo elettromagnetico*** [48]).

[48]) In [19], n. 1 si osserva che ciò si dimostra nella teoria ivi considerata — puramente meccanica e lineare — mentre la cosa non si può dimostrare nella teoria svolta in [23] e riguardante lo stesso caso.

Si osservi ora che nelle particolari coordinate solidali considerate [(121), (122)] le funzioni costitutive $a), \dots, e)$ [n. 15] dipendono dagli argomenti $\varepsilon_{\varrho\sigma}$, $\Delta^{\bullet}_{\varrho\sigma}$ T e x^{l}. Allora per (126) e (127) e per le espressioni (129), (132), (133), (134) e (136) di T_{LM}, Q_{LM}, $\eta_{AB}{}^{LM}$, ζ^{LM} ed $\overline{E}_{LM}$ *non figurano derivate di* g_{LM} *nel tensore* $T_{LM} + Q_{LM} + \overline{E}_{LM}$; *ciò vale anche per* X_{LM} — *e quindi per* U_{LM} [$(137)_2$] — *nel caso che* $\widetilde{Y}^{\varrho\sigma}(\varepsilon_{\alpha\beta}, \Delta^{\bullet}_{\alpha\beta}, T, x^{l})$ *non dipenda da* $\Delta^{\bullet}_{\alpha\beta}$; *altrimenti in* X_{LM} *e in* U_{LM} *figurano le* g_{LM} *e le loro derivate* (*temporali*) *prime* [(127)].

In base alla ben nota espressione del tensore gravitazionale A_{LM} [(87)] mediante le g_{LM} e le loro derivate prime e seconde, le equazioni gravitazionali (137) sono di second'ordine [49]) nelle g_{LM} e quasi lineari nelle stesse g_{LM}, ossia le (137) sono lineari nelle $\partial^2 g_{LM}/\partial x^R \partial x^S$ e non nelle $\partial g_{LM}/\partial x^R$ (precisamente esse sono quadratiche nelle $\partial g_{LM}/\partial x^R$, nel caso che le $Y^{\varrho\sigma}$ non dipendano dalle $\Delta^{\bullet}_{\alpha\beta}$).

17. Casi generali in cui si può eliminare la temperatura. Caso puramente meccanico.

Considero il caso adiabatico, cosicchè è $q_L \equiv 0$ onde anche

$$Q_{LM} \equiv O\,. \tag{140}$$

Tale caso ha luogo ad esempio quando i coefficienti $\varkappa^{*\sigma\varrho}$ e $\sigma^{*\varrho\sigma}$ di conducibilità termica siano molto piccoli.

Se non vi sono correnti elettriche di conduzione nè altre cessioni di energia elettromagnetica alla materia (sotto forma di calore) — onde ad esempio i materiali elastici compiono processi isoentropici — si ha [(83), (84)]

$$u^A \overline{E}_{AL}{}^{/L} \equiv u^A(K'_A + K'_A + K''_A) \equiv 0\,. \tag{141}$$

---

[49]) Ciò vale pure nella teoria di elasticità relativistica di Rayner — n. [19], n. 1 — ma non in quella di Synge [23] — cfr. nota (48) — dove le corrispondenti equazioni sono del terz'ordine nelle g_{LM}.

Suppongo infine che almeno per i particolari processi che si considerano le funzioni note *c*), ..., *e*) [n. 15] siano indipendenti da T — però ammetto che l'energia specifica $w = \tilde{w}(\varepsilon, T, y^\varrho)$ possa a priori dipenderne e quindi pure $\varrho = k(c^2 + w)$ [(101)$_4$] — inoltre suppongo (140) senza però imporre (141).

Considero le particolari coordinate solidali (121) e ammetto $g_{00} = 1$ [(122)].

Le equazioni del problema sono le quattro equazioni elettromagnetiche (138) con η^{LMAB} espresso da (133) alle quali, in base a (129), (136), (137) e (141) vanno aggiunte le dieci equazioni gravitazionali

$$(142) \qquad A_{LM} + \frac{8\pi}{c^4}\left[\varrho u_L u_M + \sqrt{\frac{a^*}{-g}}\,\tilde{g}_{L\varrho}\tilde{g}_{M\sigma}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\,\bar{Y}^{\varrho\sigma}(\varepsilon_{\alpha\beta}, \Delta^*_{\alpha\beta}, y^\beta) + \bar{E}_{LM}\right] = 0$$

ove i tensori A_{LM} ed $\bar{E}_{LM}$ sono espressi da (87) e (135).

Osservo che per le fatte ipotesi, la variabile T non figura nelle equazioni elettromagnetiche (138) e figura nelle (142) solo tramite ϱ. Conviene allora sostituire ϱ all'incognita T. Si tratta cioè di risolvere le quattordici equazioni (138) e (142) nelle seguenti quattordici incognite (funzioni delle x^L): la ϱ, le nove g_{lM}, le tre φ_ν e j.

Se poi è data $\tilde{w}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, x^\iota)$ — v. *b*) n. 15 — conosciamo $\varrho = \tilde{\varrho}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, x^\iota) = \mathfrak{D}k^*(c^2 + w)$ $[x^\iota \equiv y^\iota]$ e, integrate le (138) e (142), possiamo ricavare $T(x^L)$ dall'equazione

$$(143) \qquad \varrho = \varrho(x) = \tilde{\varrho}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T\, x^\iota)$$
$$[\tilde{\varrho}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, x^\iota) = \mathfrak{D}^{-1}k^*(x^\iota)[c^2 + \tilde{w}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, x^\iota)]\,.$$

Quanto precede fornisce una interpretazione termodinamica delle teorie relativistiche dell'elasticità puramente meccaniche [50]) o magnetomeccaniche [51]), in cui la temperatura non figura.

---

[50]) Le funzioni $\varrho(x^L)$ e $g_{lM}(x^L)$ sono appunto assunte come incognite nella teoria puramente meccanica dell'elasticità svolta in [19] — cfr. nota (49) —.

[51]) Ad esempio, si può dimostrare che la magneto-fluido-dinamica relativistica — [8], pag. 474 — rientra nello schema qui considerato.

Osservazione: Anche nel caso generale si può pensare di ricavare da (143) la T in funzione di ϱ, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ e $\varkappa^{i}$ cosicchè si possono mutare tutte le funzioni costitutive c), ..., e) in funzioni di ϱ, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, T ed eventualmente di $\Delta^{*}_{\varrho\sigma}$. Dunque nel caso generale, sotto la sola condizione (140) di adiabaticità si può considerare il problema dell'integrazione delle quattordici equazioni (137) e (138) nelle quattordici incognite ϱ, g_{lM}, φ_{v} e j.

18. Cenni sulle condizioni al contorno e di raccordo.

Sia Σ una regione 3-dimensionale descritta nel cronotropo U della superficie σ^* limitante la porzione $\mathfrak{S}$ di materia. Sia E l'evento corrispondente al punto P^* di σ^* e all'istante t. Sia N_L la normale esterna a Σ in E, onde $N_L u^L = 0$ ove u^L è la 4-velocità di $\mathfrak{S}$ in E.

