RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELLA CORSI

Sui sistemi minimi di assiomi atti a definire un piano grafico finito

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 34 (1964), p. 160-175

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1964__34__160_0>

SUI SISTEMI MINIMI DI ASSIOMI ATTI A DEFINIRE UN PIANO GRAFICO FINITO

Nota *) *di* GABRIELLA CORSI (*a Firenze*) **)

1. - Data una struttura S, formata da due insiemi disgiunti P e R, i cui elementi chiameremo rispettivamente « punti » e « rette », e da una relazione di « incidenza », definita in $P \times R$, è noto che le condizioni:

(1)
1. In R si hanno esattamente $n^2 + n + 1$ rette;
2. In P si hanno esattamente $n^2 + n + 1$ punti;
3. Ogni retta è incidente esattamente a $n + 1$ punti;
4. Ogni punto è incidente esattamente a $n + 1$ rette;
5. Vi è esattamente una retta incidente a due punti distinti;
6. Vi è esattamente un punto incidente a due rette distinte

con $n \geqslant 2$, sono necessarie e sufficienti affinchè S sia un piano grafico finito di ordine n. Le condizioni del sistema (1) però non sono tutte indipendenti e A. Barlotti ha determinato tutti i sottosistemi « completi minimi » [1]) del sistema considerato.

---

*) Pervenuta in redazione il 31 marzo 1963.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università di Firenze.
**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematica del C. N. R.

1) Vedi: [1] A. BARLOTTI: *Un'osservazione sulle proprietà che caratterizzano un piano grafico finito*. Boll. U.M.I. Serie III, anno XVII, n. 4 (1962), pp. 394-98.

Analogamente può essere utile determinare i sottosistemi « completi minimi » del sistema (2) formato dalle condizioni $1^2, \dots, 6^2$, che si ottengono dalle $1, \dots, 6$, sostituendo la parola « esattamente » con « al più », e dalle condizioni $1^3, \dots, 6^3$, che si ottengono dalle $1, \dots, 6$, sostituendo « esattamente » con « almeno ».

Seguendo una notazione simile a quella usata da A. Barlotti, indicheremo i sottosistemi del sistema (2) mediante le matrici $\begin{pmatrix} 1^{\lambda_1} & 3^{\lambda_3} & 5^{\lambda_5} \\ 2^{\lambda_2} & 4^{\lambda_4} & 6^{\lambda_6} \end{pmatrix}$ dove $\lambda_i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ $(i = 1, \dots, 6)$, con la convenzione che, se $\lambda_i = 0$, la condizione i è soppressa; se $\lambda_i = 1$, valgono entrambe le condizioni i^2 e i^3 (cioè vale la condizione i del sistema (1)).

Dimostreremo che *tutti e soli i sottosistemi completi minimi del sistema* (2) *sono i seguenti*:

$$
\begin{array}{llllll}
\mathrm{I} & \begin{pmatrix} 1^3 & 3^3 & 5^2 \\ 2^2 & - & - \end{pmatrix}; & \mathrm{II} & \begin{pmatrix} 1^3 & 3^3 & - \\ 2^2 & - & 6^2 \end{pmatrix}; & \mathrm{III} & \begin{pmatrix} 1^3 & 3^3 & 5^3 \\ - & 4^2 & 6^2 \end{pmatrix}; \\
\mathrm{I}' & \begin{pmatrix} 1^2 & - & - \\ 2^3 & 4^3 & 6^2 \end{pmatrix}; & \mathrm{II}' & \begin{pmatrix} 1^2 & - & 5^2 \\ 2^3 & 4^3 & - \end{pmatrix}; & \mathrm{III}' & \begin{pmatrix} - & 3^2 & 5^2 \\ 2^3 & 4^3 & 6^3 \end{pmatrix}; \\
\mathrm{IV} & \begin{pmatrix} 1^2 & 3^2 & 5^3 \\ 2^3 & - & - \end{pmatrix}; & \mathrm{V} & \begin{pmatrix} - & 3^2 & 5^3 \\ 2^3 & 4^2 & 6^3 \end{pmatrix}; & \mathrm{VI} & \begin{pmatrix} 1^3 & 3^3 & 5^3 \\ 2^3 & 4^2 & - \end{pmatrix}; \\
\mathrm{IV}' & \begin{pmatrix} 1^3 & - & - \\ 2^2 & 4^2 & 6^3 \end{pmatrix}; & \mathrm{V}' & \begin{pmatrix} 1^3 & 3^2 & 5^3 \\ - & 4^2 & 6^3 \end{pmatrix}; & \mathrm{VI}' & \begin{pmatrix} 1^2 & 3^2 & - \\ 2^3 & 4^3 & 6^3 \end{pmatrix}; \\
\mathrm{VII} & \begin{pmatrix} 1^3 & - & 5 \\ - & 4^2 & 6^3 \end{pmatrix}; & \mathrm{VIII} & \begin{pmatrix} - & 3^3 & 5^3 \\ 2^3 & 4 & 6^2 \end{pmatrix}; & \mathrm{IX} & \begin{pmatrix} 1^3 & 3 & 5^3 \\ - & 4^2 & - \end{pmatrix}; \\
\mathrm{VII}' & \begin{pmatrix} - & 3^2 & 5^3 \\ 2^3 & - & 6 \end{pmatrix}; & \mathrm{VIII}' & \begin{pmatrix} 1^3 & 3 & 5^2 \\ - & 4^3 & 6^3 \end{pmatrix}; & \mathrm{IX}' & \begin{pmatrix} - & 3^2 & - \\ 2^3 & 4 & 6^3 \end{pmatrix}; \\
\mathrm{X} & \begin{pmatrix} - & 3 & 5^3 \\ 2^3 & 4^2 & - \end{pmatrix}; & \mathrm{XI} & \begin{pmatrix} 1^3 & 3 & 5 \\ - & - & 6^3 \end{pmatrix}; & \mathrm{XII} & \begin{pmatrix} 1^3 & 3 & 5^3 \\ - & - & 6 \end{pmatrix}; \\
\mathrm{X}' & \begin{pmatrix} 1^3 & 3^2 & - \\ - & 4 & 6^3 \end{pmatrix}; & \mathrm{XI}' & \begin{pmatrix} - & - & 5^3 \\ 2^3 & 4 & 6 \end{pmatrix}; & \mathrm{XII}' & \begin{pmatrix} - & - & 5 \\ 2^3 & 4 & 6^3 \end{pmatrix}; \\
\mathrm{XIII} & \begin{pmatrix} 1 & 3^3 & 5^2 \\ - & 4^3 & - \end{pmatrix}; & \mathrm{XIV} & \begin{pmatrix} 1 & 3^3 & - \\ - & 4^3 & 6^2 \end{pmatrix}; & \mathrm{XV} & \begin{pmatrix} 1^3 & 3^3 & 5 \\ - & 4^2 & - \end{pmatrix}; \\
\mathrm{XIII}' & \begin{pmatrix} - & 3^3 & - \\ 2 & 4^3 & 6^2 \end{pmatrix}; & \mathrm{XIV}' & \begin{pmatrix} - & 3^3 & 5^2 \\ 2 & 4^3 & - \end{pmatrix}; & \mathrm{XV}' & \begin{pmatrix} - & 3^2 & - \\ 2^3 & 4^3 & 6 \end{pmatrix};
\end{array}
$$

