

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO DOLCHER

**Su un criterio di convergenza uniforme per le
successioni monotone di funzioni quasi-periodiche**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 34 (1964), p. 191-199

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1964__34__191_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SU UN CRITERIO DI CONVERGENZA UNIFORME PER LE SUCCESSIONI MONOTONE DI FUNZIONI QUASI-PERIODICHE

Nota () di MARIO DOLCHER (a Trieste) (**)*

A guisa di lemma per il raggiungimento di risultati sulle soluzioni quasi-periodiche di certe equazioni alle derivate parziali, L. Amerio [2] ha dimostrato un interessante teorema sulle successioni monotone di funzioni quasi-periodiche. La dimostrazione, del tutto diretta, che egli ne dà e il controesempio che costruisce mi hanno indotto ad indagare sul significato del teorema, ridimostrandolo per una via più « naturale ».

Trattandosi di un teorema che genericamente può dirsi « del tipo del Dini » (dalla convergenza monotona di una successione di funzioni se ne deduce la convergenza uniforme), la via più naturale mi è parsa l'applicazione del teorema del Dini, profittando del fatto che un ambiente compatto è a portata di mano, potendosi utilizzare la cosiddetta compattizzazione di Bohr della retta reale. L'ambientare le funzioni quasi-periodiche in tale spazio compatto rende ragione del significato di alcune proprietà che limitatamente alla retta reale si presentano fin troppo riposte.

Per lo studio della questione mi è stato utile un recente lavoro di E. M. Alfsen e P. Holm [1], nel quale appaiono rielaborati e generalizzati i fondamenti topologici della detta compattizzazione.

(*) Pervenuta in redazione il 30 luglio 1963.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Trieste.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

Aggiungo che il teorema di Amerio ha attirato l'attenzione di S. Bochner [3], il quale, con intendimento tutto diverso da quello della presente Nota, lo ha ravvicinato al teorema del Dini ¹⁾.

Nelle Premesse ho indicato per esteso tutte e sole le proposizioni che servono come ingredienti per la dimostrazione del Teorema: si tratta di proposizioni banali o ben note, ad eccezione forse della prop. 5, della quale dò dimostrazione.

PREMESSE

1. — Sia f una funzione definita in un insieme E , con valor in uno spazio di Hausdorff E' ; detto \mathfrak{F} un filtro su E , $\lim_{\mathfrak{F}} f = y$ ($y \in E'$) significa che per ogni intorno V di y esiste $F \in \mathfrak{F}$ tale che $f(F) \subset V$.

PROP. 1: *Siano E , E' , \mathfrak{F} , f quali ora si è detto, e sia $F \in \mathfrak{F}$. Allora, se esiste $\lim_{\mathfrak{F}|_F} f|_F$ ²⁾, esiste anche $\lim_{\mathfrak{F}} f$ ed è uguale a quello.*

PROP. 2: *Sia f un'applicazione continua di uno spazio topologico E in uno spazio di Hausdorff E' ; sia \mathfrak{F} un filtro su E , ed esista $\lim_{\mathfrak{F}} f = y$. Allora, per ogni punto α ($\alpha \in E$) aderente ad \mathfrak{F} (ossia tale che sia $U \cap F \neq \emptyset$ per ogni intorno U di α e per ogni $F \in \mathfrak{F}$) si ha $f(\alpha) = y$.*

Ad ogni successione $\alpha = \{\alpha_k\}$ di elementi di un insieme E resta associato un filtro su E ³⁾, che indicheremo con lo stesso simbolo α . Se E è spazio topologico e se f è una sua applicazione in uno spazio di Hausdorff E' , l'esistenza di $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\alpha_k)$ equivale all'esistenza di $\lim_{\alpha} f$, e i due limiti coincidono.

¹⁾ Più precisamente, il BOCHNER stabilisce, in condizioni molto generali, e cioè per quelle che chiama *funzioni quasi-automorfe*, un risultato che contiene come casi particolari tanto il teorema del DINI quanto quello di AMERIO: si prescinde del tutto — per la parte che riguarda il teorema di AMERIO — dalla topologia dell'insieme dove le funzioni sono definite, e si fanno invece opportune ipotesi sul comportamento delle funzioni rispetto a un gruppo di sostituzioni operante sull'insieme.

²⁾ Con $f|_F$ ed $\mathfrak{F}|_F$ indichiamo risp. la restrizione della f ad F e la traccia di \mathfrak{F} su F .

³⁾ Cfr. N. BOURBAKI, [4], chap. I, § 6.