Consideriamo un piccolo cilindro 4-dimensionale K contenente E, di altezza h e con le basi parallele a Σ e da bande opposte di Σ. Queste dipendano da h in modo che le loro dimensioni lineari siano infinitesime d'ordine inferiore ad h. Consideriamo ora un qualunque riferimento (x) localmente proprio e geodetico in E [(14)] cosicchè in E è $\{{}_{LM}^{A}\} = 0$. Si riconosce allora agevolmente che in base al lemma di Green, supposto il tensore energetico totale U_{LM} [(90)] regolare in K, in E si ha

$$(144) \qquad (\Delta U^{LM}) N_M = U^{+LM} N_M - U^{-LM} N_M = \\ = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\mathrm{vol}\,(K)} \int_K U^{LM}{}_{/M} dK \,.$$

In condizioni di regolarità, a causa delle equazioni di conservazione (92), otteniamo $(\Delta U^{LM}) N_M = 0$. Tali condizioni possono non sussistere in E in quanto, ad esempio, Σ sia una superficie di discontinuità per le equazioni costitutive e magari separi regioni piene di materia da regioni vuote.

Se mancano le suaccennate condizioni di regolarità, occorre sostituire le (92) con equazioni più generali. A tale scopo si ricordi che — $U^{LM}{}_{/M}$ rappresenta la densità delle varie forze agenti

$[-\bar{g}^L{}_A U^{AM}{}_{/M}]$ e quella $[-u_A U^{AM}{}_{/M}]$ delle varie energie in giuoco, ivi compresa la potenza $c^{-1}\Pi^{(i)} = u_A X^{AM}{}_{/M}$ delle forze intime. È spontaneo sostituire l'integrale all'ultimo membro di (144) con una distribuzione — ossia una funzione additiva di K eventualmente non assolutamente continua — rappresentante le suddette forze ed energie eventualmente concentrate sulla superficie Σ.

Ciò fatto, in generale, l'ultimo membro di (144) risulterà $\neq 0$. Un caso comunissimo di forze superficiali può essere quello in cui Σ è descritta dalla superficie di un conduttore elettricamente carico. Inoltre se lungo Σ vi è mutuo scorrimento di due corpi in presenza di attrito, allora il lavoro dovuto a tale attrito va considerato sotto la forma di una densità superficiale di forze intime.

Per semplicità e brevità considero ora il caso in cui, pur senza imporre su Σ la continuità di U_{LM} e delle sue derivate, tuttavia su Σ *non vi siano forze o energie concentrate*. Ammetto cioè che non vi siano cariche elettriche superficiali nè scorrimenti con attrito. Allora da (90) e (144) segue

$$(145) \qquad (X^{LM} + \bar{E}^{LM} + Q^{LM})^{+} N_M = (X^{LM} + \bar{E}^{LM} + Q^{LM})^{-} N_M .$$

Per (16) è $Q^{LM} N_M = u^L q^M N_M$ onde da (145) segue, stante (13), la condizione termica

$$(146) \qquad u^L(\bar{E}^{+}{}_{LM} - \bar{E}^{-}{}_{LM}) N^M + (q^{+}{}_M - q^{-}{}_M) N^M = 0 .$$

Si noti che [(16)] $\bar{g}^L{}_A Q^{AM} N_M = \bar{g}^L{}_A u^A q^M N_M = 0$ onde da (145) segue pure la relazione dinamica

$$(147) \qquad \bar{g}^L{}_A (X^{AM} + \bar{E}^{AM})^{-} N_M = \bar{g}^L{}_A (X^{AM} + \bar{E}^{AM})^{+} N_M .$$

Nel caso che, inoltre, dalla parte positiva di Σ vi sia il vuoto si ha

$$(147') \qquad \bar{g}_L{}^A X^{-}{}_{AM} N^M = \bar{g}_L{}^A (\bar{E}^{+}{}_{AM} - \bar{E}^{-}{}_{AM}) .$$

Naturalmente, se attraverso Σ la materia è saldata — ossia σ^* è una superficie interna ad un corpo (secondo φ^*) — e attraverso

σ^* sono discontinue le funzioni costitutive [(52)], allora le X^{LM} possono assumere qualunque valore (con $X_{LM} = X_{ML}$ e $u^L X_{LM} = 0$) magari non superiore al carico di rottura. Se invece attraverso Σ ha luogo (in U) un contatto tra due corpi, allora X^{LM} deve soddisfare la legge d'attrito statico

$$(148) \qquad \sqrt{X^{LA}N_A X_L{}^B N_B - (X^{LM}N_L N_M)^2} \leqslant f_s X^{LM} N_L N_M| \, .$$

Aggiungo brevemente che in connessione con le equazioni elettromagnetiche (79) si ricavano, con ragionamenti analoghi, le condizioni di raccordo (o al contorno)

$$(149) \qquad \varepsilon^{LABC} N_C \Delta F_{AB} = 0 \, , \qquad N_M \Delta f^{LM} = i^L$$

ove i^L è la densità superficiale di 4-corrente elettrica.

Parte V

Termo-elasticità in relatività generale.

19. Secondo principio della termodinamica. Equazione del calore per sistemi a trasformazione reversibili.

Stante la definizione (106) del calore dQ assorbito per unità di massa e la forma $(108)_3$ del 1° principio, mi sembra naturale enunciare il 2° principio (della termodinamica) come segue:

2° Principio della termodinamica. – *In corrispondenza al generico elemento materiale* ε *esiste una funzione (entropia specifica di massa)* $\eta = \eta(\varepsilon_{\varrho\delta}, T, r_i)$ *delle variabili* $\varepsilon_{\varrho\delta}$, T *e dei parametri* $r_1, r_2, \ldots$ *derivabile con continuità e tale che in ogni processo fisicamente possibile si abbia*

$$(150) \qquad T(k\eta u^L)_{/L} \equiv Tk\frac{d\eta}{ds} \leqslant k\frac{dQ}{ds} \equiv \frac{1}{c}\,\Pi^{(e)} + \frac{k}{c}\,q_{\text{ass}}$$

ove, esplicitata la dipendenza di η *dall'elemento* ε *occupante il punto* $P^*(y)$ *in* φ^*, *si pensi* η *come una funzione delle sole* x^L [(7)].

In base a $(101)_2$, (111) e (112), (150) diviene

$$(151)\qquad T\frac{d\eta}{ds} \leqslant \frac{d\bar{w}}{ds} + \frac{1}{k}\frac{dl^{(i)}}{ds} = \frac{d\bar{w}}{ds} + Y^{\varrho\sigma}(\varepsilon_{\beta\gamma}, T, p_i)\frac{d\varepsilon_{\varrho\sigma}}{ds}$$

che costituisce una condizione sulle funzioni $\eta(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, r_i)$, $\bar{w}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, p_i)$ e $Y^{\varrho\sigma}$. (151) non si riduce identicamente ad una eguaglianza, per esempio, nel caso di fluidi viscosi.