$$\text{XVI}\ \begin{pmatrix} 1^3 & - & 5^3 \\ - & 4^2 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{XVII}\ \begin{pmatrix} 1 & 3^3 & 5 \\ - & - & - \end{pmatrix}; \quad \text{XVIII}\ \begin{pmatrix} 1 & - & 5^2 \\ - & 4 & 6^3 \end{pmatrix};$$

$$\text{XVI}'\ \begin{pmatrix} - & 3^2 & 5 \\ 2^3 & - & 6^3 \end{pmatrix}; \quad \text{XVII}'\ \begin{pmatrix} - & - & - \\ 2 & 4^3 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{XVIII}'\ \begin{pmatrix} - & 3 & 5^3 \\ 2 & - & 6^2 \end{pmatrix};$$

$$\text{XIX}\ \begin{pmatrix} 1 & 3^3 & 5^3 \\ - & - & 6^2 \end{pmatrix}; \quad \text{XX}\ \begin{pmatrix} - & 3^3 & 5 \\ 2^3 & 4 & - \end{pmatrix}; \quad \text{XXI}\ \begin{pmatrix} 1 & - & - \\ - & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{XIX}'\ \begin{pmatrix} - & - & 5^2 \\ 2 & 4^3 & 6^3 \end{pmatrix}; \quad \text{XX}'\ \begin{pmatrix} 1^3 & 3 & - \\ - & 4^3 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{XXI}'\ \begin{pmatrix} - & 3 & 5 \\ 2 & - & - \end{pmatrix}.$$

2. - Vogliamo anzitutto dimostrare che i sistemi I, ..., XXI (e di conseguenza i loro duali I', ..., XXI') sono completi.

Indichiamo con x l'ordine di P, con y l'ordine di R, con P_1, P_2, ..., P_x gli elementi di P e con R_1, R_2, ..., R_y gli elementi di R. Indichiamo inoltre con r_i il numero delle rette incidenti al punto P_i ($i = 1, ..., x$) e con p_k ($k = 1, ..., y$) il numero dei punti incidenti alla retta R_k. In ogni caso avremo:

$$\sum_{i=1}^{x} r_i = \sum_{k=1}^{y} p_k . \tag{3}$$

Infatti contare tutte le rette incidenti a tutti i vari punti di P è lo stesso che contare ogni retta di R, tante volte quanti sono i punti ad essa incidenti.

