Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Adriano Barlotti

Sul gruppo delle proiettività di una retta in sè nei piani liberi e nei piani aperti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 34 (1964), p. 135-159

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1964__34__135_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUL GRUPPO DELLE PROIETTIVITÀ DI UNA RETTA IN SÈ NEI PIANI LIBERI E NEI PIANI APERTI

Memoria (*) *di* ADRIANO BARLOTTI (*a Firenze*) (**)

1. – In un qualunque piano grafico si può introdurre la nozione di proiettività fra due forme di prima specie (nel senso di Poncelet) dando tale nome ad ogni corrispondenza biunivoca che nasca fra i loro elementi come prodotto di un numero finito qualsiasi di prospettività. Le proiettività di una retta, r, in sè formano un gruppo, G_r, e in un dato piano grafico i gruppi G_r, relativi a rette diverse, risultano isomorfi [1]).

Nel presente lavoro ci proponiamo di esporre alcune proprietà che abbiamo stabilito studiando il gruppo G_r nei piani liberi di M. Hall [2]). Indichiamo qui brevemente i risultati principali a cui siamo giunti.

Nel n. 3 abbiamo dimostrato che una proiettività di G_r, che sia data come prodotto non vuoto e « in forma ridotta » (per la definizione di questa espressione si veda il n. 2) di prospettività, risulta diversa dall'identità; un'immediata conseguenza

---

*) Pervenuta in redazione il 31 marzo 1963. Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Firenze.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

1) Cfr. [1], n. 2.

2) Tali piani sono stati introdotti da M. HALL in [4]. Successivamente essi (e loro generalizzazioni) sono stati oggetto di studio da diversi punti di vista. Cfr. KOPEJKINA [7], LOMBARDO RADICE [8], MAISANO [10], DEMBOWSKI [2], JOUSSEN [6], DITOR [3], MAGARI [9]; si veda anche in proposito PICKERT [11], pagg. 12-26 e SKORNYAKOV [12], pagg. 10-17.

di questa proprietà è l'unicità della rappresentazione in forma ridotta di una proiettività.

Il n. 4 è dedicato alla costruzione di gruppi isomorfi a G_r.

Successivamente (nn. 5 e 6) abbiamo fermato l'attenzione sul modo in cui G_r opera sui punti di r, e abbiamo dimostrato che G_r è al più cinque volte transitivo, e che un piano libero è al più 6-pascaliano. Resta ancora aperta la questione di vedere se questi due ultimi risultati siano o no suscettibili di miglioramento.

Infine (n. 7) abbiamo mostrato come taluni dei risultati ottenuti valgano anche in altre classi di piani, e precisamente nei piani che sono estensione libera di una qualunque struttura di incidenza che non sia già un piano grafico, nei piani che sono estensione libera nel senso di S. Ditor e nei piani aperti.

2. – Prima di iniziare il nostro studio ricordiamo brevemente la definizione di piano libero.

Si parte da una struttura di incidenza, Π_0, formata da un insieme di almeno due punti incidenti ad una retta e da due punti esterni a questa. Chiamiamo tutti questi punti e la retta elementi di altezza zero. Definita la struttura d'incidenza Π_{2k}, associamo ad ogni coppia, P_i, P_j, di punti distinti di Π_{2k}, che non siano congiunti in questa struttura da una retta, una nuova retta che è incidente con i due punti P_i e P_j che la determinano e con nessun altro punto di Π_{2k}. A ciascuna delle rette che così si ottengono assegnamo per altezza il numero $2k+1$, e indichiamo con Π_{2k+1} la struttura di incidenza che si ottiene aggiungendo a Π_{2k} tutte queste nuove rette. Ad ogni coppia di rette distinte, r_i, r_j, di Π_{2k+1}, non secantesi in Π_{2k+1} associamo un nuovo punto che è incidente con r_i e r_j e con nessun altra retta di Π_{2k+1}. I punti così ottenuti li diciamo di altezza $2k+2$, e chiamiamo Π_{2k+2} la struttura di incidenza che si ottiene ampliando Π_{2k+1} con l'aggiunta di questi nuovi punti.

Le strutture di incidenza Π_n restano così definite per ogni valore (intero, positivo) di n, e, al crescere di n, formano una successione

$$\Pi_0, \quad \Pi_1, \quad \Pi_2, \quad \dots$$

nella quale ciascuna struttura contiene le precedenti. L'unione di tutte queste strutture è un piano grafico, Π, che viene chiamato il piano libero generato dalla struttura Π_0.

Si osservi che dalla definizione di piano libero seguono immediatamente le due proprietà (duali l'una dell'altra):

a) ogni retta di altezza k $(= 2h + 1) > 0$ contiene esattamente due punti di altezza minore di k, e uno almeno di questi ha altezza uguale a $k - 1$;

b) un punto di altezza k $(= 2h) > 0$ è incidente esattamente con due rette di altezza minore di k, e una almeno di queste ha altezza eguale a $k - 1$.

Detto G_r il gruppo delle proiettività della retta r in sè, sia ω una proiettività di G_r e supponiamo che risulti (con $k \geq 2$):

$$\omega = \prod_{i=1}^{k} \gamma_i, \tag{1}$$

dove γ_i indica la prospettività che si ottiene proiettando da S_i la retta r_{i-1} sulla r_i [3]), e intendendo che sia $r = r_0 = r_k$. Diremo che la (1) rappresenta la ω in forma *ridotta* quando il suo secondo membro è privo di fattori apparenti, vale a dire qualora non risulti mai $r_i = r_{i+1}$ o $S_i = S_{i+1}$. Quando la (1) è scritta in forma ridotta, i punti S_i e le rette r_i li diremo gli *elementi generatori* della ω relativi alla rappresentazione (1).

In seguito faremo più volte uso della nozione di *configurazione associata alla proiettività*, ω, *di* G_r [in una data rappresentazione ridotta (1) [4])] *e all'insieme*, $\{A_n\}$, *di punti di* r. Con questa espressione indicheremo l'insieme di punti e di rette del piano costituito:

1) dagli elementi generatori della ω;

2) dai punti $A_n^{(i)}$ $(i = 0, \ldots, k)$, dove $A_n^{(0)}$ appartiene ad $\{A_n\}$ e $A_n^{(i)}$, con $i > 0$ è l'intersezione della retta r_i con la $S_i A_n^{(i-1)}$;

3) dalle rette $S_i A_n^{(i-1)}$.

---

[3]) Naturalmente S_i non appartiene nè ad r_{i-1} nè ad r_i.

[4]) Per ora tale configurazione va pensata come dipendente dal prodotto che figura nel secondo membro della (1). In seguito risulterà che in un piano libero tale precisazione è superflua (cfr. corollario I).

Se i punti di $\{A_n\}$ sono in numero finito è ovvio che anche gli elementi della configurazione associata sono in numero finito.