Essendo state introdotte l'entropia η e l'energia interna w, si può definire l'energia libera $\mathcal{F}$ specifica di massa come segue:

$$(152)\qquad \mathcal{F} = w - T\eta\,, \qquad \text{onde} \qquad Td\eta = dw - \eta dT - d\mathcal{F}$$

cosicchè (151) diviene

$$(153)\qquad -k^*d\mathcal{F} \geqslant k^*\eta dT + Y^{\varrho\sigma}d\varepsilon_{\varrho\sigma}\,.$$

Dirò che l'elemento materiale ε è a *trasformazioni reversibili* nell'intervallo termico $T_1 - T_2$ se per ε la disequazione (150) — ossia la (153) — vale come eguaglianza appena sia $T_1 < T < T_2$ — cfr. [22] pag. 107 —.

Per i sistemi a trasformazioni reversibili la disequazione (150) valida come eguaglianza dà luogo alla seguente equazione del calore [52])

$$(154)\qquad Tk\frac{d\eta}{ds} = Tk\left(\frac{\partial\eta}{\partial T}\frac{dT}{ds} + \sum_{\varrho\delta}\frac{\partial\eta}{\partial\varepsilon_{\varrho\delta}}\frac{d\varepsilon_{\varrho\sigma}}{ds} + \sum\frac{\partial\eta}{\partial r_i}\frac{\partial r_i}{ds}\right) =$$

$$= \frac{\Pi^{(e)} + kq_{ass}}{c} = -u_L\overline{E}^{LM}{}_{/M} - q^L{}_{/L} - q^L{}_{/M}u^Mu_L\,.$$

Naturalmente questa non va intesa come una nuova equazione sulle funzioni $T(x^L)$, $\varepsilon_{\varrho\sigma}(x^L)$ e $r_i(x^L)$ ma come una condizione sui dati strutturali della materia, resa più espressivamente dall'eguaglianza $Td\eta = dw + \tilde{Y}^{\varrho\sigma}d\varepsilon_{\varrho\sigma}$ [(151)] con $Y_{\varrho\sigma} = k^*\tilde{Y}_{\varrho\sigma}$.

[52]) Se $f(\varepsilon_{\varrho\sigma})$ è una funzione della dilatazione $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ $[\varepsilon_{\varrho\sigma} = \varepsilon_{\sigma\varrho}]$ convengo di intendere $\dfrac{\partial f}{\partial\varepsilon_{\varrho\sigma}} = \left[\dfrac{\partial\varphi}{\partial T_{\varrho\sigma}}\right]_{T_{\varrho\sigma}\,\varepsilon_{\varrho\sigma}}$ ove la variabile $T_{\varrho\sigma}$ può assumere per valore un qualunque tensore doppio, anche non simmetrico, e la funzione φ è determinata dalla condizione $\varphi(T_{\varrho\sigma})$ $f(\varepsilon_{\varrho\sigma})$ per $2\varepsilon_{\varrho\sigma} = T_{\varrho\sigma} - T_{\sigma\varrho}$.

20. Materiali elastici in senso lato.

Nella presente teoria relativistica si possono introdurre i materiali elastici come nel caso classico basandosi sulla termodinamica e usando l'energia libera $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\varepsilon_{\varrho\sigma}, T)$ pensata come funzione delle $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ e della temperatura T oppure, in modo equivalente, l'energia interna $w = w^{(\eta)}(\varepsilon_{\varrho\sigma}, \eta)$ pensata come funzione delle $\varepsilon^{\varrho\sigma}$ e della entropia η (grazie al postulato di Helmoltz).

Parlo di materiali elastici in senso lato in quanto prescindo dalla condizione di esistenza di uno stato esente da sforzi e da condizioni di stabilità, condizioni che variano da autore ad autore (ciò da cui prescindo può imporsi nella presente teoria relativistica con le stesse parole che nel caso classico).

Definiti in modo, direi, diretto i materiali elastici in senso lato basandomi sulla esistenza della funzione $\mathcal{F}(\varepsilon_{\varrho\sigma}, T)$, mi interessa stabilire rigorosamente in relatività (generale) un certo teorema il quale ha senso ed è valido anche nel caso classico. Nemmeno in questo caso esso è stato ancora dimostrato; però esso è conforme alla trattazione dei corpi elastici fatta nel caso classico in [22] pag. 109, 212, secondo la quale questi sono caratterizzati mediante proprietà a priori molto generali. Tali considerazioni non si possono trasportare inalterate alla relatività generale, dove conviene fissare un elemento materiale, ossia parrale di materiali — anzichè di corpi — elastici.

L'impostazione della teoria dell'elasticità, basata nel presente numero sulla termodinamica, differisce alquanto da note trattazioni classiche e il Teor. 20.1 ha interesse, mi sembra, anche dal punto di vista classico per la sua generalità.

Def. 20.1 – *Dirò che l'elemento materiale ε è elastico in senso lato nell'intervallo termico $T_1 - T_2$ se per $T_1 < T < T_2$ l'energia libera $\mathcal{F}$* [(152)] *per unità di massa convenzionale dipende solo da $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ e T, inoltre ε è esente da vincoli interni nel senso che esso può compiere un qualunque processo elementare $(\varepsilon_{\varrho\sigma}, T) \longrightarrow (\varepsilon_{\varrho\sigma} + d\varepsilon_{\varrho\sigma}, T + dT)$, e infine la parte simmetrica $Y^{\varrho\sigma}$ degli sforzi lagrangiani e l'entropia η sono espressi da* [nota (52)]

$$(155) \qquad Y^{\varrho\sigma} = -k^* \frac{\partial\mathcal{F}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T)}{\partial\varepsilon_{\varrho\sigma}}, \qquad \eta = -\frac{\partial\mathcal{F}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T)}{\partial T}.$$

Sia ε elastico in senso lato. Allora per (153) *esso è a trasformazioni reversibili* [n. 19] onde per (154) $T\partial\eta/\partial T = - T\partial^2\mathcal{F}/\partial T^2$ è il calore specifico a configurazione costante. Questo deve essere > 0 per il postulato di Helmoltz onde, com'è noto, da (155) si ricava $T = T^{(\eta)}(\varepsilon_{\alpha\beta}, \eta)$ e da (152) e $(155)_2$ risulta

$$(156) \quad w = w^{(\eta)}(\varepsilon_{\alpha\beta}, \eta) = \mathcal{F}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T) - T\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial T} \text{ con } T = T^{(\eta)}(\varepsilon_{\alpha\beta}, \eta) .$$