Prendiamo ora in considerazione il sistema I: poichè valgono 1^2 e 3^3, P non può essere vuoto. Fissato allora un $P_i \in P$, per 5^2, ci sarà in P un certo numero s_{i1} di punti che giacciono su una retta incidente a P_i, e un certo numero s_{i0} di punti che non giacciono su alcuna retta incidente a P_i, cioè sarà:

$$s_{i1} + s_{i0} = x - 1 \tag{4}$$

e per 2^2

$$s_{i1} \leqslant n^2 + n - s_{i0} . \tag{5}$$

Indichiamo con $R_{i,1}$, $R_{i,2}$, ..., R_{i,r_i} le rette incidenti a P_i:

contando tutti i loro punti avremo:

$$p_{i,1} + p_{i,2} + \dots + p_{i,r_i} = r_i + s_{i1} \tag{6}$$

perchè il punto P_i sarà stato contato r_i volte. Di qui per la 3ª:

$$s_{i1} = p_{i,1} + p_{i,2} + \dots + p_{i,r_i} - r_i \geqslant r_i(n+1) - r_i = r_i n$$

cioè, per la (4):

$$r_i \leqslant \frac{x - 1 - s_{i0}}{n} \tag{7}$$

ovvero, per la (5):

$$r_i \leqslant n + 1 - \frac{s_{i0}}{n}. \tag{7'}$$

Avremo allora:

$$\sum_{i=1}^{x} r_i \leqslant x(n+1) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{x} s_{i0}$$

e, per la 2ª:

$$x(n+1) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{x} s_{i0} \leqslant (n^2+n+1)(n+1) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{x} s_{i0}$$

D'altra parte, per la 3ª e la 1ª:

$$\sum_{k=1}^{y} p_k \geqslant y(n+1) \geqslant (n^2+n+1)(n+1). \tag{8}$$

Dunque, tenendo conto della (3), abbiamo:

$$(n^2+n+1)(n+1) \leqslant y(n+1) \leqslant \sum_{i=1}^{x} r_i \leqslant x(n+1) -$$
$$- \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{x} s_{i0} \leqslant (n^2+n+1)(n+1) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{x} s_{i0}.$$

Allora, poichè gli s_{i0} $(i = 1, \dots, x)$ sono interi non negativi, deve essere $s_{i0} = 0$. Di conseguenza risulta $x = n^2 + n + 1$,

$y = n^2 + n + 1$, $\sum_{i=1}^{n^2+n+1} r_i = (n+1)(n^2+n+1)$ e, dalla (7′), $r_i \leqslant n+1$, cioè $r_i = n+1$.

Perciò, dato che P_i non è un punto particolare, valgono le condizioni 1, 2, 4, 5 e quindi [1]) il sistema I risulta completo. Osserviamo che, in ogni caso, le condizioni 5^2 e 6^2 si implicano a vicenda e quindi dalla completezza del sistema I discende immediatamente la completezza del *sistema II*. In modo analogo la completezza dei sistemi XIV, XIX, III, VIII, XII, XVI, XVIII si potrà dedurre rispettivamente da quella dei sistemi XIII, XVII, XV, XX, XI, VII, XXI.

Per il *sistema XIII*, poichè valgono la 5^2 e la 3^3, possiamo ancora scrivere la (4), la (6) e la (7). Inoltre, poichè valgono la 3^3 e la 1, la (8) è verificata a maggior ragione. Pertanto, sempre in base alla (3), deve essere

$$(n^2+n+1)(n+1) \leqslant \frac{x(x-1)}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{x} s_{i0}$$

cioè, dato che gli s_{i0} sono non negativi:

$$x(x-1) - n(n+1)(n^2+n+1) \geqslant 0 .$$

Ma l'espressione considerata assume valori non negativi esternamente all'intervallo aperto $-n(n+1)$, n^2+n+1, onde deve essere $x \geqslant n^2+n+1$, cioè è soddisfatta la condizione 2^3. Quindi la completezza del sistema XIII si può dedurre da quella del sistema II′.

Quanto *al sistema XVII*, notiamo anzitutto che, per le condizioni 1^3, 3^3, 5, in esso contenute, esistono punti e, fissato un qualunque punto $P_i \in P$, esiste almeno una retta $R_k \in R$ non incidente a P_i. Infatti, sopponiamo per assurdo che tutte le rette di R siano incidenti a P_i. Per la 1^3 esistono almeno due rette distinte R_j, R_h; per la 3^3 esistono almeno due punti P_j e P_h, distinti da P_i e incidenti rispettivamente a R_j e R_h; infine

---

[1]) Vedi A. Barlotti [1].

per la 5 P_j e P_h sono distinti tra loro ed esiste una retta R_k, distinta da R_j e R_h, che li contiene. Ma R_k, come tutte le rette di R, deve contenere anche P_i e quindi, per le coppie di punti P_j, P_i, e P_h, P_i risulta contraddetta la condizione 5.

D'altra parte, fissato un punto P_i, se R_k è una retta che non lo contiene, per la 5 e la 3^3 deve essere

$$r_i \geqslant p_k \geqslant n + 1 .$$

Ma, per quanto detto sopra, P_i è un punto generico e quindi è soddisfatta la condizione 4^3. Pertanto possiamo riferirci al caso del sistema XIII, sopra considerato.