3. – Cominciamo col dimostrare il

TEOREMA I: *In un piano libero sia* ω *una proiettività di* G_r. *Se essa è rappresentata in forma ridotta mediante la* (1) (con $k \geq 2$), *allora è certamente diversa dall'identità.*

Non è quindi possibile rappresentare l'identità in forma ridotta, a meno che non si convenga di dare significato alla (1) quando l'insieme dei fattori che figurano nel prodotto è l'insieme vuoto.

Indicheremo qui di seguito due diverse dimostrazioni di questo teorema.

I dimostrazione: Per provare la proprietà enunciata basterà far vedere che è sempre possibile, nelle ipotesi del teorema, determinare su r un punto A il cui trasformato nella ω ha altezza maggiore di quella di A.

Fissata la rappresentazione ridotta della ω indichiamo con h l'altezza di uno dei suoi elementi generatori di altezza massima. Consideriamo allora sulla retta r un punto A la cui altezza, a, sia maggiore di $h + 2$, e che inoltre sia tale che la retta SA_1 sia diversa da quella che, con r, definisce A. Cioè la retta S_1A deve avere altezza maggiore di a e quindi uguale ad $a + 1$.

Chiamiamo Ω la configurazione associata alla ω e al punto A, e indichiamo con a_i l'altezza del punto $A^{(i)}$.

Si verifica subito che risulta

$$a_1 = a + 2 .$$

Infatti se ciò non fosse, sulla retta S_1A si troverebbero tre punti ($A = A^{(0)}$, S_1, $A^{(1)}$) di altezza inferiore a quella della retta, cosa che contrasterebbe con la a) del n. 2 [5]).

Si riconosce anche facilmente che, per qualunque valore di i, è

$$a_i = a_{i-1} + 2 . \tag{2}$$

---

[5]) Si osservi che i tre punti $A^{(0)}$, S_1 e $A^{(1)}$ sono effettivamente distinti. Infatti se fosse $A^{(0)} = A^{(1)}$, questo punto coinciderebbe con $r_0 \cap r_1$ e avrebbe per altezza al più $h + 1$, contro quanto abbiamo supposto.

Supponiamo infatti che la (2) non sia sempre vera, e indichiamo con j il primo valore di i per cui essa non vale; per quanto abbiamo visto sopra è $j \neq 1$. Esaminiamo separatamente i due casi $A^{(j-1)} = A^{(j)}$ e $A^{(j-1)} \neq A^{(j)}$. Nelle nostre ipotesi il primo di questi non si può presentare, perchè se $A^{(j-1)} = A^{(j)}$ questo punto è l'intersezione delle rette r_{j-1} e r_j e quindi ha come altezza al più $h+1$, mentre è $a_{j-1} \geq a_1 > h+1$. Ma non può nemmeno essere $A^{(j-1)} \neq A^{(j)}$, poichè, essendo $a_{j-1} = a_{j-2} + 2$, la retta $S_{j-1}A^{(j-1)}$ ha per altezza $a_{j-2} + 1 > h + 1$, e quindi non contiene S_j. Ma allora per $A^{(j-1)}$ passano tre rette distinte della Ω: la r_{j-1}, la $S_{j-1}A^{(j-1)}$ e la $S_jA^{(j-1)}$; le prime due di queste hanno altezza inferiore ad a_{j-1}, e allora necessariamente la $S_jA^{(j-1)}$ ha per altezza $a_{j-1}+1$. Segue quindi $a_j = a_{j-1} + 2$, contro l'ipotesi che non valga la (2).

Il trasformato, $A^{(k)}$, di A nella ω ha quindi per altezza $a + 2k$, e quindi è distinto da A. Si conclude che la ω non è l'identità, e il teorema è così dimostrato.

II dimostrazione: Se $k = 2$ si vede subito che una proiettività rappresentata in forma ridotta mediante la (1) non può essere l'identità. Supponiamo che l'identità di G_r si possa rappresentare in forma ridotta mediante la (1), e sia k_0 (> 2) il minimo valore di k per cui ciò accade. Nel seguito, per brevità di discorso, indicheremo con σ una rappresentazione ridotta dell'identità per la quale risulti $k = k_0$. Usando i simboli introdotti nel n. 2 per indicare i generatori relativi alla σ, osserviamo per prima cosa che si può supporre che risulti:

$$S_1 \neq S_k. \tag{3}$$

Se infatti è $S_1 = S_k$, posto

$$\sigma = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{2k-1}\alpha_{2k},$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}$ prospettività tra forme di nome diverso mediante le quali viene generata la σ, si consideri la proiettività (di una certa retta in sè)

$$\bar{\sigma} = \alpha_{2k-1}\alpha_{2k}\sigma(\alpha_{2k-1}\alpha_{2k})^{-1} = \alpha_{2k-1}\alpha_{2k}\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{2k-2}.$$

Poichè l'ipotesi $S_1 = S_k$ comporta che sia $\alpha_{2k} = \alpha_1^{-1}$ è

$$\bar{\sigma} = \alpha_{2k-1}\alpha_2 \dots \alpha_{2k-2} \, . \tag{4}$$

Inoltre se σ è l'identità, tale è anche la $\bar{\sigma}$. Ma, se $r_1 \neq r_{k-1}$, la (4) è una rappresentazione dell'identità in forma ridotta, mediante il prodotto di $k - 1$ prospettività fra punteggiate. Se poi $r_1 = r_{k-1}$ [cosa che può avvenire solo per $k \geqslant 4$ [6])] si ha $\alpha_{2k-1} = \alpha_2^{-1}$, e l'espressione

$$\alpha_3\alpha_4 \dots \alpha_{2k-2},$$

è una rappresentazione dell'identità in forma ridotta, mediante il prodotto di $k - 2$ prospettività fra punteggiate [7]). In ambedue i casi si giunge ad un assurdo a causa dell'ipotesi di minimo fatta su k. Pertanto si può supporre valida la (3).

Mostreremo ora come da questa ipotesi si deduca un assurdo.

Sia P un punto di r e indichiamo con Σ_P la configurazione associata alla σ e al punto P. È subito visto che se P assume due posizioni diverse, A e B, i punti $A^{(i)}$ e le rette $S_iA^{(i)}$ di Σ_P sono diversi dai corrispondenti elementi B_i e $S_iB^{(i)}$ di Σ_B.