In base a (152) e (153) si ha, come è ben noto nel caso classico, che *un elemento materiale è elastico in senso lato in* $T_1 - T_2$ *se e solo se ivi esso è esente da vincoli interni, l'energia interna specifica* w *è una funzione* $w^{(\eta)}$ $(\varepsilon_{\alpha\beta}, \eta)$ *delle* $\varepsilon_{\alpha\beta}$ *e dell'entropia* η *e si ha* [nota (52)]

$$(157) \qquad Y^{\varrho\sigma} = - k^* \frac{\partial w^{(\eta)}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T)}{\partial\varepsilon_{\varrho\sigma}}, \qquad T = k^* \frac{\partial w^{(\eta)}(\varepsilon_{\alpha\beta}, \eta)}{\partial\eta} .$$

Ecco la suaccennata caratterizzazione:

TEOR. 20.1 – *Nell'intervallo termico* $T_1 - T_2$ *è elastico in senso lato ogni elemento materiale* ε *per cui ivi la parte simmetrica* $Y^{\varrho\sigma}$ *degli sforzi lagrangiani, l'entropia* η *e l'energia libera* w *possono esprimersi come funzioni della temperatura* T, *del tensore* $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ *di deformazione e di certi parametri fisici lagrangiani* $p_1, p_2 \ldots$ *in modo che valgano le seguenti condizioni:*

a) $Y^{\varrho\sigma}, \eta, \mathcal{F}, \partial\mathcal{F}/\partial\varepsilon_{\varrho\sigma}, \partial\mathcal{F}/\partial T$ *e* $\partial\mathcal{F}/\partial p_i$ *sono funzioni continue.*

b) Le variabili $\varepsilon_{\alpha\beta}$, T *e* p_i *non sono legate da alcun vincolo olonomo* [53]) *o anolonomo; oppure sono legate da vincoli effettivamente anolonomi che lasciano* $d\varepsilon_{\alpha\beta}$ *e* dT *arbitrari a* $p_i =$ cost, *precisamente da vincoli del tipo* [54])

$$(158) \qquad \sum_i a_{ri}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, p_h)dp_i = 0 \qquad (r = 1, \ldots, m)$$

---

[53]) Naturalmente, se le $\varepsilon_{\varrho\sigma}$, T e p_i son legate da qualche vincolo olonomo che permetta di esprimere alcune delle p_i in funzione delle rimanenti, di T e delle $\varepsilon_{\varrho\sigma}$, allora si ricade nel caso considerato nel presente teorema.

[54]) Si intende che ogni processo $\sigma = < \varepsilon_{\varrho\sigma}(s), T(s), p_i(s) >$ verificante (158) è fisicamente possibile per l'elemento ε. Per poter dimostrare il Teor. 20.1 basta ammettere che per ogni stato $(\bar\varepsilon_{\varrho\sigma}, \overline{T}, \bar p_i)$ con $T_1 < \overline{T} < T_2$ e ogni incremento $(d\varepsilon_{\varrho\sigma}, dT, dp_i)$ l'elemento ε possa compiere il passaggio elementare da $(\bar\varepsilon_{\varrho\sigma}, \overline{T}, \bar p_i)$ a $(\bar\varepsilon_{\varrho\sigma} + d\varepsilon_{\varrho\sigma}, \overline{T} + dT, \bar p_i + dp_i)$.

e tali che, fissati ad arbitrio (in $T_1 - T_2$) due stati del tipo $(\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}, \bar{T}, p_i^0)$ e $(\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}, \bar{T}, p_i^1)$, questi sono congiunti da un processo $\bar{\sigma} = \ < \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}, \bar{T}, p_i(s) >$ *verificante* (158) *e in cui* $\varepsilon_{\alpha\beta}$ *e* T *non variano.*

Infatti si riprendano gli stati $(\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}, \bar{T}, p_i^0)$ e $(\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}, \bar{T}, p_i^1)$ e il processo $\bar{\sigma}$ considerati nella condizione b). Fissato s $(0 \leqslant s \leqslant s_1)$, a partire dallo stato $(\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}, \bar{T}, p_i(s))$ l'incremento $(d\varepsilon_{\alpha\beta}, dT, dp_i)$ è possibile [(158)] se e solo se tale è l'incremento opposto $(-d\varepsilon_{\alpha\beta}, -dT, -dp_i)$. Dunque (153) vale come eguaglianza, ossia il sistema è a trasformazioni reversibili.

Poichè lungo il processo $\bar{\sigma}$ è $d\varepsilon_{\alpha\beta} = dT = 0$, per (153) — valida dunque come eguaglianza — segue che lungo $\bar{\sigma}$ è pure $d\mathcal{F} = 0$, onde $\mathcal{F}(\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}, \bar{T}, p_i^0) = \mathcal{F}(\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}, \bar{T}, p_i^1)$. Dunque $\mathcal{F}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, p_i)$ non dipende dai parametri p_i.

Allora, valendo (153) in corrispondenza a valori arbitrari di $\varepsilon_{\alpha\beta}$, T, $d\varepsilon_{\alpha\beta}$ e dT (purchè $\overset{*}{a}_{\alpha\beta} + 2\varepsilon_{\alpha\beta}$ sia un tensore definito > 0 e $T_1 < T < T_2$) segue (155) da cui, fra l'altro, risulta che anche $Y^{\varrho\sigma}$ ed η sono determinati da $\varepsilon_{\alpha\beta}$ e T. c.d.d

In base al Teor. 20.1 *non esiste un elemento materiale* ε *per cui* $Y^{\varrho\sigma}$, $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ *ed* $\mathcal{F}$ *siano funzioni regolari* [Teor. 20.1] *delle* $\varepsilon_{\alpha\beta}$, T *e* p_i, *dipendenti effettivamente dalle* p_i, *ove valga la condizione b*) *del* Teor. 20.1, *condizione certo soddisfatta se* $\varepsilon_{\alpha\beta}$, T *e* p_i *possono assumere incrementi arbitrari.*

Osservo che, considerata la velocità lagrangiana $\overset{*}{\Delta}_{\varrho\sigma}$ di deformazione, la condizione b) del Teor. 20.1 non è soddisfatta, ad esempio, per $p_1 = \overset{*}{\Delta}_{11}$ in quanto in base a **3** (121) sarebbe $p_1 = d\varepsilon_{11}/ds$ (onde fra l'altro, non potrebbe essere $d\varepsilon_{11} = 0$ per $p_1 \neq 0$).

La considerata condizione b) è soddisfatta per $p_\lambda = \varepsilon^{\lambda\varrho\sigma}\overset{*}{\omega}_{\varrho\sigma}$ ove $\overset{*}{\omega}_{\varrho\sigma}$ è la velocità angolare lagrangiana. Dunque, pur prescindendo dal principio di indifferenza materiale — v. [15] pag. 209 — in base al Teor. 20.1 *si può escludere che per* ε *sussistano relazioni del tipo*

$$(159) \quad Y^{\varrho\sigma} = Y^{\varrho\sigma}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, \overset{*}{\omega}_{\alpha\beta}), \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, \overset{*}{\omega}_{\alpha\beta}), \quad \eta = \eta(\varepsilon_{\alpha\beta}, T, \overset{*}{\omega}_{\alpha\beta})$$

mentre non si può fare l'analogo per $\overset{*}{\Delta}_{\alpha\beta}$ nel ruolo di $\overset{*}{\omega}_{\alpha\beta}$.