Consideriamo ora il *sistema IV*. Fissato un punto $P_i \in P$ indichiamo con s_{ih} il numero dei punti di P, incidenti ad h rette incidenti a P_i. Per 5^3, $h = 1, 2, \dots, t$ e:

$$s_{i1} + s_{i2} + \dots + s_{it} = x - 1 \tag{9}$$

Cioè per 2^3:

$$s_{i1} + s_{i2} + \dots + s_{it} \geqslant n^2 + n . \tag{10}$$

Siano ora $R_{i,1}, R_{i,2}, \dots, R_{i,r_i}$ le rette incidenti a P_i; contando tutti i loro punti veniamo a contare r_i volte il punto P_i e h volte i punti che sono congiunti a P_i da h rette; cioè avremo:

$$p_{i,1} + p_{i,2} + \dots + p_{i,r_i} = r_i + s_{i1} + 2s_{i2} + \dots + ts_{it} \tag{11}$$

e quindi per la (10):

$$p_{i,1} + p_{i,2} + \dots + p_{i,r_i} - r_i \geqslant n^2 + n + s_{i2} + 2s_{i3} + \dots + (t-1)s_{it} .$$

Inoltre per la 3^2 deve essere

$$(n+1)r_i - r_i \geqslant p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{ir_i} - r_i$$

cioè

$$r_i \geqslant n + 1 + \frac{1}{n}(s_{i2} + 2s_{i3} + \dots + (t-1)s_{it}) . \tag{12}$$

Posto $s_{i2} + 2s_{i3} + \ldots + (t-1)s_{it} = \alpha_i$ e tenuto conto di 2^3, avremo allora:

$$\sum_{i=1}^{x} r_i \geqslant x(n+1) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{x}\alpha_i \geqslant (n^2+n+1)(n+1) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{x}\alpha_i .$$

D'altra parte per 3^2 e 1^2:

$$\sum_{k=1}^{y} p_k \leqslant y(n+1) \leqslant (n^2+n+1)(n+1)$$

cioè per la (3)

$$(n^2+n+1)(n+1) \geqslant y(n+1) \geqslant \sum_{i=1}^{x} r_i \geqslant x(n+1) + $$
$$+ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{x}\alpha_i \geqslant (n^2+n+1)(n+1) + \sum_{i=1}^{x}\alpha_i$$

Poichè gli α_i $(i = 1, \ldots, x)$ debbono essere interi non negativi, dal confronto del primo ed ultimo termine della disuguaglianza, segue $\alpha_i = 0$ e di conseguenza $s_{i2} = s_{i3} = \ldots = s_{it} = 0$ $(i=1, \ldots, x)$. Inoltre avremo $x = y = n^2 + n + 1$ e $\sum_{i=1}^{n^2+n+1} r_i = (n^2+n+1)(n+1)$; di qui poi per la (12) $r_i = n+1$. Anche in questo caso quindi valgono le condizioni 1, 2, 4, 5 e pertanto il sistema risulta completo.

Anche nel ***sistema V*** sono contenute le condizioni 2^3 3^2 5^3 e quindi sono ancora soddisfatte le relazioni (9), (10), (11), (12). Ma ora, per la 4^2, deve essere $r_i \leqslant n+1$ onde risulta $r_i = n+1$ $(i = 1, \ldots, x)$ e $s_{i2} = s_{i3} = \ldots = s_{it} = 0$, per ogni punto $P_i \in P$; cioè valgono le condizioni 4 e 5. Inoltre dalla (11) abbiamo:

$$p_{i,1} + p_{i,2} + \ldots + p_{i,n+1} = n + 1 + x - 1$$

cioè per 3^2 e 2^3

$$(n+1)^2 \geqslant p_{i,1} + p_{i,2} + \ldots + p_{i,n+1} = n + x \geqslant (n+1)^2$$

Quindi $x = n^2 + n + 1$, $p_{i,1} + p_{i,2} + \dots + p_{i,n+1} = (n+1)^2$ e da questa, sempre per la 3^2: $p_{i,1} = p_{i,2} = \dots = p_{i,n+1} = n+1$. Osserviamo ora che, se in R esiste più di una retta, ogni retta, per la 6^3, deve contenere qualche punto; il caso poi che in R esista un'unica retta priva di punti non può darsi, perchè in contraddizione con 2^3, 5^3.

Dunque la condizione $p_{i,h} = n + 1$ $(i = 1, \dots, n^2 + n + 1;$ $h = 1, \dots, n + 1)$, che abbiamo dimostrato per le rette $R_{i,h}$, contenenti un generico punto $P_i \in P$, vale per tutte le rette di R, cioè vale la condizione 3. Riassumendo, dalle condizioni del sistema V, si deducono la 2, 3 e 5 e quindi [1]) il sistema è completo.

Nel *sistema X* poi sono contenute, come nel precedente, le condizioni 2^3, 3^2, 4^2 5^3, quindi possiamo allo stesso modo dedurre la validità delle condizioni 4 e 5. Pertanto in questo caso risultano verificate la 3, 4 e 5 e, per la 2^3, l'insieme S non è vuoto, onde [1]) il sistema X è completo.

Per il *sistema IX*, tenendo conto della relazione (3) e delle condizioni 1^3, 3, 4^2, in esso contenute, possiamo scrivere:

$$(13)\quad x(n+1) \geqslant \sum_{i=1}^{x} r_i = \sum_{h=1}^{y} p_h = y(n+1) \geqslant (n^2+n+1)(n+1)$$

cioè deve valere la condizione 2^3. Ma questa ci riporta al caso del precedente sistema X.