Osserviamo ancora che dal punto $P^{(i)}$ escono in generale tre rette della Σ_P: la r_i, la $S_iP^{(i)}$ e la $S_{i+1}P^{(i)}$ [8]). Queste si possono ridurre a due solo se $P^{(i)} \in S_iS_{i+1}$. Infine alla retta $P^{(i-1)}S_i$ appartengono in generale tre punti di Σ_P: $P^{(i-1)}$, S_i e $P^{(i)}$. Questi si possono ridurre a due solo quando $P^{(i-1)} = r_{i-1} \cap r_i$. Le posizioni di P sulla r in corrispondenza delle quali risulta (per qualche i) $P^{(i)} \in S_{i-1}S_i$ oppure $P^{(i-1)} = r_{i-1} \cap r_i$ sono ovviamente in numero finito. Facciamo allora assumere a P tre posizioni, A, B, C, diverse da queste e fra loro. L'insieme degli elementi di Σ_A, Σ_B e Σ_C costituisce una configurazione *chiusa*, e ciò è assurdo perchè un piano libero non può contenere una tale configurazione (cfr. [4], teor. 4.8). Risulta così provato il teorema.

---

[6]) Se fosse $r_1 = r_{k-1}$ per $k = 3$ la σ non sarebbe scritta in forma ridotta.

[7]) Ed essendo in questo caso $k \geqslant 4$ risulta anche $k - 2 \geqslant 2$.

[8]) Se $i = 0$ si intende che $S_0 = S_k$.

Dal teorema I seguono subito le seguenti proprietà:

COROLLARIO I: *In un piano libero una proiettività, diversa dall'identità, si può rappresentare mediante la* (1), *scritta in forma ridotta, in un solo modo.*

Cioè, se i due prodotti

$$\prod_{i=1}^{k} \gamma_i , \qquad \prod_{j=1}^{m} \gamma'_j ,$$

sono entrambi scritti in forma ridotta e rappresentano la stessa proiettività, risulta $k = m$ e $\gamma_i = \gamma'_i$ $(i = 1, \dots, k)$.

Infatti, se così non fosse, scrivendo il prodotto [9]):

$$(5) \qquad \prod_{i=1}^{k} \gamma_i \cdot \prod_{j=m}^{1} \gamma_j'^{-1} ,$$

in forma ridotta, resterebbero dei fattori, e la (5) non potrebbe rappresentare l'identità.

Si confronti il risultato ora stabilito con la proprietà ben nota che in un piano desarguesiano una proiettività di G_r si può sempre esprimere come prodotto di al più tre prospettività [10]). Quanto abbiamo ora provato assicura invece che in un piano libero non è possibile limitare superiormente il numero delle prospettività mediante prodotto delle quali si possa esprimere la generica proiettività di G_r.

COROLLARIO II: *In un piano libero ogni elemento di G_r che sia diverso dall'identità ha periodo infinito.*

Infatti se l'espressione

$$(6) \qquad \left(\prod_{i=1}^{k} \gamma_i\right)^s ,$$

rappresenta l'identità, scrivendola in forma ridotta debbono sparire tutti i fattori. Perchè ciò accada deve essere k pari e $\gamma_i = \gamma_{k-i}$. Cioè la base della potenza (6) è l'identità.

---

[9]) Dove $\gamma_j'^{-1}$ è la prospettività che si ottiene proiettando r'_j da S su r'_{j-1}.

[10]) Cfr., p. es., PICKERT [11], pag. 114.

Il corollario II ha come immediata conseguenza che nei piani liberi vale l'*assioma di Rashevskii* [11]): *Se una proiettività di G_r è tale che per essa tutti i punti di r, eccettuato al più un numero finito, sono uniti, allora quella proiettività è l'identità.* Nel n. 5 mostreremo come, in questo ordine di idee, valga in un piano libero una proprietà molto più forte.

Proviamo ora il

TEOREMA II: *Indichiamo con ω_1 e ω_2 due elementi di G_r diversi dall'identità. Se ω_1 e ω_2 sono permutabili, essi sono potenze di uno stesso elemento di G_r.*

Supponiamo che scrivendo ω_1 e ω_2 in forma ridotta e indicando con α_i e β_i prospettività fra forme di nome diverso, sia:

$$\omega_1 = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{2m}, \qquad \omega_2 = \beta_1\beta_2 \dots \beta_{2n} .$$

I prodotti che figurano nei secondi membri di queste due formule costituiscono due «parole» ridotte del gruppo libero generato dal sistema, S, che si ottiene considerando gli elementi distinti dell'insieme:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2n},$$

e conservando fra questi, per ogni eventuale coppia di elementi, λ_i e λ_j, per cui risulti

$$\lambda_i = \lambda_j^{-1}$$

uno solo dei due elementi.

Il teorema II segue allora immediatamente dal

TEOREMA II': *Se due elementi ω_1 e ω_2 di un gruppo libero, G, sono permutabili, essi appartengono ad uno stesso sottogruppo ciclico di G.*

Per provare ciò indichiamo con G il gruppo libero generato dal sistema di elementi $\{\varepsilon_i\}$, e supponiamo che i due elementi di G per cui risulta $\omega_1\omega_2 = \omega_2\omega_1$ si scrivano, in forma ridotta:

$$\omega_1 = \gamma_1 \dots \gamma_m, \qquad \omega_2 = \delta_1 \dots \delta_n,$$

dove γ_j e δ_j sono simboli del tipo $\varepsilon_i^{\pm 1}$. Ammettiamo, per fissare le idee, che sia $m \geqslant n$.

[11]) Cfr., p. es., SKORNYAKOV [12], pag. 43.

Se $n = 0$, ω_2 è l'identità, e il teorema diviene banale. Se $n = 1$, si ha

$$\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_m\delta_1 = \delta_1\gamma_1 \dots \gamma_m \, . \tag{7}$$

Se il primo membro è in forma ridotta, tale è anche il secondo [12]), per cui si ha $\gamma_1 = \delta_1$, $\gamma_2 = \gamma_1, \dots, \gamma_m = \gamma_{m-1}$, $\delta_1 = \gamma_m$, vale a dire $\gamma_1 = \dots = \gamma_m = \delta_1$, cioè $\omega_1 = \delta_1^m$, $\omega_2 = \delta_1$, e in tal caso il teorema è provato.

Se invece il primo membro (e quindi anche il secondo) della (7) non è in forma ridotta, si ha $\gamma_m = \delta_1^{-1}$, $\delta_1^{-1} = \gamma_1$, e di conseguenza la (7) comporta che si abbia

$$\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_{m-1} = \gamma_2\gamma_3 \dots \gamma_m \, . \tag{8}$$

Essendo entrambi i membri della (8) scritti in forma ridotta, risulta $\gamma_1 = \gamma_2$, $\gamma_2 = \gamma_3, \dots, \gamma_{m-1} = \gamma_m$. Si ha allora $\omega_1 = \delta_1^{-m}$, $\omega_2 = \delta_1$ e anche in tal caso il teorema è provato.

Dimostrato il teorema per $n = 1$, procediamo per induzione rispetto ad n.