Se $\{\alpha_k\}$ è una successione di punti di uno spazio topologico E , diremo che $\alpha \in E$ è *aderente alla successione* se e solo se è aderente al relativo filtro. Essendo che la compattezza ⁴⁾ di uno spazio topologico E equivale all'esistenza di un punto aderente per ogni filtro su E , si ha, in particolare, che in uno spazio compatto ogni successione ammette almeno un punto aderente; cosa che peraltro non implica l'esistenza di una sottosuccessione convergente.

PROP. 3: *Un'applicazione continua di uno spazio topologico E in uno spazio di Hausdorff resta individuata dalla sua restrizione ad un insieme D denso in E .*

PROP. 4: *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue, a valori reali, definite in uno spazio topologico E . Se la successione $\{f_n|_D\}$ delle loro restrizioni ad un insieme D denso in E è monotona, per esempio non-crescente, lo stesso è per la successione $\{f_n\}$.*

PROP. 5: *Sia φ una funzione a valori reali semicontinua, per esempio superiormente, definita in uno spazio topologico E ; detta $\{D_x\}_{x \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi densi in E ricoprente E , si supponga che per ogni $\alpha \in I$ la restrizione $\varphi|_{D_\alpha}$ sia prolungabile ad una funzione continua φ_α definita in E . In queste ipotesi, la φ è continua, ed è $\varphi = \varphi_\alpha$ per ogni $\alpha \in I$.*

DIM.: Suppongansi esistere $\alpha, \beta \in I$ con $\varphi_\alpha \neq \varphi_\beta$; sia per esempio $\varphi_\alpha(x_0) > \varphi_\beta(x_0)$. Dalla continuità delle due funzioni segue allora l'esistenza di un intorno U di x_0 tale che per $x', x'' \in U$ è $\varphi_\alpha(x') > > \varphi_\beta(x'') + \eta$ con opportuno $\eta > 0$. In ogni punto x_β di $D_\beta \supset U$ si ha $\varphi(x_\beta) = \varphi_\beta(x_\beta)$; inoltre, per la supposta semicontinuità (in x_β) della φ , si ha, in un opportuno intorno $V (\subset U)$ di x_β :

$$\varphi(x) < \varphi(x_\beta) + \eta = \varphi_\beta(x_\beta) + \eta < \varphi_\alpha(x),$$

il che contraddice all'esistenza in V di punti di D_α , nei quali il valore della φ coincide per ipotesi con quello della φ_α .

⁴⁾ Parlando di spazi compatti, non intendiamo limitarci agli spazi di Hausdorff (anche se poi quello che interviene nel Teorema lo è).

Le funzioni continue φ_α ($\alpha \in I$) coincidono dunque tutte e, tenuto conto del fatto che è $\bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha = E$, la φ coincide con esse.

La proposizione ora dimostrata verrà utilizzata nelle condizioni seguenti: E è un gruppo abeliano topologico, D_0 è un suo sottogruppo denso in E , D_α (per ogni $\alpha \in E$) sono le classi laterali di E rispetto a D_0 (cfr. prop. 7).

PROP. 6 (*Teorema del Dini*): Se $\{f_n\}$ è una sua successione monotona di funzioni continue a valori reali definite in uno spazio compatto e convergente puntualmente verso una funzione f continua, la convergenza della successione verso la f è uniforme.

2. - Detto G un gruppo abeliano topologico e G_0 un suo sottogruppo, indicheremo con G_α ($\alpha \in G$) le classi laterali rispetto a G_0 ; ossia $G_\alpha = \alpha + G_0$.

PROP. 7: Se, nelle condizioni ora dette, G_0 è denso in G ⁵⁾, anche ogni classe G_α è densa in G .

Se \mathfrak{F} è un filtro su un gruppo abeliano topologico G , indichiamo con $\alpha + \mathfrak{F}$ (quale che sia $\alpha \in G$) il filtro $\{\alpha + F : F \in \mathfrak{F}\}$; ovvio sarà poi il significato del simbolo $-\mathfrak{F}$. Evidentemente, l'essere β aderente ad \mathfrak{F} equivale all'essere $-\beta$ aderente a $-\mathfrak{F}$ e all'essere $\alpha + \beta$ aderente ad $\alpha + \mathfrak{F}$. In particolare, se α è il filtro associato ad una successione $\{\alpha_k\}$ di punti di G , $x + \alpha$ e $-\alpha$ sono i filtri associati rispettivamente alle successioni $\{x + \alpha_k\}$ e $\{-\alpha_k\}$.