Analogamente, per il *sistema VI*, date le condizioni 1^2, 2^2, 3^2, 4^2 e, tenuto conto della (3), possiamo scrivere

$$(14)\quad \begin{aligned}(n^2+n+1)(n+1) \leqslant y(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{y} p_k = \\ = \sum_{i=1}^{x} r_i \leqslant (n+1)x \leqslant (n+1)(n^2+n+1)\end{aligned}$$

da cui $x = y = n^2 + n + 1$, cioè valgono le condizioni 1 e 2.

---

[1]) Vedi A. Barlotti [1].

Inoltre, sempre dalla (14) ricaviamo:

$$\sum_{k=1}^{n^2+n+1} p_k = \sum_{i=1}^{n^2+n+1} r_i = (n + 1)(n^2 + n + 1)$$

cioè, per la 3^3 e la 4^2, valgono la 3 e la 4. Pertanto possiamo ricondurci al caso del sistema IV.

Consideriamo ora il *sistema XV*. Per le condizioni 1^3 e 3^3, in esso contenute, l'insieme P non è vuoto e, se P_i e R_k sono un punto e una retta non incidenti, deve essere, per la 5, $r_i \geqslant p_k$, da cui, tenendo conto di 3^3 e 4^2:

$$n + 1 \geqslant r_i \geqslant p_k \geqslant n + 1 \tag{15}$$

cioè $r_i = p_k = n + 1$. Ma, per la 1^3 e la 4^2, le rette non possono passare tutte per uno stesso punto P_i; onde, fissato un punto P_i, esiste sempre una retta R_k che non lo contiene. Viceversa, fissata una retta R_k, esiste almeno un punto P_i, fuori di essa, perchè, se tutti i punti di P fossero sulla R_k, per la 5^2 le altre rette conterrebbero al più un punto, contro la 3^3. Pertanto in questo caso debbono essere soddisfatte le condizioni 3, 4, 5 e, poichè l'insieme S non è vuoto, il sistema è completo [1]).

La relazione (15) può essere scritta anche per il *sistema XX*, dato che anch'esso contiene le condizioni 3^3, 4^2, 5. Inoltre possiamo ancora dire che, fissato un punto $P_i \in P$, esiste una retta $R_k \in R$, ad esso non incidente; infatti per la 2^3 e la 4^3 l'insieme R non è vuoto e, se tutte le rette fossero incidenti a P_i, per la 4 in R si avrebbero esattamente $n + 1$ rette. Ma allora, sempre per la 4, ciascuna di tali rette dovrebbe contenere tutti i punti di P, e, poichè questi sono più di due (da 2^3 e $n \geqslant 2$), per la 5, tutte queste rette coinciderebbero in un'unica retta, in contraddizione con la 4. Viceversa, fissata una retta R_k, esiste un punto P_i, fuori di essa, per la 3^3 e la 4. Quindi, analogamente al caso precedente, possiamo concludere che, essendo soddisfatte le condizioni 3, 4, 5 ed essendo S non vuoto, il sistema è completo [1]).

---

[1]) Vedi A. Barlotti [1].

Dalle condizioni 5 e 6^3, contenute nel ***sistema VII***, segue immediatamente la 6. Quindi, fissata una retta R_h, tutte le altre debbono incontrarla in un punto, cioè, se con $P_{h,1}, P_{h,2}, \dots, P_{h,\nu_h}$ indichiamo i punti di R_h, deve essere:

$$r_{h,1} + r_{h,2} + \dots + r_{h,\nu_h} - p_h = y - 1 .$$

Ma, per la 1^3, $y \geqslant n^2 + n + 1$ e, per la 4^2, $r_i \leqslant n + 1$, onde abbiamo:

$$p_h(n + 1) - p_h \geqslant n^2 + n$$

cioè $p_h \geqslant n + 1$. Pertanto è soddisfatta la condizione 3^3 e quindi possiamo dedurre la completezza del sistema VII da quella del sistema XV.

Affinchè la struttura S associata al ***sistema XI*** sia un piano grafico è sufficiente provare l'esistenza di una quaterna di punti, a tre a tre non allineati, perchè in XI sono contenute le condizioni 5 e 6^3 (e quindi la 6). E infatti, con il ragionamento già fatto per il sistema XVII (anche ora valgono le condizioni 1^3, 3^3, 5), si prova che le rette di R non passano tutte per un medesimo punto.

Siano allora R_j, R_h, R_k tre rette non incidenti ad uno stesso punto e siano P_1, P_2, P_3 i tre punti in cui, per la 6, le rette si intersecano a due, a due. Poichè vale la 3^3 (con $n \geqslant 2$), su ciascuna delle tre rette deve esistere almeno un punto distinto da P_1, P_2, P_3. Allora, se P_1, P_2 sono i due punti in cui R_h è intersecata da R_j e R_k, e P_j, P_k sono rispettivamente un punto di R_j e un punto di R_k, distinti da P_1, P_2, P_3, la quaterna P_1, P_2, P_j, P_k è del tipo richiesto. La condizione 3^2, fin qui non usata, è poi necessaria, affinchè S sia di ordine n.