Se la parola

$$\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_m\delta_1\delta_2 \dots \delta_n \, , \tag{9}$$

è in forma ridotta, e quindi tale è anche la

$$\delta_1\delta_2 \dots \delta_n\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_m \, , \tag{10}$$

segue

$$\gamma_1 = \delta_1, \dots, \quad \gamma_n = \delta_n, \quad \gamma_{n+1} = \gamma_1, \dots, \quad \gamma_{2n} = \gamma_n, \dots, \quad \gamma_m = \gamma_{m-n},$$

cioè $\gamma_i = \gamma_j$ per $i \equiv j \pmod{n}$. È poi

$$\gamma_{m-n+1} = \delta_1 = \gamma_1, \quad \gamma_{m-n+2} = \delta_2 = \gamma_2, \dots, \quad \gamma_m = \delta_n = \gamma_n,$$

---

[12]) Altrimenti dal secondo membro si potrebbe dedurre una rappresentazione ridotta diversa da quella data dal primo membro per la stessa parola, mentre è noto che ciò non può accadere.

quindi $\gamma_i = \gamma_j$ per $i \equiv j \pmod{m-n}$. Risulta allora che, detto d il massimo comun divisore di m e n, è $\gamma_i = \gamma_j$ per $i \equiv j \pmod{d}$. Pertanto è $\omega_1 = (\gamma_1 \dots \gamma_d)^{m/d}$, ed inoltre, avendosi $\gamma_1 = \delta_1, \dots, \gamma_d = \delta_d$, si ha anche $\omega_2 = (\gamma_1 \dots \gamma_d)^{n/d}$, e in tal caso il teorema è provato.

Se

$$\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_m\delta_n^{-1} \dots \delta_1^{-1}, \tag{11}$$

e quindi anche

$$\delta_n^{-1} \dots \delta_1^{-1}\gamma_1 \dots \gamma_m, \tag{12}$$

sono in forma ridotta, procedendo come sopra si prova che ω_1 ω_2^{-1} sono potenze di uno stesso elemento di G_r. Altrettanto allora avviene per ω_1 e ω_2, e così anche in questo caso il teorema risulta provato.

Basta quindi limitarsi al caso in cui nessuno dei prodotti (9), (10), (11), (12) è in forma ridotta. Si ha allora

$$\gamma_m = \delta_1^{-1}, \qquad \delta_n = \gamma_1^{-1}, \qquad \gamma_m = \delta_n, \qquad \gamma_1 = \delta_1,$$

per cui, posto $\gamma_1 = \delta_1 = \alpha$, risulta $\gamma_m = \delta_n = \alpha^{-1}$, e pertanto

$$\omega_1 = \alpha(\gamma_2 \dots \gamma_{m-1})\alpha^{-1}, \qquad \omega_2 = \alpha(\delta_2 \dots \delta_{n-1})\alpha^{-1}.$$

Quindi, posto $\bar{\omega}_1 = \gamma_2 \dots \gamma_{m-1}$, $\bar{\omega}_2 = \delta_2 \dots \delta_{n-1}$, si ha

$$\omega_1\omega_2 = \alpha\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2\alpha^{-1}, \qquad \omega_2\omega_1 = \alpha\bar{\omega}_2\bar{\omega}_1\alpha^{-1},$$

onde, da $\omega_1\omega_2 = \omega_2\omega_1$, segue

$$\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_2\bar{\omega}_1 .$$

Poichè $\bar{\omega}_2$ consta del prodotto di $n-2$ elementi del tipo $\varepsilon_i^{\pm 1}$, per l'ipotesi di induzione si ha

$$\bar{\omega}_1 = \omega^h, \qquad \bar{\omega}_2 = \omega^k,$$

dove ω indica un conveniente prodotto di $\varepsilon_i^{\pm 1}$ e h e k sono interi. È allora

$$\omega_1 = \alpha\bar{\omega}_1\alpha^{-1} = \alpha\omega^h\alpha^{-1} = (\alpha\omega\alpha^{-1})^h$$

$$\omega_2 = \alpha\bar{\omega}_2\alpha^{-1} = \alpha\omega^k\alpha^{-1} = (\alpha\omega\alpha^{-1})^k ,$$

e il teorema risulta così provato in ogni caso.

4. – Fissata la retta r si può costruire un gruppo isomorfo a G_r nel modo che ora andiamo ad indicare. Consideriamo l'insieme delle coppie $(S_i r_i)$ costituite da un punto e da una retta di Π che non si appartengono.

Chiameremo c-insieme o l'insieme vuoto (che in seguito indicheremo col simbolo 1), o un numero finito di coppie $(S_i r_i)$ date in un certo ordine:

$$(S_1 r_1)(S_2 r_2) \dots (S_k r_k) ,$$

e in modo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

a) $S_1 \notin r$;

b) per $i > 1$ è $S_i \notin r_{i-1}$;

c) $r_k = r$.

Un c-insieme lo diciamo in « forma ridotta » o semplicemente « *ridotto* » quando nella sua composizione non si verifica nessuna delle seguenti circostanze:

α) la coppia iniziale è $(S_1 r)$;

β) esistono due coppie consecutive $(S_i r_i)(S_{i+1} r_{i+1})$ con $r_{i+1} = r_i$;

γ) esistono due coppie consecutive $(S_i r_i)(S_{i+1} r_{i+1})$ con $S_i = S_{i+1}$.

Due c-insieme li diremo *adiacenti* se uno di essi si ottiene dall'altro mediante una delle seguenti operazioni:

α') scrivendo o cancellando all'inizio una coppia della forma $(S_j r)$;

β') ponendo dopo la coppia $(S_i r_i)$ una coppia $(S_j r_i)$, oppure cancellando la seconda coppia di un eventuale accoppiamento $(S_i r_i)(S_{i+1} r_i)$;

γ') ponendo prima della coppia $(S_i r_i)$ una coppia $(S_i r_j)$ oppure cancellando da un eventuale accoppiamento $(S_i r_i)(S_i r_{i+1})$ la prima coppia.

Chiameremo poi *equivalenti* due c-insiemi f e g se esiste una successione di un numero finito, m, di c-insiemi, $f_1, f_2, \ldots, f_m$, tali che $f = f_1$, $f_m = g$ e, per ogni i, f_i ed f_{i+1} sono adiacenti. Per indicare che f e g sono equivalenti scriveremo $f \sim g$. È subito visto che la relazione $f \sim g$ è una effettiva relazione di equivalenza. La classe di tutti i c-insiemi equivalenti ad f la indicheremo col simbolo $[f]$.

Si riconosce facilmente che *ogni classe contiene uno ed un solo c-insieme ridotto* [13]). Possiamo poi definire nell'insieme delle classi di c-insiemi una moltiplicazione, ponendo

$$[f] \cdot [g] = [fg],$$

dove con fg indichiamo il c-insieme che si ottiene scrivendo successivamente ad f le coppie di g [14]). Si verifica facilmente che l'operazione così definita dipende solo dalle classi $[f]$ e $[g]$ e non dai particolari rappresentanti f e g presi per esse, e che rispetto alla moltiplicazione ora introdotta l'insieme delle classi di c-insiemi forma un gruppo, $\mathfrak{G}$, nel quale l'unità è la classe il

---

[13]) Per questo ci si può servire di considerazioni simili a quelle svolte in HALL [5], pag. 91 per dimostrare l'analogo risultato per i gruppi liberi.