Se f è un'applicazione di un gruppo abeliano topologico G in un insieme E' (in particolare, una funzione a valori reali), per ogni $\alpha \in G$ chiamiamo α -traslata della f la f_α definita da

$$f_\alpha(x) = f(x - \alpha).$$

La proposizione seguente è un corollario immediato delle prop. 3 e 7.

PROP. 8: Siano f, g due applicazioni continue di un gruppo abeliano topologico G in uno spazio di Hausdorff E' ; sia G_0 un sottogruppo denso di G e si supponga che la restrizione $g|_{G_0}$ sia

⁵⁾ Ossia se è $\overline{G_0} = G$; non usiamo qui la parola *denso* col significato del « *relatively dense* ».

la c -traslata, con $c \in G_0$, della $f|_{\sigma_0}$. Allora anche la g è la c -traslata della f .

3. — Richiamo infine alcune proposizioni sulle funzioni quasi-periodiche.

Detto G un gruppo abeliano topologico ⁶⁾, sia T l'insieme delle funzioni (a valori reali) quasi-periodiche definite in G , e come distanza di due funzioni $f, g \in T$ si assuma $\sup_{x \in G} |f(x) - g(x)|$.

Nello spazio metrico così ottenuto, per ogni f il sottospazio $T_f = \{f_x : x \in G\}$ è precompatto (= totally bounded) ⁷⁾. Diciamo che una successione $\{\alpha_x\}$ di elementi di G è *regolare rispetto alla f* se la $\{f_{\alpha_x}\}$ è una successione di Cauchy. Essendo che in uno spazio metrico precompatto ogni successione ammette una sottosuccessione di Cauchy, possiamo formulare la seguente fondamentale constatazione.

PROP. 9: *Se f è quasi-periodica, ogni successione di elementi di G ammette una sottosuccessione regolare per la f .*

Mediante un procedimento di tipo « diagonale » si giunge poi al seguente (apparente) rafforzamento della prop. 9.

PROP. 10: *Se $\{f^i : i \in I\}$ è una famiglia numerabile di funzioni quasi-periodiche su G , ogni successione di elementi di G ammette una sottosuccessione la quale è regolare per ciascuna delle f^i .*

È poi ben noto il fatto seguente.

PROP. 11: *Lo spazio T è completo ⁸⁾; dunque, se f è quasi-periodica e se $\{\alpha_x\}$ è regolare per essa, anche la funzione-limite delle sue α_x -traslate è quasi-periodica.*

Ogni gruppo topologico G ammette una « rappresentazione compatta massimale » (\widehat{G}, ρ) : esiste cioè un gruppo topologico compatto \widehat{G} ed una rappresentazione (= omomorfismo continuo)

⁶⁾ Che il gruppo topologico G sia abeliano è inessenziale ai fini di tutti i risultati qui richiamati e dello stesso teorema di AMERIO; senonché il prescindere dall'ipotesi commutativa darebbe qualche fastidio con l'obbligare, almeno a priori, a distinguere fra quasi-periodicità a destra e a sinistra. Cfr. ad es. E. M. ALFSEN e P. HOLM [1].

⁷⁾ Questa proprietà è contenuta nella definizione (o criterio) di BOCHNER. Cfr. ad es. L. H. LOOMIS [5], pag. 165.

⁸⁾ Vedi ad es. L. H. LOOMIS [5], pag. 166.

$\varrho: G \rightarrow \widehat{G}$ tale che ogni rappresentazione $\xi: G \rightarrow G'$ con G' gruppo topologico compatto si fattorizzi in unico modo attraverso la ϱ (ossia, esista una e una sola $\xi': \widehat{G} \rightarrow G'$ tale che $\xi = \xi' \circ \varrho$).

L'importanza di questo risultato ai nostri fini appare dalla

PROP. 12: *Una funzione f a valori reali definita in un gruppo topologico G è quasi-periodica se e solo se esiste una funzione \widehat{f} continua definita in \widehat{G} tale che sia $\widehat{f} \circ \varrho = f$ *)*.

Se il gruppo topologico G è tale che per ogni coppia x_1, x_2 di suoi elementi distinti esiste una funzione quasi-periodica f per la quale è $f(x_1) \neq f(x_2)$, allora è manifesto che l'applicazione ϱ è biunivoca fra G e $\varrho(G)$. Tale è il caso del gruppo additivo R dei numeri reali dotato della topologia ordinaria: posto $\varrho(R) = R_0 \subset \widehat{R}$, R_0 come gruppo è isomorfo ad R , ed è dotato di una topologia più grossa di quella di R . Più precisamente ¹⁰⁾, la struttura uniforme del gruppo topologico R_0 è precompatta, ed R ne è il completamento.