3. - Ci rimane ora da provare che i sistemi del n. 1 sono minimi, e che, tra i sottoinsiemi del sistema (2) non ci sono sistemi completi minimi diversi da quelli considerati. A tale scopo dimostriamo che sono incompleti i seguenti sistemi:

$$A = \begin{pmatrix} 1^2 & 3 & 5 \\ 2^2 & 4 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1^2 & 3 & 5^2 \\ 2 & 4^2 & 6 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5^2 \\ 2^3 & 4^2 & 6 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3^2 & 5 \\ 2^2 & 4^2 & 6 \end{pmatrix};$$

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 3^2 & 5 \\ 2^2 & 4 & 6^2 \end{pmatrix}; \quad C' = \begin{pmatrix} 1^2 & 3^2 & 5 \\ 2 & 4 & 6^2 \end{pmatrix}; \quad D' = \begin{pmatrix} 1^2 & 3^3 & 5 \\ 2 & 4^2 & 6 \end{pmatrix};$$

$$E=\begin{pmatrix}1 & 3^3 & 5^3\\ 2 & 4^3 & 6^3\end{pmatrix};\quad F=\begin{pmatrix}1^3 & 3 & 5^2\\ 2^3 & 4 & 6^2\end{pmatrix};\quad G=\begin{pmatrix}1^3 & 3 & 5\\ 2^3 & 4^3 & 6^2\end{pmatrix};\quad H=\begin{pmatrix}1^3 & 3 & 5^3\\ 2 & 4^3 & 6^3\end{pmatrix};$$

$$G'=\begin{pmatrix}1^3 & 3^3 & 5^2\\ 2^3 & 4 & 6\end{pmatrix};\quad H'=\begin{pmatrix}1 & 3^3 & 5^3\\ 2^3 & 4 & 6^3\end{pmatrix};$$

$$L=\begin{pmatrix}1^2 & 3^3 & 5^3\\ 2 & 4 & 6^3\end{pmatrix};\quad M=\begin{pmatrix}1 & 3^2 & 5^2\\ 2 & 4^2 & 6^2\end{pmatrix};\quad N=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5^2\\ 2^3 & - & 6\end{pmatrix};\quad O=\begin{pmatrix}1 & - & 5\\ 2 & 4^2 & 6^2\end{pmatrix};$$

$$L'=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5^3\\ 2^2 & 4^3 & 6^3\end{pmatrix};\quad N'=\begin{pmatrix}1^3 & - & 5\\ 2 & 4 & 6^2\end{pmatrix};\quad O'=\begin{pmatrix}1 & 3^2 & 5^2\\ 2 & - & 6\end{pmatrix};$$

$$Q=\begin{pmatrix}1 & - & 5^3\\ 2 & 4 & -\end{pmatrix};\quad T=\begin{pmatrix}1 & 3 & -\\ 2 & 4 & -\end{pmatrix};\quad U=\begin{pmatrix}1 & - & 5\\ 2 & - & 6\end{pmatrix};\quad V=\begin{pmatrix}1^3 & 3^3 & 5\\ 2^3 & 4^3 & 6\end{pmatrix}.$$

$$Q'=\begin{pmatrix}1 & 3 & -\\ 2 & - & 6^3\end{pmatrix}.$$

Infatti: nel sistema A non sono postulati nè punti, nè rette; nel sistema B non sono postulate le rette; per gli altri sistemi elencheremo qui sotto esempi di strutture S, che non sono piani grafici, pur soddisfacendo alle condizioni in essi contenute.

C. R è l'insieme delle rette di un piano grafico π di ordine n; P è un insieme finito di punti, che contiene propriamente l'insieme dei punti di π; la relazione di incidenza è quella definita in π (i punti non appartenenti a π non sono incidenti ad alcuna retta).

D. S è costituito da un unico punto e da n^2+n+1 rette ad esso incidenti.

E. P è l'insieme dei punti di un piano grafico π, di ordine n. Fissato un punto $P_1 \in P$, chiamiamo retta ogni insieme formato dai punti di una retta di π e da P_1. Diciamo poi un punto « incidente » ad una retta, quando appartiene all'insieme dei suoi punti.

F. S è l'unione di due piani grafici di ordine n.

G. S è uno spazio grafico di dimensione $d \geqslant 3$ e di ordine n.

H. P è un insieme di n^2+n+1 punti. Fissato un punto $P_1 \in P$, chiamiamo retta ogni insieme costituito da n punti qualunque e da P_1.

La relazione di incidenza coincide con quella di appartenenza

L. P è l'insieme dei punti di un piano grafico π di ordine n. Siano r_1, r_2, r_3 tre rette di π, non appartenenti ad uno stesso fascio e sia P_1 il punto comune a r_1 e r_2; chiamiamo retta: 1°) l'insieme dei punti di una qualunque retta di π, distinta da r_1, r_2, r_3; 2°) l'insieme dei punti di r_1 e r_2; 3°) l'insieme dei punti di r_3 e P_1. La relazione di incidenza coincide ancora con quella di appartenenza.

M. P ed R sono due insiemi di $n^2 + n + 1$ elementi ciascuno; stabiliamo una corrispondenza biunivoca φ fra i due insiemi e facciamo coincidere la relazione di incidenza con φ.

N. P è un insieme di $n(n^2 + n + 1) + 1$ punti. Fissato un punto P_1, suddividiamo i punti rimanenti in n insiemi disgiunti, chiamiamo poi retta ogni insieme costituito da uno di questi insiemi e da P_1. La relazione di incidenza coincide con l'appartenenza.