[14]) Si osservi che la scrittura fg costituisce effettivamente un c-insieme nel senso da noi indicato sopra. Infatti per essa valgono la a) e la c). Inoltre la b), che è soddisfatta ovviamente per tutti gli altri accoppiamenti, risulta verificata anche per quello costituito dall'ultima coppia di f e dalla prima coppia di g, come conseguenza della validità della c) per f e della a) per g.

cui rappresentante in forma ridotta è l'insieme vuoto. Riteniamo superfluo riportare qui la semplice dimostrazione di ciò. Ci limitiamo ad indicare che se il c-insieme

$$f = (S_1 r_1)(S_2 r_2) \dots (S_{k-1} r_{k-1})(S_k r),$$

è un rappresentante di $[f]$, risulta

$$[f]^{-1} = [(S_k r_{k-1})(S_{k-1} r_{k-2}) \dots (S_2 r_1)(S_1 r)].$$

Possiamo dimostrare ora il

TEOREMA III: *I gruppi G_r e $\mathfrak{G}$ sono isomorfi.*

Per provare ciò si stabilisca la seguente corrispondenza fra gli elementi di G_r e quelli di $\mathfrak{G}$.

Alla proiettività identica associamo l'elemento 1 di $\mathfrak{G}$.

Sia ω una qualsiasi altra proiettività di G_r. Consideriamo gli elementi generatori della ω [15]) e formiamo mediante questi il simbolo:

$$(S_1 r_1) \dots (S_k r).$$

Questo è un c-insieme poichè per esso valgono le *a*), *b*) e *c*), e individua quindi un elemento di $\mathfrak{G}$ che assumiamo come corrispondente della ω. Viceversa ogni elemento di $\mathfrak{G}$ determina un c-insieme ridotto, e questo in virtù delle *a*), *b*) e *c*) individua i generatori di una proiettività di G_r.

La corrispondenza che abbiamo così stabilito è biunivoca, ed è subito visto che conserva i prodotti: è quindi un isomorfismo, e il teorema risulta provato.

Fissati tre punti non allineati, $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, nessuno dei quali appartenga ad r, consideriamo l'insieme costituito dagli elementi di $\mathfrak{G}$ i cui rappresentanti ridotti sono i c-insiemi composti ciascuno da due coppie

$$(S_a r_b)(S_c r), \tag{13}$$

---

[15]) Che, per il corollario I, sono determinati in modo unico.

e dagli elementi di $\mathfrak{G}$ i cui rappresentanti in forma ridotta sono del tipo

$$(S^{(h)}r_a)(S_b r_c)(S^{(k)}r)\,, \tag{14}$$

dove $S_b \in r$, $S^{(h)}$ è il primo dei tre punti $S^{(i)}(i = 1, 2, 3)$ che non appartiene ad r_a, mentre $S^{(k)}$ è il primo dei tre punti $S^{(i)}$ che non appartiene ad r_c.

All'elemento che ha come rappresentante il c-insieme (13) associamo il simbolo

$$(abc)\,, \tag{15}$$

e all'elemento rappresentato dal c-insieme (14) facciamo corrispondere il simbolo

$$(habck)\,. \tag{16}$$

Sia Γ il gruppo libero generato da tutti i simboli (15) e (16).

Si assegni ora un'applicazione, φ, di Γ in $\mathfrak{G}$ nel modo seguente [16]:

$$\begin{aligned}
\varphi[(abc)] &= (S_a r_b)(S_c r)\\
\varphi[(abc)^{-1}] &= (S_c r_b)(S_a r)\\
\varphi[(habck)] &= (S^{(h)}r_a)(S_b r_c)(S^{(k)}r)\\
\varphi[(habck)^{-1}] &= (S^{(k)}r_c)(S_b r_a)(S^{(h)}r)\\
\varphi(u_1 u_2 \dots u_m) &= \varphi(u_1)\varphi(u_2)\dots\varphi(u_m)\,,
\end{aligned}$$

per $u_1, u_2, \dots, u_m$, simboli del tipo (abc), $(abc)^{-1}$, $(habck)$, $(habck)^{-1}$.

Avendosi

$$\varphi[(abc)(abc)^{-1}] = (S_a r_b)(S_c r)(S_c r_b)(S_a r) = 1,$$
$$\varphi[(habck)(habck)^{-1}] = (S^{(h)}r_a)(S_b r_c)(S^{(k)}r)(S^{(k)}r_c)(S_b r_a)(S^{(h)}r) = 1,$$

risulta subito che φ è un omomorfismo di Γ in $\mathfrak{G}$.

---

[16]) Dato che ciò non dà luogo ad equivoci, qui e nel seguito, in luogo dell'elemento $[f]$ di $\mathfrak{G}$ scriveremo semplicemente un suo rappresentante.

Inoltre si riconosce facilmente che φ è un omomorfismo di Γ su $\mathfrak{G}$. Per questo indichiamo con $\mathfrak{g}$ un elemento di $\mathfrak{G}$ e sia

$$(S_a r_b)(S_c r_d) \dots (S_t r) , \tag{17}$$

il rappresentante ridotto di $\mathfrak{g}$. Partendo da questo costruiamo un c-insieme equivalente procedendo nel modo che andiamo ad indicare.

I) Fissiamo in un primo tempo l'attenzione sulle eventuali coppie (Sr') del c-insieme (17) nelle quali $S \in r$. Sia $(S_m r_n)$ l'ultima di queste, e supponiamo che avendo riguardo alla posizione che questa occupa in (17) risulti:

$$\dots (S_i r_j)(S_m r_n)(S_p r_q) \dots$$

Se l'insieme delle tre coppie che qui figurano scritte esplicitamente è del tipo (14), racchiudiamolo in parentesi quadre. In caso contrario sostituiamo (17) con il c-insieme equivalente

$$\dots (S_i r_j)(S^{(h)} r)(S^{(h)} r_j)(S_m r_n)(S^{(k)} r)(S^{(k)} r_n)(S_p r_q) \dots$$

e in questo racchiudiamo entro parentesi quadre l'insieme delle tre coppie che ha come termine centrale $(S_m r_n)$. Nel c-insieme ottenuto eseguiamo poi eventualmente le seguenti semplificazioni: se $S_i = S^{(h)}$ sopprimiamo le due coppie che precedono la parentesi quadra; se $S_p = S^{(k)}$ e $r_q = r$ sopprimiamo le due coppie che seguono la parentesi quadra; infine se $S_p = S^{(k)}$ e $r_q \neq r$ cancelliamo la prima delle coppie che seguono la parentesi quadra. È subito visto che il c-insieme, g', che così si ottiene è ancora equivalente al (17).