Le condizioni b) del Teor. 20.1 sono soddisfatte fra l'altro anche per $p_1, p_2, \ldots$ eguagliate ad opportune delle variabili lagrangiane del 2° ordine $\overset{(2)}{C}_{\lambda\varrho\sigma}$ [**3** (123)] oppure delle $\mu^*_{\varrho\sigma}$. Queste ultime sono pure del secondo ordine, e soddisfano una certa condizione di vincolo olonomo [**3** $(132)_2$] e, fra l'altro, nel caso classico sono usate nell'elasticità assimetrica con momenti interni di contatto [**3** n. 17]. Dunque la precedente esclusione involgente (159) sussiste anche quando si dia il ruolo delle $\omega^*_{\alpha\beta}$ ad alcune delle variabili $\overset{(2)}{C}_{\lambda\varrho\sigma}$ e $\mu^*_{\varrho\sigma}$

Conformemente ad un precedente accenno, si può dire che l'elemento ε, elastico in senso lato in $T_1 - T_2$, è ivi *elastico* se ad ogni $\overline{T}$ con $T_1 < \overline{T} < T_2$ corrispondono dei valori $\overline{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ di $\varepsilon_{\alpha\beta}$ nei quali l'energia libera $\mathcal{F}(\varepsilon_{\alpha\beta}, T)$, come funzione delle $\varepsilon_{\alpha\beta}$, ha un minimo assoluto [55] — onde lo stato $(\overline{\varepsilon}_{\alpha\beta}, \overline{T})$ è esente da sforzi —.

21. Sulle equazioni costitutive euleriane in particolari coordinate solidali. Una condizione di integrabilità.

Si sa dalla teoria classica dei sistemi continui che, ad esempio per i materiali elastici, le $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ e T — ovvero le $C_{\varrho\sigma} = a^*_{\varrho\sigma} + 2\varepsilon_{\varrho\sigma}$ e T — determinano le $Y^{\varrho\sigma}$ ma non le X^{lm} e che queste restano indeterminate per una rotazione. Però, poichè $\mathfrak{D}$ è una funzione delle $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ ossia delle $C_{\varrho\sigma}$ [**3** (70)], usando coordinate solidali ($x^r = y^r$) si determinano in funzione delle $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ e di T anche le X^{lm} [**3** (87)] e inoltre le X^{L0} restan determinate dalle condizioni **3** (90) e **3** (90′). Precisamente nelle particolari coordinate solidali

$$(160) \qquad x^r = y^r\,, \qquad x^0 = t = s\,, \qquad \text{onde} \qquad g_{00} \equiv 1$$

---

[55]) In [4] dove si considerano, nel caso classico, materiali anche non elastici, si impone una certa condizione di stabilità a partire da un qualunque stato $(\varepsilon_{\alpha\beta}, T)$. Conviene riferirsi alla « alternative definition of termal equilibrium » a pag. 111. Essa si riferisce sostanzialmente alla funzione $\overline{w}^{(\eta)}(x^r{}_\sigma, \eta) = w^{(\eta)}(\varepsilon_{\varrho\sigma}, \eta)$ ove $w^{(\eta)}(\varepsilon_{\varrho\sigma}, \eta)$ è espressa da (156) e le $\varepsilon_{\varrho\sigma} = \delta_{rs} x^r_\varrho x^r_\sigma$ con $x^r_\varrho = \partial x^r/\partial y^\varrho$, sono le caratteristiche ordinarie di deformazione [(56)]. Usando tale funzione, le condizioni su cui si basa la suddetta « alternative definition » si enunciano praticamente con le stesse parole anche nella presente teoria **relativistica**.

per **3** (87), **3** (90) e **3** (90′) si ha

$$(161) \qquad X^{lm} = \mathfrak{D}^{-1} Y^{lm}, \quad X^{0l} = -\,\mathfrak{D}^{-1} g_{0\varrho} Y^{\varrho l}, \quad X^{00} = \mathfrak{D}^{-1} g_{0\varrho} g_{0\sigma} Y^{\varrho\sigma}.$$

Evidentemente stante (160) sussistono i legami

$$(162) \qquad X^{0l} = X^{l0} = -\, g_{0m} X^{lm}, \qquad X^{00} = g_{0l} g_{0m} X^{lm}$$

che esprimono semplicemente il carattere spaziale del tensore X^{LM}.

Si osservi che per $(160)_1$ e **3** (84) è $\bar{g}_{l0} = 0$. Inoltre per **3** (88) si ha $X_{LM} = \mathfrak{D}^{-1} \bar{g}_{L\varrho} \bar{g}_{M\varrho} Y^{\varrho\sigma}$. Allora per **3** (84) è

$$(163) \qquad X_{lm} = \mathfrak{D}^{-1} C_{l\varrho} C_{m\sigma} Y^{\varrho\sigma}, \qquad X_{l0} = 0,$$

quindi

$$(164) \qquad Y^{\varrho\sigma} = \mathfrak{D} \overset{-1}{C}{}^{l\varrho} \overset{-1}{C}{}^{m\sigma} X_{lm} \qquad \text{con} \qquad \overset{-1}{C}{}^{\varrho\lambda} C_{\sigma\lambda} = \delta^{\varrho}{}_{\sigma}.$$

Poichè, stante (160), è $\Delta^*_{\varrho\sigma} = \Delta_{\varrho\sigma}$ [**3** (110)], *le formule* (163) *e* (164) *permettono di passare dalle espressioni di* $Y^{\varrho\sigma}$ *in funzione di* $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\Delta^*_{\alpha\beta}$ e T — ossia $C_{\varrho\sigma}$, $\Delta^*_{\varrho\sigma}$ e T — a quelle delle X_{lm} (e X_{LO}) *in funzione delle stesse variabili. Le* (161) *adempiono lo stesso ufficio nei riguardi delle* $Y^{\varrho\sigma}$ *e delle componenti controvarianti* X^{lm}.

Le ritengo utili, a parte l'uso fattone nel seguito, a causa della grande utilità in molte questioni, delle particolari coordinate solidali (160).