TEOREMA

Sia $\{f_n\}$ una successione non-crescente di funzioni quasi-periodiche equilimitate inferiormente, f la sua funzione-limite. Per ogni successione $\alpha = \{\alpha_k\}$ di numeri reali regolare per tutte le f_n , posto $f_{n,\alpha_k}(x) = f_n(x - \alpha_k)$, si indichi con $f_{n,\alpha}$ la funzione-limite (che è quasi-periodica) della $\{f_{n,\alpha_k}\}_{k=1,2,\dots}$.

In questa situazione, se per ogni successione α regolare per tutte le f_n la funzione f_α è definita da

$$f_\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,\alpha}(x)$$

è quasi-periodica, allora la convergenza di $\{f_{n,\alpha}\}$ verso f_α è uniforme per ogni α regolare. In particolare — essendo che la successione nulla è, in ogni caso, regolare — la $\{f_n\}$ converge uniformemente verso la f .

*) Questi risultati risalgono sostanzialmente, almeno per il caso dei gruppi abeliani localmente compatti, a A. WEIL [6]. Per una loro esposizione nelle ipotesi più larghe vedi ancora E. M. ALFSEN e P. HOLM [1].

¹⁰⁾ Vedasi E. M. ALFSEN e P. HOLM [1].

DIMOSTRAZIONE.

La quasi-periodicità delle funzioni $f_n, f, f_{n,\alpha_k}, f_{n,\alpha}, f_\alpha$ implica (prop. 12 e osservazione che la segue) l'esistenza di funzioni $\widehat{f}_n, \widehat{f}, \widehat{f}_{n,\alpha_k}, \widehat{f}_{n,\alpha}, \widehat{f}_\alpha$ che le prolungano con continuità ad \widehat{R}^{11} . Le \widehat{f}_{n,α_k} sono le α_k -traslate delle \widehat{f}_n poichè le loro restrizioni f_{n,α_k} ad R_0 lo sono delle f_n (prop. 8).

Indichiamo con A_n ($n = 1, 2, \dots$) l'insieme delle successioni di numeri reali che sono regolari per la f_n , e sia $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Ogni successione di numeri reali ammette una sottosuccessione appartenente ad A (prop. 10).

Per ogni successione a , la compattezza di \widehat{R} assicura l'esistenza di almeno un punto α (in generale non reale) aderente ad a ; allora, quale che sia $t \in \widehat{R}$, il punto $t - \alpha$ è aderente alla successione $t - a$.

Indicando con $\widehat{f}_{n,\alpha}$, per ogni α di \widehat{R} , la α -traslata della \widehat{f}_n , proviamo che se è $\alpha \in A_n$, per ogni α aderente ad a si ha $\widehat{f}_{n,\alpha} = \widehat{f}_{n,\alpha}$. All'uopo, accertiamo che ogni \widehat{f}_n si trova, in relazione ad ogni $\alpha \in A_n$, nelle condizioni previste dalla prop. 2. Per ipotesi esiste, per ogni x reale, $\lim_{x \rightarrow \alpha} f_n$, che è $f_{n,\alpha}(x)$; dunque anche esiste (prop. 1) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \widehat{f}_n$ ed è $\widehat{f}_{n,\alpha}(x)$ ($= f_{n,\alpha}(x)$). Inoltre, la \widehat{f}_n è continua. Ne viene (prop. 2) $\widehat{f}_{n,\alpha}(x) = \widehat{f}_{n,\alpha}(x)$ per ogni $x \in R_0$. Dalla densità di R_0 in \widehat{R} e dalla continuità delle due funzioni si deduce poi (prop. 3) che l'uguaglianza stessa sussiste in tutto \widehat{R} .

La successione $\{\widehat{f}_n\}$ è, al pari della $\{f_n\}$, non-crescente (prop. 4) e inferiormente limitata da una costante. Lo stesso vale manifestamente per la successione $\{\widehat{f}_{n,\alpha}\}$ che si ottiene, come si è visto, dalla $\{\widehat{f}_n\}$ mediante una α -traslazione.