Partendo da g', ripetiamo il procedimento ora indicato applicandolo alla penultima delle coppie per cui è $S \in r$, e così successivamente fino ad esaurire le coppie di questo tipo. Otteniamo infine un nuovo rappresentante, g'', di $\mathfrak{g}$, nel quale sono messi in evidenza, mediante le parentesi quadre, certi insiemi di coppie [tutti del tipo (14)].

II) In g'' consideriamo le eventuali coppie $(S_x r_y)$ con $r_y = r$, che non facciamo parte di uno degli insiemi racchiusi in parentesi quadre in I): chiameremo queste coppie le « coppie II ». Si riconosce subito che anche la coppia precedente una coppia II non è stata racchiusa in parentesi quadre in I).

Racchiudiamo entro parentesi quadre gli insiemi composti da una coppia II e dalla sua precedente.

III) Esaminiamo infine l'insieme delle coppie che non sono state ancora racchiuse in parentesi quadre, e che chiameremo le « coppie III ».

Consideriamo l'ultima delle coppie III di g'' e sia $(S_i r_j)$. Se $(S_m r_n)$ è la coppia successiva a $(S_i r_j)$ risulta $i \neq m$. Facciamo seguire a $(S_i r_j)$ la coppia $(S_m r)$ e racchiudiamo queste due coppie entro parentesi quadre.

Ripetiamo questo procedimento per tutte le coppie III andando in senso contrario a quello in cui queste coppie si seguono in g''. Si giunge infine a un c-insieme equivalente al (17), nel quale tutte le coppie sono raggruppate in insiemi dei tipi (13) e (14). Sostituendo questi con i corrispondenti (15) e (16) si ottiene un elemento x di Γ tale che $\varphi(x) = g$.

Mostriamo ora che il nucleo di φ è costituito dal minimo sottogruppo normale Δ di Γ che contenga gli elementi della forma

$$
\begin{array}{ll}
 & (abc)(cba) \\
(18) & (abc)(cbd)(dba) \\
 & (habck)(kcbah) \\
 & (habck)(kcbdl)(ldbah).
\end{array}
$$

Si ha anzitutto

$$
\begin{aligned}
\varphi[(abc)(cba)] &= \varphi[(abc)]\varphi[(cba)] = (S_a r_b)(S_c r)(S_c r_b)(S_a r) = \\
&= (S_a r_b)(S_a r) = 1, \\
\varphi[(abc)(cbd)(dba)] &= 1, \\
\varphi[(habck)(kcbah)] &= 1, \\
\varphi[(habck)(kcbdl)(ldbah) &= 1,
\end{aligned}
$$

per cui ogni elemento del tipo (18) è nel nucleo di φ.

Vogliamo provare ora che ogni elemento del nucleo di φ è in Δ. Procediamo per assurdo, e supponiamo che esista un elemento, w, non contenuto in Δ, tale che

$$\varphi(w) = 1 .$$

Sarà

$$w = u_1 u_2 \dots u_n , \tag{19}$$

con $u_1, u_2, \dots, u_n$ elementi del tipo (15), (16) o loro inversi, e $n \geqslant 2$. Supponiamo di aver scelto w, fra gli elementi x non contenuti in Δ per cui $\varphi(x) = 1$, in modo che il numero, n, dei fattori $u_1, u_2, \dots, u_n$ sia minimo.

Mostriamo in un primo tempo che nel secondo membro della (19) devono esistere almeno due termini consecutivi, u_{i-1}, u_i, verificanti una delle quattro relazioni

$$\begin{aligned} u_{i-1} &= (abc), & u_i &= (cbd); \\ u_{i-1} &= (abc), & u_i &= (dbc)^{-1}; \\ u_{i-1} &= (cba)^{-1}, & u_i &= (cbd); \\ u_{i-1} &= (cba)^{-1}, & u_i &= (dbc)^{-1}; \end{aligned} \tag{20}$$

se u_{i-1} e u_i sono del tipo (15), o una relazione analoga a una di queste se u_{i-1} e u_i sono del tipo (16). Se è infatti $u_{i-1} = (abc)$, $u_i = (def)$ si ha

$$\varphi(u_{i-1})\varphi(u_i) = (S_a r_b)(S_c r)(S_d r_e)(S_f r) . \tag{21}$$

Se $c \neq d$, il secondo membro della (21) è un c-insieme ridotto. Qualora invece risulti $c = d$, il secondo membro della (21) è uguale a

$$(S_a r_b)(S_d r_e)(S_f r) ,$$

ma, se $b \neq e$, non si può ulteriormente semplificare.

Pertanto, se $n = 2$ e $u_1 = (abc)$, $u_2 = (def)$, o è $u_2 = (cbf)$, oppure risulta $\varphi(u_1 u_2) \neq 1$. Altrettanto avviene se u_1 e u_2 presentano altre delle forme possibili. Inoltre, se $\varphi(u_1 u_2) \neq 1$, le ultime due parentesi di $\varphi(u_1 u_2)$ coincidono con le ultime due di $\varphi(u_2)$.

Procediamo per induzione. Supponiamo di aver provato che, se nel secondo membro della (19) non esistono due termini consecutivi di uno dei tipi (20) o, qualora u_{i-1} e u_i siano della forma (16), di uno dei tipi analoghi, risulta

$$\varphi(u_1 u_2 \ldots u_{i-1}) \neq 1,$$

e che le ultime due coppie $(S_i r_i)$ di $\varphi(u_1 u_2 \ldots u_{i-1})$ coincidono con le ultime due di $\varphi(u_{i-1})$. Mostriamo che lo stesso accade anche per $\varphi(u_1 u_2 \ldots u_i)$.

Infatti quando si confrontino i rappresentanti ridotti di $\varphi(u_1 u_2 \ldots u_{i-1})$ e di $\varphi(u_1 u_2 \ldots u_i)$ si riconosce che il numero delle coppie del secondo di questi è minore del numero delle coppie del primo solo se $\varphi(u_{i-1} u_i) = 1$, e ciò, come abbiamo visto sopra, accade solo per u_{i-1} e u_i di uno dei tipi (20) o analoghi. Ma se il numero delle coppie non diminuisce è certamente $\varphi(u_1 \ldots u_i) \neq 1$, e si verifica anche subito che allora le ultime due coppie di $\varphi(u_1 \ldots u_i)$ coincidono con le ultime due di $\varphi(u_i)$.

L'ipotesi $\varphi(w) = 1$ porta quindi necessariamente all'esistenza di almeno due termini consecutivi di uno dei tipi (20) o analoghi: siano essi u_{i-1} e u_i.

Consideriamo ora l'elemento

$w' = u_{i+1} u_{i+2} \ldots u_n u_1 \ldots u_{i-1} u_i = (u_1 \ldots u_i)^{-1} u_1 \ldots u_n (u_1 \ldots u_i)$.