Per (101) anche k e ϱ possono esprimersi — al pari di w — mediante le $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ e T, o $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ ed η. Nel caso elastico, in cui quindi vale (157), per (101) e (161) si ha,

$$(165) \quad X^{lm} = -\,k \frac{\partial w^{(\eta)}}{\partial \varepsilon_{lm}}, \quad X^{0l} = k g_{0\varrho} \frac{\partial w^{(\eta)}}{\partial \varepsilon_{\varrho l}}, \quad X^{00} = -\,k g_{0\varrho} g_{0\sigma} \frac{\partial w^{(\eta)}}{\partial \varepsilon_{\varrho\sigma}}.$$

Si tratta di equazioni del tipo delle (161) associate alle (52). Viceversa, date le funzioni

$$(166) \quad X^{LM} = X^{LM}(\varepsilon_{\alpha\beta}) = X^{ML} \quad \text{oppure} \quad X_{LM} = X_{LM}(\varepsilon_{\alpha\beta}) = X_{ML}$$

soddisfacenti (162) o rispettivamente le condizioni $X_{LO} = 0$, è spontaneo domandare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè le equazioni $(166)_1$ o le $(166)_2$ siano rigorosamente ammissibili come equazioni costitutive di un materiale elastico in condizioni adiabatiche.

Dal punto di vista della presente teoria, conformemente alle ordinarie teorie classiche di elasticità a base termodinamica, tali condizioni devono equivalere all'esistenza di una funzione $w^{(\eta)}(\varepsilon_{\alpha\beta})$ per cui, stanti (161) o rispettivamente le (164) e $(101)_2$, valgano le $(157)_1$. Naturalmente, in base a $(161)_1$, stanti (162), le cercate condizioni sono determinate dalle eguaglianze

$$(167) \qquad \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\varrho\sigma}} \frac{X^{lm}}{\mathfrak{D}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{lm}} \frac{X^{\varrho\sigma}}{\mathfrak{D}}, \qquad\qquad X^{lm} = g^{lr} g^{ms} X_{rs}$$

in cui è interessante la presenza della $\mathfrak{D}$, esprimibile mediante le $C_{\varrho\sigma}$ o le $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ [**3** (70)].

22. Sulla legge lineare di Hooke. Impossibilità di materiali elastici a stress covariante rigorosamente lineare nelle precedenti comuni coordinate solidali.

Nella presente teoria è spontaneo assumere per *materiale elastico* (*rigorosamente*) *lineare* ogni materiale per cui l'energia interna specifica ha la forma

$$(168) \qquad w^{(\eta)}(\varepsilon_{\varrho\sigma}, \eta) = \frac{1}{2} c^{*\varrho\sigma\alpha\beta} \varepsilon_{\varrho\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta} \quad \text{con} \quad c^{*\alpha\beta\varrho\sigma} = c^{*\beta\alpha\varrho\sigma} = c^{*\alpha\beta\sigma\varrho}$$

ove le $c^{*\varrho\sigma\alpha\beta}$ dipendono — oltre che dall'elemento materiale ε che si considera — solo dall'entropia η e magari la forma (168) nelle $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ è definita > 0; tale definizione mi sembra opportuna in quanto da (157) e (168) segue

$$(169) \quad Y^{\varrho\sigma} = - k^* c^{*\varrho\sigma\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}, \qquad T = - \frac{1}{2} \frac{dc^{*\varrho\sigma\alpha\beta}}{d\eta} \varepsilon_{\varrho\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta}.$$

Si considerino ora le particolari coordinate solidali (160).

Allora da (169) e $(109)_2$ in base a **3** (82) con $g_{00} = 1$ e a **3** (84) e **3** (81) si ha, stante **3** (20)

$$(170)\quad X_{LM} = \frac{1}{2} c_{LM}{}^{\alpha\beta}(\bar{g}_{\alpha\beta} + \overset{*}{a}_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^*}{-g}}\, c^{*\varrho\sigma\alpha\beta}\bar{g}_{L\varrho}\bar{g}_{\mu\sigma}(\bar{g}_{\alpha\beta} + \overset{*}{a}_{\alpha\beta}).$$

ove le quantità

$$(171)\quad c_{LM}{}^{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{a^*}{-g}}\, c^{*\varrho\sigma\alpha\beta}\bar{g}_{L\varrho}\bar{g}_{M\sigma} \qquad (\bar{g}_{O\sigma} = 0,\ \bar{g}_{l\varrho} = -\overset{*}{a}_{l\varrho} - \varepsilon_{l\varrho})$$

non sono anch'esse costanti. Però nello stato indeformato ($\varepsilon_{\varrho\sigma} = 0$) è $\bar{g}_{\alpha\beta} + \overset{*}{a}_{\alpha\beta} = 0$ e $c_{LM}{}^{\alpha\beta} \neq 0$. Quindi, per piccole deformazioni, in (170) si può riguardare il tensore $c_{LM}{}^{\alpha\beta}$ [(171)] come costante a meno di infinitesimi [56]) nelle $\varepsilon_{\varrho\sigma}$.

* * *

Consideriamo il caso puramente meccanico, in cui cioè non c'è radiazione elettromagnetica nè corrente elettrica e inoltre i processi sono adiabatici e quindi isoentropici. Allora alla sollecitazione lineare (169), ossia alla (170), corrisponde (per costruzione) un'energia specifica di massa $w(\varepsilon_{\varrho\sigma}) = w^{(\eta)}(\varepsilon_{\varrho\sigma}, \eta)$ [(168)] funzione delle sole $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ e magari delle y^ϱ (come d'ordinario accade in fisica classica per i corpi elastici). Allora per $(101)_{2,3}$ e **3** (70) le densità ϱ e ϱ^* di energia totale sono pure funzioni delle $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ (e delle y^ϱ).

Mi propongo ora, tra l'altro, di confrontare i risultati ottenuti applicando la presente teoria, per deformazioni finite e a base termodinamica, con quelli stabiliti in [19] ove si considera il caso lineare e puramente meccanico. Al detto scopo suppongo che, anzichè le $c^{*\varrho\sigma\alpha\beta}$, sian costanti le

$$(172)\qquad c_{LM}{}^{\alpha\beta} = c_{ML}{}^{\alpha\beta} = c_{LM}{}^{\beta\alpha} \qquad (c_{OL}{}^{\alpha\beta} = 0)$$

[56]) Poichè usando la legge di Hooke di solito si ritengono, tra l'altro, trascurabili infinitesimi d'ordine superiore al primo nelle $\varepsilon_{\varrho\sigma}$, la detta costanza approssimata delle $c_{LM}{}^{\alpha\beta}$ e $(170)_1$ mostrano che la presente teoria lineare va ritenuta in accordo con quella svolta in [19] ove le $c_{LM}{}^{\alpha\beta}$ — e non le $c^{*\alpha\beta\gamma\delta}$ — sono assunte rigorosamente costanti — v. [19] n. 2 ove alle $c_{LM}{}^{\alpha\beta}$ corrispondono le C^*_{ijkl} —.

e in tale ipotesi considero la sollecitazione (170) — cfr. [19] —. Allora per (164) e (170) l'eguaglianza (169) prende la forma [57]

$$Y^{\varrho\sigma} = \frac{1}{2} c_{lm}{}^{\alpha\beta} \mathfrak{D} \overset{-1}{C}{}^{\varrho l} \overset{-1}{C}{}^{\sigma m} (- C_{\alpha\beta} + \overset{*}{a}_{\alpha\beta}) \,. \tag{173}$$