O. P ed R sono insiemi di $n^2 + n + 1$ elementi ciascuno. Stabiliamo una relazione di incidenza in questo modo: una data retta R_1 di R è incidente a tutti gli $n^2 + n + 1$ punti di P, le altre rette o non sono incidenti ad alcun punto o sono incidenti ad un solo punto, ma sempre in modo che non ci siano più di $n + 1$ rette incidenti ad un punto.

Q. P è l'insieme degli $n^2 + n + 1$ punti $P_1, P_2, \ldots, P_{n^2+n+1}$. Chiamiamo retta ciascuno degli insiemi:

$$(P_1, P_2, \ldots, P_n)(P_{n+1}, \ldots, P_{2n}) \ldots (P_{n^2+1}, \ldots, P_{n^2+n})$$

$$(P_{n^2+n+1}, P_1, \ldots, P_{n-1})(P_n, \ldots, P_{2n-1}) \ldots (P_{n^2}, \ldots, P_{n^2+n-1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(P_{n^2+2}, \ldots, P_{n^2+n+1}, P_1)(P_2, \ldots, P_{n+1}) \ldots (P_{n^2-n+1}, \ldots, P_{n^2+1})$$

e l'insieme di tutti gli $n^2 + n + 1$ punti. La relazione di incidenza coincide con quella di appartenenza.

V. S è un piano grafico di ordine superiore ad n.

Per i sistemi T ed U, vedi [1].

Naturalmente traducendo per dualità gli esempi elencati, si trovano esempi per i sistemi B', C', D', G', H', L' N', O', Q'.

Dall'incompletezza di A abbiamo allora che un sistema completo X deve contenere almeno una delle condizioni 1^a, 2^a; dall'incompletezza di B che X deve contenere una delle condizioni

1^3, 4^3, 5^3; ...; dall'incompletezza di V che X deve contenere almeno una delle condizioni 1^2, 2^2, 3^2, 4^3. Per maggior comodità indichiamo gli insiemi di condizioni, che così si ottengono, con colonne di crocette nella seguente tabella.

	A	B	B'	C	C'	D	D'	E	F	G	G'	H	H'	L	L'	M	N	N'	O	O'	Q	Q'	T	U	V
1^2					X				X	X	X	X						X							X
1^3	X	X					X							X											
2^2				X					X	X	X		X				X								X
2^3	X		X			X									X										
3^2							X	X			X		X	X				X	X		X			X	X
3^3			X		X	X										X		X	X	X	X			X	
4^2						X		X		X		X			X		X			X		X		X	X
4^3		X		X			X									X	X		X	X		X		X	
5^2								X				X	X	X	X							X	X		
5^3		X		X					X		X					X	X			X	X	X	X		
6^2								X				X	X	X	X						X		X		
6^3			X		X				X	X						X		X	X		X	X	X		

Dunque un sistema completo deve contenere almeno una condizione di ciascuna colonna delle tabella.

Consideriamo i sistemi Y tali che:

α) In Y compare almeno una condizione di ogni colonna della tabella.

β) Se n è una condizione contenuta in Y, esiste almeno una colonna della tabella, in cui compare n, ma non compare alcun'altra condizione di Y.

È chiaro che, per la α), ogni sistema completo deve contenere un sistema Y e che, se un sistema Y è esso stesso completo, è anche minimo, perchè, se in esso si sopprime una qualunque condizione, si ottiene, per la β), un sistema non verificante alcuna condizione di una certa colonna della tabella e quindi incompleto. Allora, se tutti i possibili sistemi Y risulteranno completi, essi saranno tutti i sistemi completi minimi contenuti nel sistema (2); pertanto sarà sufficiente al nostro scopo determinare tutti i possibili sistemi Y e verificare che ciascuno di essi coincide con uno dei sistemi, di cui abbiamo dimostrato la completezza nel n. 2.

Nel procedere alla costruzione dei sistemi Y, osserviamo anzitutto che, per la dualità, possiamo limitarci e considerare i sistemi Y in cui compare la condizione 1^3 della colonna A.

Tali sistemi poi, dovendo contenere almeno una condizione di ciascuna delle colonne B', C, debbono contenere uno dei seguenti sistemi.

$$a = \begin{pmatrix} 1^3 & 3^3 & 5^3 \\ - & - & - \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1^3 & 3^3 & - \\ - & 4^3 & - \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 1^3 & 3^3 & - \\ 2^2 & - & - \end{pmatrix};$$

$$d = \begin{pmatrix} 1^3 & - & - \\ 2^2 & - & 6^3 \end{pmatrix}; \quad e = \begin{pmatrix} 1^3 & - & - \\ - & 4^3 & 6^3 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 1^3 & - & 5^3 \\ - & - & 6^3 \end{pmatrix};$$

$$g = \begin{pmatrix} 1^3 & - & - \\ 2 & - & - \end{pmatrix}; \quad h = \begin{pmatrix} 1^3 & - & - \\ 2^3 & 4^3 & - \end{pmatrix}; \quad i = \begin{pmatrix} 1^3 & - & 5^3 \\ 2^3 & - & - \end{pmatrix}.$$