Esso, quale trasformato di w, è, al pari di questo, nel nucleo di φ e fuori di Δ, essendo sia il nucleo di φ sia Δ normali in Γ. Nel caso che risulti $u_{i-1} = (abc)$, $u_i = (cbd)$, posto $\bar{u} = (dba)$, si ha che l'elemento

$$w_1 = \bar{u} u_{i-1} u_i ,$$

è in Δ. Allora l'elemento

$$\begin{aligned} w' w_1^{-1} &= u_{i+1} u_{i+2} \ldots u_n u_1 \ldots u_{i-1} u_i u_i^{-1} u_{i-1}^{-1} \bar{u}^{-1} = \\ &= u_{i+1} u_{i+2} \ldots u_n u_1 \ldots u_{i-2} \bar{u}^{-1} \end{aligned}$$

è nel nucleo di φ, ma non in Δ, altrimenti sarebbe in Δ anche w' $(= w' w_1^{-1} w_1)$, contro l'ipotesi. Altrettanto accade se u_{i-1} e u_i, invece che alla prima della (20) verificano un'altra di queste relazioni, o una delle analoghe qualora u_{i-1} e u_i siano del tipo

(16). Si è trovato pertanto un elemento contenuto nel nucleo di φ, ma non in Δ, e prodotto di $n-1$ fattori del tipo (15), (16) o loro inversi, contro l'ipotesi fatta su w. Si giunge così ad un assurdo, onde Δ coincide col nucleo di φ. Concludendo Γ/Δ è isomorfo a $\mathfrak{G}$, e vale il

TEOREMA IV: *$\mathfrak{G}$ è isomorfo al gruppo generato dagli elementi della forma* (15) *e* (16) *in cui un sistema di relazioni generatrici sia*

$$
\begin{aligned}
&(abc)(cba) = 1\\
&(abc)(cbd)(dba) = 1\\
&(habck)(kcbah) = 1\\
&(habck)(kcbdl)(ldbah) = 1\,.
\end{aligned}
$$

Da questo teorema si deduce subito che esistono dei sottogruppi di $\mathfrak{G}$ che sono isomorfi a gruppi liberi con infiniti generatori. Per avere uno di questi basta considerare un sottoinsieme infinito, dell'insieme costituito da tutti i simboli (15) e (16), tale che due suoi elementi qualsiasi non siano mai legati dalle relazioni generatrici sopra indicate.

5. – Ci vogliamo ora occupare del modo con cui G_r opera sui punti di r. Il problema più importante da risolvere a questo proposito consiste nello stabilire quale sia l'ordine di transitività del gruppo in questione sui punti di r.

Un ben noto risultato di carattere generale assicura che G_r è almeno tre volte transitivo sui punti di r [17]). Mostreremo qui che G_r è al più cinque volte transitivo sui punti di r. Per stabilire tale risultato cominciamo col dimostrare il seguente

TEOREMA V: *L'unica proiettività di G_r che possiede sei punti uniti (distinti) è l'identità.*

Per provare l'asserto supponiamo che esista in G_r una proiettività, ω, non identica che possieda i sei punti uniti A_i ($i = 1, \dots 6$). Usando i simboli introdotti nel n. 2 per indicare i generatori della ω (scritta nella forma ridotta), possiamo supporre che per la ω sia verificata la disuguaglianza (3) del n. 3. Infatti, qualora ciò

[17]) Cfr., p. es., [11], pag. 9.

non accada, un ragionamento analogo a quello effettuato nel n. 3 per provare, partendo dalla σ, l'esistenza di una proiettività identica per cui vale la (3), porta a costruire, partendo dalla ω, una proiettività, ω', di una retta s in sè dotata di sei punti uniti e per cui la (3) è soddisfatta. È lecito quindi fare l'ipotesi che la (3) valga addirittura per la ω.

Indichiamo con Ω la configurazione associata alla ω e all'insieme dei sei punti A_i. Vogliamo mostrare che in un piano libero l'ipotesi che esista una configurazione come la Ω porta ad un assurdo. Ciò equivale a provare il teorema V.

Poichè gli elementi di Ω sono in numero finito, se ne troverà fra questi uno (almeno) di altezza massima, m. Tale elemento è incidente con non più di due elementi della Ω per le a) e b) del n. 2. Esso non può quindi essere un elemento generatore della ω, poichè ciascuno di questi è incidente con almeno sei elementi della Ω. Quindi gli elementi di altezza massima della Ω si devono ricercare o fra i punti $A_n^{(i)}$ oppure fra le rette $S_iA_n^{(i)}$.

L'ipotesi che valga la (3) porta che nessun punto $A_n^{(i)}$ può avere altezza massima. Infatti se $A_n^{(i)}$ ha altezza massima, m, esso risulta incidente con due sole rette della Ω, e una di queste ha necessariamente per altezza $m - 1$. Le due rette uscenti da $A_n^{(i)}$ sono la r_i e la $S_iA_n^{(i)}$ (coincidente con la $S_{i+1}A_n^{(i)}$) [18]). È subito visto che, essendo $S_i \neq S_{i+1}$, la r_i non può avere per altezza $m - 1$, perchè se ciò accadesse altri tre dei sei punti di essa che appartengono alla Ω dovrebbero avere per altezza m, mentre da questi escono tre rette diverse della Ω. Risulta allora che è uguale a $m - 1$ l'altezza della retta $S_iA_n^{(i)}S_{i+1}$, e poichè le altezze di S_i e di S_{i+1} sono entrambe minori di m, uno almeno di questi due punti, S_j, ha per altezza proprio $m - 2$. Poichè da S_j escono (almeno) sei rette della Ω, tre di queste, oltre la $S_jA_n^{(i)}$, hanno per altezza $m - 1$. Una di queste tre rette può contenere solo due punti della Ω (precisamente S_j e $r_{j-1} \cap r_j = A_\lambda^{(j-1)} = A_\lambda^{(i)}$), sulle altre due però, che indicheremo con s ed s', si trovano almeno due punti distinti della configurazione oltre S_j; chiamiamo precisamente $A_s^{(i)}$, A_s^* i due della retta s e $A_{s'}^{(i)}$, $A_{s'}^*$ quelli che ap-

[18]) Per $i = k$ qui si deve intendere che $S_{k+1} = S_1$.

partengono alla s'. Poichè le altezze dei due punti $A_x^{(i)}$ e $A_y^{(i)}$ sono minori di m, segue che sono uguali ad m le altezze di A_x^* e A_y^*. Ciò però porta che se $j = i$ risulta $S_{i-1} = S_i$ [19]), mentre se $j = i + 1$ è $S_{i+1} = S_{i+2}$. In entrambi i casi siamo così giunti ad un assurdo.