Esistono dunque in \widehat{R} le funzioni-limite

$$\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n(t), \quad \varphi_\alpha(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_{n,\alpha}(t)$$

¹¹) Data la corrispondenza biunivoca (che è anche isomorfismo di gruppo) fra R ed R_0 ($\subset R$), indichiamo col medesimo simbolo una funzione definita in R e « la medesima pensata su R_0 ». Poichè tuttavia la topologia di R è (strettamente) più fine di quella di R_0 , il termine *prolungamento* che usiamo è alquanto improprio; comunque, il significato ne è chiaro e non può nascerne equivoco.

le quali, in quanto limiti di successioni non-crescenti, sono semi-continue superiormente. Essendosi provato che ogni $\widehat{f}_{n,\alpha}$ (con $\alpha \in \mathbf{A}$) è la α -traslata di \widehat{f}_n (per ogni α aderente ad \mathbf{a}), lo stesso fatto sussiste per le funzioni-limite; si ha $\varphi_\alpha(t) = \varphi(t - \alpha)$ per ogni $t \in \widehat{R}$.

Passiamo ora ad accertare la continuità della φ ; ne seguirà facilmente la tesi.

All'uopo proviamo dapprima che la restrizione della φ ad $R_{-\alpha}$ coincide con la restrizione della $(\widehat{f}_\alpha)_{-\alpha}$, ossia che si ha

$$\varphi|_{R_{-\alpha}} = (\widehat{f}_\alpha)_{-\alpha}|_{R_{-\alpha}}$$

[con la solita notazione per le traslate: $(\widehat{f}_\alpha)_{-\alpha}(t) = \widehat{f}_\alpha(t + \alpha)$].

Si ha infatti per ogni x reale, ossia per $x - \alpha \in R_{-\alpha}$:

$$\varphi(x - \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n(x - \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_{n,\alpha}(x) = \widehat{f}_\alpha(x) = (\widehat{f}_\alpha)_{-\alpha}(x - \alpha).$$

Dunque: su ogni classe laterale $R_{-\alpha}$ la φ ha una restrizione prolungabile con continuità ad \widehat{R} . In virtù della prop. 5 possiamo concludere che la φ è continua; ed essendo $\varphi|_{R_0} = \widehat{f}|_{R_0}$, attesa la densità di R_0 in \widehat{R} si ha

$$\varphi = \widehat{f}.$$

Alla successione monotona $\{\widehat{f}_n\}$ di funzioni continue sul compatto, avente come limite la funzione continua φ , è applicabile il teorema del Dini (prop. 6): la convergenza della successione è uniforme in \widehat{R} .

Restringendoci, infine, al campo reale R_0 e tenuto conto che è $\widehat{f}_n|_{R_0} = f_n$, $\varphi|_{R_0} = f$, si ha che la $\{f_n\}$ converge uniformemente alla f . E ancora, dall'essere le $\widehat{f}_{n,\alpha}$ e la φ_α le α -traslate rispettivamente delle f_n e della φ si deduce la convergenza uniforme di $\{f_{n,\alpha}\}$ verso la φ_α ; in particolare, restringendoci ad R_0 , di $\{f_{n,\alpha}\}$ verso la $f_\alpha (= \varphi_\alpha|_{R_0})$.

OSSERVAZIONE.

L'enunciato e la dimostrazione del Teorema conservano validità per il caso di funzioni quasi-periodiche definite su un gruppo

topologico affatto arbitrario: nel caso abeliano la dimostrazione non abbisogna di alcuna modifica, mentre nel caso generale occorrono leggere modifiche, comunque ovvie e di natura esclusivamente espositiva. Va comunque notato che anche la dimostrazione data da Amerio è sostanzialmente valida per il detto caso generale.

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. M. ALFSEN e P. HOLM: *A note on compact representations and almost periodicity in topological groups*. Math. Scandinavica 10, p. 127-136 (1962).
- [2] L. AMERIO: *Quasi-periodicità degli integrali ad energia limitata dell'equazione delle onde, con termine noto quasi-periodico* (Note I, II, III). Rend. Accad. Naz. Lincei, serie VIII, vol. XXVIII (1960), fasc. 2, p. 147-152; fasc. 3, p. 1-6; fasc. 4, p. 1-6.
(Per i nostri scopi, interessa esclusivamente la Nota II).
- [3] S. BOCHNER: *Uniform convergence of monotone sequences of functions*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 47 (1961), p. 582-585.
- [4] N. BOURBAKI: *Topologie générale, chap. I, II*. 3^{ème} édition. Hermann, Act. Scient. Ind. n. 1142. Paris, 1951.
- [5] L. H. LOOMIS: *An introduction to Abstract Harmonic Analysis*. Van Nostrand, New York, 1953.
- [6] A. WEIL: *Sur les fonctions presque périodiques de von Neumann*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 200 (1935), p. 38.
- [7] A. WEIL: *L'intégration dans les groupes topologiques*, 2^{ème} édition (Hermann, Act. Scient. Ind. 1145). Paris, 1953.