Essendo $\overset{*}{C}_{\varrho\sigma} = \overset{*}{a}_{\varrho\sigma} + 2\varepsilon_{\varrho\sigma}$ [**3** $(20)_1$], $Y^{\varrho\sigma}$ ammette come potenziale una funzione delle $\varepsilon_{\alpha\beta}$ se e solo se

$$\frac{\partial Y^{\varrho\sigma}}{\partial C_{\gamma\delta}} = \frac{\partial Y^{\gamma\delta}}{\partial C_{\varrho\sigma}} \,. \tag{174}$$

Tenendo conto di **3** (71) e di formule ben note — v. per es. [2], nota 6 a piè di pagina 40 — ossia di

$$\frac{\mathfrak{D}}{2} \overset{-1}{C}{}^{\gamma\delta} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial C_{\gamma\delta}} \,, \qquad \frac{\partial \overset{-1}{C}{}^{\varrho\sigma}}{\partial C_{\gamma\delta}} = - \overset{-1}{C}{}^{\varrho\gamma} \overset{-1}{C}{}^{\sigma\delta} \,, \tag{175}$$

da (173) segue

$$\frac{2}{\mathfrak{D}} \frac{\partial Y^{\varrho\sigma}}{\partial C_{\gamma\delta}} = c_{lm}{}^{\alpha\beta} (\overset{*}{a}_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta}) \left[\frac{1}{2} \overset{-1}{C}{}^{\varrho l} \overset{-1}{C}{}^{\sigma m} \overset{-1}{C}{}^{\gamma\delta} - \overset{-1}{C}{}^{\varrho\gamma} \overset{-1}{C}{}^{l\delta} \overset{-1}{C}{}^{\sigma m} - \right. \tag{176}$$
$$\left. - \overset{-1}{C}{}^{\varrho l} \overset{-1}{C}{}^{\sigma\gamma} \overset{-1}{C}{}^{m\delta} \right] - c_{lm}{}^{\gamma\delta} \overset{-1}{C}{}^{\varrho l} \overset{-1}{C}{}^{\sigma m} \,.$$

Per qualunque $u < 0$ è lecito considerare una deformazione per cui sia

$$\| C_{\varrho\sigma} \| = \begin{Vmatrix} u^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{onde} \quad \| \overset{-1}{C}{}^{\varrho\sigma} \| = \begin{Vmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} . \tag{177}$$

---

[57]) Per (122) e (123) è $\tilde{g}_{LO} = g_{LO} - u_L u_O = g_{LO} - g_{OL} = 0$. Allora per (124) è $\delta^l{}_\varrho = \tilde{g}_\varrho{}^l = g^{lm} \tilde{g}_{\varrho m}$; dunque $\| g^{lm} \|$ è la matrice reciproca della $\| g_{lm} \|$. Allora per **3** (84), nelle particolari coordinate solidali (121), (122) è $\overset{-1}{C}{}^{\varrho\sigma} = - g^{\varrho\sigma}$, onde (173) può anche scriversi $Y^{\varrho\sigma} = \frac{1}{2} c_{lm}{}^{\alpha\beta} g^{\varrho l} g^{\sigma m} (\tilde{g}_{\alpha\beta} + \overset{*}{a}_{\alpha\beta})$ $[g^{lm} = g^{lm} - u^l u^m = \tilde{g}^{lm}]$.

È lecito supporre $\overset{*}{a}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ onde per (177) $\overset{*}{a}_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta} = (1 - u^{-1})\delta^1_\alpha\delta^1_\beta$. Per quanto precede (176) diviene

$$(178) \qquad \frac{2}{\mathfrak{D}} \frac{\partial Y^{\varrho\sigma}}{\partial C_{\gamma\delta}} = (1 - u^{-1})\Big[\frac{1}{2}\, c_{\varrho\sigma}{}^{11} \overset{-1}{C}{}^{\varrho\varrho} \overset{-1}{C}{}^{\sigma\sigma} \overset{-1}{C}{}^{\gamma\delta} - c_{\delta\sigma}{}^{11} \overset{-1}{C}{}^{\varrho\gamma} \overset{-1}{C}{}^{\delta\delta} \overset{-1}{C}{}^{\sigma\sigma} - c_{\varrho\delta}{}^{11} \overset{-1}{C}{}^{\varrho\varrho} \overset{-1}{C}{}^{\sigma\gamma} \overset{-1}{C}{}^{\delta\delta}\Big] - c_{\varrho\sigma}{}^{\gamma\delta} \overset{-1}{C}{}^{\varrho\varrho} \overset{-1}{C}{}^{\sigma\sigma}$$

ove, come nel seguito, gli indici ϱ, σ, γ e δ non sono mai soggetti a sommatoria. Da (178) segue $[c_{LM}{}^{11} = c_{ML}{}^{11}]$

$$(179) \qquad \frac{2}{\mathfrak{D}}\left(\frac{\partial Y^{11}}{\partial C_{22}} - \frac{\partial Y^{22}}{\partial C_{11}}\right) = \frac{1 - u^{-1}}{2}\, c_{11}{}^{11}u^2 - c_{11}{}^{22}u^2 - \frac{1 - u^{-1}}{2}\, c_{22}{}^{11}u + c_{22}{}^{11} = \left(\frac{1}{2}\, c_{11}{}^{11} - c_{11}{}^{22}\right)u^2 - \frac{1}{2}\,(c_{11}{}^{11} + c_{22}{}^{11})u + \frac{3}{2}\, c_{22}{}^{11}\,,$$

$$(180) \qquad \frac{2}{\mathfrak{D}}\left(\frac{\partial Y^{11}}{\partial C_{23}} - \frac{\partial Y^{23}}{\partial C_{11}}\right) = -\, c_{11}{}^{23}u^2 + c_{23}{}^{11} + \frac{u^{-1} - 1}{2}\, c_{23}{}^{11}u = -\, c_{11}{}^{23}u^2 - \frac{1}{2}\, c_{23}{}^{11}u + \frac{3}{2}\, c_{23}{}^{11}\,,$$

$$(181) \qquad \frac{2}{\mathfrak{D}}\left(\frac{\partial Y^{11}}{\partial C_{12}} - \frac{\partial Y^{12}}{\partial C_{11}}\right) = (1 - u^{-1})[-\, c_{21}{}^{11}u^2 - c_{12}{}^{11}u^2] - c_{11}{}^{12}u^2 - (1 - u^{-1})\left[\frac{1}{2}\, c_{12}{}^{11}u^2 - c_{12}{}^{11}u^2\right] - c_{12}{}^{11}u = -\left(\frac{3}{2}\, c_{12}{}^{11} + c_{11}{}^{12}\right)u^2 + \frac{5}{2}\, c_{12}{}^{11}u\,.$$