Procediamo ora nel modo seguente: ad ognuno dei sistemi a, b, ... i aggiungiamo successivamente, in tutti i modi possibili, una condizione per ciascuna colonna della tabella, che non sia rappresentata da alcuna condizione nel sistema considerato. Se nell'aggiungere condizioni, per esempio ad a, si ottiene ad un certo punto un sistema Z, nel quale compare qualche condizione n, tale che ogni colonna, che contiene n, contiene anche qualche altra condizione di Z, sopprimiamo la n da F. Il sistema W, che così si ottiene, potrebbe non contenere più a, perchè può darsi che la condizione n soppressa sia una di quelle appartenenti ad a; in tal caso abbandoneremo W, perchè i sistemi Y, che si otterrebbero da esso, non contenendo a, debbono contenere uno dei rimanenti sistemi b, c, ..., i e quindi li troviamo a partire da questi.

Cominciamo col determinare i sistemi Y che contengono a: in a mancano condizioni delle colonne E, G, H, H', L', V, Q'; aggiungiamo allora ad a successivamente una delle condizioni della colonna H; otteniamo i sistemi:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 3^3 & 5^3 \\ - & - & - \end{pmatrix}; \; y = \begin{pmatrix} 1^3 & 3^3 & 5^3 \\ - & 4^2 & - \end{pmatrix}; \; z = \begin{pmatrix} 1^3 & 3^3 & 5 \\ - & - & - \end{pmatrix}; \; u = \begin{pmatrix} 1^3 & 3^3 & 5^3 \\ - & - & 6^2 \end{pmatrix}.$$

In x non ci sono condizioni delle colonne E, H', L', Q': aggiungendo successivamente ad x una delle condizioni della colonna E, otteniamo il sistema:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5^3 \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

ed altri tre sistemi che contengono rispettivamente y, z ed u e che quindi si possono trascurare, perchè i sistemi Y che li contengono si ritroveranno a partire da y, z, u. Analogamente dalla colonna L' dovremo aggiungere ad x_1 solo la condizione 2^3: otteniamo così il sistema:

$$x_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5^3 \\ 2^3 & - & - \end{pmatrix}$$

Tale sistema però va scartato, infatti si debbono sopprimere le condizioni 1^3 e 3^3 (ogni colonna in cui compare una delle due condizioni, contiene anche una delle condizioni 1^2, 2^3, 3^2, 5^3 di x_{11}) e quindi il sistema, che ne risulta, non contiene più a.

Aggiungendo ad y successivamente una delle condizioni delle colonna H', otteniamo:

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1^3 & 3^3 & 5^3 \\ 2^2 & 4^2 & - \end{pmatrix} = \mathrm{VI}; \qquad y_2 = \begin{pmatrix} 1^3 & 3 & 5^3 \\ - & 4^2 & - \end{pmatrix} = \mathrm{IX}$$

ed altri due sistemi, che contengono z ed u. y_1 e y_2 soddisfano le condizioni α) e β), cioè sono due sistemi Y e d'altra parte si può controllare che coincidono rispettivamente con i sistemi completi VI e IX del n. 1.

Infine da z ed u, aggiungendo successivamente una delle condizioni della colonna G, otteniamo

$$z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3^3 & 5 \\ - & - & - \end{pmatrix} = \mathrm{XVII}; \qquad z_2 = \begin{pmatrix} 1^3 & 3^3 & 5 \\ 2^2 & - & - \end{pmatrix};$$

$$z_3 = \begin{pmatrix} 1^3 & 3^3 & 5 \\ - & 4^2 & - \end{pmatrix} = \mathrm{XV}; \qquad z_4 = \begin{pmatrix} 1^3 & 3^3 & 5 \\ - & - & 6^3 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3^3 & 5^3 \\ - & - & 6^2 \end{pmatrix} = \mathrm{XIX}; \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1^3 & 3^3 & 5^3 \\ 2^2 & - & 6^2 \end{pmatrix};$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1^3 & 3^3 & 5^3 \\ - & 4^2 & 6^2 \end{pmatrix} = \mathrm{III}; \qquad u_4 = \begin{pmatrix} 1^3 & 3^3 & 5^3 \\ - & - & 6 \end{pmatrix}.$$

I sistemi z_1, z_3, u_1, u_3 sono sistemi Y e coincidono rispettivamente con i sistemi XVII, XV, XIX, III del n. 1. z_2 e u_2 si debbono scartare perchè in entrambi deve essere soppressa la condizione 5^3, che appartiene ad a. z_4 e u_4 contengono f.

Procedendo come sopra, otteniamo:

da b: 2 sistemi Y coincidenti con i sistemi XIII, XIV;
da c: 2 sistemi Y coincidenti con i sistemi I, II;
da d: 1 sistema Y coincidente con il sistema IV;
da e: 5 sistemi Y coincidenti con i sistemi VIII′, X′, XVIII′, XX′, XXI′;
da f: 5 sistemi Y coincidenti con i sistemi V′, VII′, XI, XII, XVI.

Non ci sono sistemi Y che contengono g, h, i (i sistemi che si ottengono aggiungendo condizioni a g, h, i risultano tutti, ad un certo punto, da scartare).

Lasciamo al lettore queste ultime verifiche.