Per (174) da (179), (180) e (181) segue che per ogni $u > 0$ sono nulli gli ultimi membri di (179), (180) e (181) e, ovviamente, anche le espressioni ottenute da tali membri mediante una qualsiasi permutazione degli indici 1, 2 e 3. È allora facile ricono-

scere — senza supporre alcuna simmetria del tipo $c_{\varrho\sigma}{}^{lm} = c_{lm}{}^{\varrho\sigma}$ — che è

$$c_{lm}{}^{\varrho\sigma} = 0 \, . \tag{182}$$

Si conclude che *se il comportamento di un materiale è (rigorosamente rappresentato dalle equazioni costitutive* (170)$_1$ *con le* $c_{LM}{}^{\alpha\beta}$ *costanti* [58]), *e inoltre (almeno nei processi isoentropici) esso ammette un'energia specifica di massa* — oppure, in modo equivalente, una densità propria ϱ di energia totale, ovvero una densità ϱ^* di tale energia per unità di configurazione di riferimento — *la quale sia funzione delle sole* $\varepsilon_{\alpha\beta}$ *oppure delle* $C_{\alpha\beta}$, *allora il detto materiale non è capace di sforzi (non nulli)*, quindi non può soddisfare alcuna condizione di stabilità, cosicchè esso, a rigore, è inaccettabile dal punto di vista fisico.

Insomma l'unico eventuale materiale elastico in senso lato [Def. 20.1] avente equazioni costitutive del tipo (170)$_1$ con le $c_{LM}{}^{\varrho\sigma}$ funzioni della sola entropia η oppure della sola temperatura T sarebbe quello incapace di sforzi.

Questo risultato della inesistenza di corpi elastici con le X^{lm} funzioni lineari delle $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ in coordinate solidali [(160)] — risultato da ritenersi valido anche nella fisica non relativistica — va accostato a quello di A. Signorini affermante l'impossibilità di uno stress lineare nelle caratteristiche di deformazione dello spostamento inverso per un qualunque materiale elastico (non in senso lato) — v. [11] pag. 24 —.

Le considerazioni precedenti mettono in luce che in qualche problema relativistico di elasticità, qualora si cerchi che le equa-

---

[58]) Tali sono i materiali considerati nella teoria relativistica dell'elasticità di C. Rayner [19]. Da ciò segue che per essi w, ϱ e ϱ^* non sono, in generale funzioni, della sola deformazione. Essi non sono cioè (rigorosamente) elastici secondo la presente teoria e le teorie classiche dell'elasticità a base termodinamica.

Però essi differiscono di poco da tali materiali [(169)] cosicchè [19] va ritenuto in accordo con la presente teoria, come si è detto nella nota (17) ove anzi si spiegano le differenze rilevate tra i risultati delle due teorie riguardo ai considerati materiali.

zioni costitutive siano relativamente semplici ma che ϱ, ϱ^* oppure w [(101)] siano funzioni delle $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ e di η, può darsi che piuttosto delle equazioni $(170)_1$ con le $c_{LM}{}^{\alpha\beta}$ funzioni della sola η convenga usare le (169) con le $c^{*\varrho\sigma\alpha\beta}$ funzioni appunto della sola η.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRESSAN A.: *Sui sistemi continui nel caso asimmetrico*. Annali di Matematica pura e applicata. (In corso di stampa).

[2] BRESSAN A.: *Sulla propagazione delle onde ordinarie di discontinuità nei sistemi a trasformazioni reversibili*. Rend. Sem. Mat. del Univ. di Padova, vol. XXXIII, pag. 41, 1963.

[3] BRESSAN A. *Una teoria di cinematica dei sistemi continui in relatività generale*. Annali di matematica pura ed applicata, (1963). (In corso di stampa).

[4] COLEMAN B. & NOLL W.: *On the Thermostatics of Continuous Media* Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 4, N. 2, pag. 97, 1959.

[5] CATTANEO C.: *Sulla conduzione del calore*. Atti del Seminario Matem. e Fis. Univ. di Modena. Vol. III/I, pag. 83, 1948-1949.

[6] CATTANEO C.: *Introduzione alla teoria einsteiniana della gravitazione*, Veschi, Roma, 1960-61.

[7] ECKART C.: *The Thermodynamics of Irreversible Processes III. Relativistic Theory of the Simple Fluid*. Physical Review, vol. 58, pag. 919, 1940.

[8] FINZI B. & PASTORI M.: *Calcolo tensoriale e applicazioni*. Bologna. Zanichelli, 1961.

[9] FOCK V.: *The theory of space time and gravitation*. Pergamon Press, 1959.

[10] GRIOLI G.: *Elasticità asimmetrica*. Annali di Mat. pura ed applicata, serie IV, Tomo L, 1960.

[11] GRIOLI G.: *Mathematical theory of elastic equilibrium*. Ergebnisse der angewandten Mathematik. Springer-Verlag, 1962.

[12] HERGLOTZ G.: *Über die Mechanik des deformierbaren Körpers vom Standpunkte der Relativitätstheorie*. Ann. phys, (4), 36, 493-533.

[13] MÖLLER C.: *The theory of relativity*. Oxford at the Clarendon Press, 1952.

[14] NOLL W.: *On the continuity of the solid and fluid states*. Journal of Rational Mechanics and Analysis. Vol. 4, n. 1, January, 1955.

[15] NÖLL W.: *A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media*. Archive for Rat. Mechanics and Analysis. Vol. 2, N. 3, pag. 197, 1958.

[16] PHAM MAU QUAN: *Sur une theorie relativiste des fluides thermodynamiques*. Annali di mat. pura e applicata. Serie IV, Vol. 38, 1955.

[17] PHAM MAU QUAN: *Etude electromagnétique et thermodynamique d'un fluide relativiste chargé*. Journal of Rational mechanics and Analysis. Vol. 5, 1956.

[18] PHAM MAU QUAN: *Thermodynamique d'un fluide relativiste*. Boll. U.M.I. Serie III, Anno XV, N. 2. Giugno 1960.

[19] RAYNER C. B.: *Elasticity in general relativity*. In corso di stampa nella rivista: Royal Society Proceedings.

[20] SIGNORINI A.: *Meccanica Razionale*. Vol. II, cap. X, pag. I, Perella, Roma, 1954 (seconda ed.).

[21] SIGNORINI A.: *Lezioni di fisica matematica*. Roma, 1949-50, fascicolo 2º.

[22] SIGNORINI A.: *Lezioni di fisica matematica*. Roma, 1952-53.

[23] SYNGE J. L.: *A theory of elasticity in general relativity*. Math, Zeitschr. 72, 82-87, 1959.

[24] SYNGE J. L.: *Relativity: the general theory*. North Holland Publishing Co. Amsterdam, 1960.

[25] TOLMAN C.: *Relativity, thermodynamics and cosmology*. Oxford at the Clarendon Press., 1949.

[26] TRUESDELL C. & TOUPIN R. A.: *The classical field theory*. Handbuch der Physik, vel. III/I Springer-Verlag, pag. 226, 1960.