Un ragionamento di tipo duale di quello svolto permette di escludere che l'elemento di altezza massima possa essere una retta $S_iA^{(i)}$. Infatti se la retta $S_iA^{(i)}$ ha altezza massima, m, ad essa appartengono solo due punti di Ω, precisamente S_i ed $A^{(i)}$ $(= A^{(i-1)})$, e uno di questi ha per altezza $m - 1$. Si può escludere che S_i abbia per altezza $m - 1$, poichè se ciò fosse altre tre rette passanti per S_i avrebbero per altezza m, e su queste si troverebbero tre punti della Ω (il punto S_i e le due intersezioni con r_{i-1} ed r_i, necessariamente distinte poichè $r_{i-1} \neq r_i$ e $r_{i-1} \cap r_i = A^{(i)}$), cioè tre punti aventi altezza minore di m, e ciò è impossibile. Resta da esaminare l'eventualità che $A^{(i-1)}$ $(= A^{(i)})$ abbia per altezza $m - 1$. In tal caso poichè le rette r_{i-1} ed r_i hanno altezza minore di m, una almeno di queste, r_j, ha per altezza $m - 2$. Su r_j si trovano, oltre $A^{(i-1)}$, altri tre punti aventi per altezza $m - 1$. Da uno di questi possono uscire solo due rette della Ω (la r_j e la S_jS_{j+1}), ma da ciascuno degli altri due, $A_x^{(j)}$ e $A_y^{(j)}$, escono tre rette distinte della Ω, quindi da ciascuno di questi esce (almeno) un'ulteriore retta della Ω di altezza m. Indichiamo con x la retta di altezza m uscente da $A_x^{(j)}$ e con y quella per $A_y^{(j)}$. Una di queste due rette contiene almeno tre punti della Ω, e quindi ne segue un assurdo. Il teorema V risulta così provato.

Possiamo ora dimostrare il

TEOREMA VI: *Il gruppo G_r è al più cinque volte transitivo sui punti di r.*

Supponiamo che G_r sia sei volte transitivo. Fissati allora su r sei punti distinti A_i $(i = 1, \ldots, 6)$, esisterebbe in G_r una proiettività ω nella quale i corrispondenti di A_1, A_2, A_3, A_4,

---

[19]) Poichè in caso contrario da quei punti uscirebbero tre rette di altezza minore.

A_5 e A_6 sono rispettivamente A_2, A_1, A_4, A_3, A_6 e A_5. Per il teorema V la ω^2 sarebbe l'identità, mentre per il corollario II ciò non può accadere. Ne segue un assurdo e il teorema VI risulta così dimostrato.

Se diciamo che due punti distinti, A e B, di r costituiscono per la ω una coppia involutoria quando i loro omologhi nella ω sono rispettivamente B ed A, risulta provato anche il

TEOREMA VII: *Nessuna proiettività di G_r possiede tre coppie involutorie.*

Esistono invece delle proiettività aventi due coppie involutorie. Basta per questo ripetere, ad esempio, una nota costruzione data da v. Staudt [20]).

6. – Se chiamiamo *n-pascaliano* [21]) un piano nel quale n è il minimo intero per cui accada che l'unica proiettività di G che possiede n punti uniti è l'identità, il teorema V si può enunciare nel seguente modo:

TEOREMA V': *Un piano libero è al più 6-pascaliano.*

Possiamo precisare questo enunciato osservando che un piano libero è o 5-pascaliano o 6-pascaliano. Infatti una proiettività di G_r, diversa dall'identità, ed avente quattro punti uniti si ottiene, per esempio, considerando il quadrato di una proiettività di G_r che possieda due coppie involutorie (cfr. n. 5, ultimo capoverso).

7. – Il risultato stabilito dimostrando il teorema I vale non solo nei piani liberi, ma anche nei piani (che in seguito chiameremo L-piani) che si ottengono come *estensione libera* di una qualsiasi struttura di incidenza che sia diversa da un piano grafico [22]), nei piani che sono estensione libera nel senso di S. Ditor

---

[20]) Cfr. v. STAUDT [13], n. 119.

[21]) Questa locuzione, se non andiamo errati, è dovuta a J. TITS. È ben noto che un piano 3-pascaliano è pascaliano (cfr., p. es., PICKERT [11], pag. 139).

[22]) In [11] chiamati *freie Ebenenerweiterung*.

(che chiameremo L_1-piani) [23]) e nei piani *localmente liberi* o *aperti* [24]).

Si riconosce ciò osservando che per i piani dei primi due tipi si può associare, come nei piani liberi, ad ogni elemento un'altezza, e si può ripetere la prima dimostrazione del n. 3. Per i piani aperti vale invece, senza nessun cambiamento, la seconda dimostrazione del n. 3.

Diverso è invece il comportamento di queste classi di piani per quanto concerne la validità del teorema V.

Nei piani aperti si riconosce subito che vale ancora il teorema V. Infatti supponiamo che esista una proiettività, ω, diversa dall'identità, con più di cinque punti uniti. I generatori della ω sono in numero finito; aggiungendo a questi sei dei punti uniti della ω, che indicheremo con A_i $(i = 1, \dots, 6)$, e due punti (distinti), B_1 e B_2, tali che B_2 sia il trasformato di B_1 nella ω, abbiamo un insieme di elementi del piano, ancora in numero finito, che generano un subpiano del piano in questione. Tale subpiano è un piano libero e i generatori della ω definiscono in questo una proiettività, ω', non identica e avente per punti uniti i sei punti A_i, e ciò è assurdo.

Per quanto concerne l'intera classe degli L-piani, o quella degli L_1-piani, non esiste invece una limitazione superiore per il numero dei punti uniti degli elementi di G_r.

Per gli L-piani ciò si riconosce molto facilmente nel seguente modo. Partiamo da un piano pascaliano (finito o infinito) e, fissata la retta r, consideriamo una rappresentazione ridotta dell'identità di G_r che sia *non vuota*, cioè nella quale il secondo membro della (1) contenga più di due fattori. Si riconosce subito che una tale rappresentazione si può sempre trovare. Ad esempio, fissati su r tre punti (distinti) A, B, C sia ω la proiettività di G_r che ha come punto unito A e scambia fra loro B e C; la ω^2 è l'identità ed ha una rappresentazione ridotta non vuota. Indichiamo i generatori della ω con i simboli introdotti nel n. 2 e cancelliamo dal piano un punto P distinto dai punti S_i e non

[23]) Cfr. [3].

[24]) Cfr. [2], pag. 417.

appartenente alle rette r_i. Detta I_0 la struttura che si ottiene dal piano con la soppressione del punto P, l'L-piano generato partendo da I_0 è tale che sulla retta r', a cui appartengono i punti della r di I_0, i generatori della ω determinano una proiettività non identica che ha come punti uniti tutti i punti di r.

Un ragionamento analogo (o addirittura più semplice perchè si può evitare la cancellazione del punto P) vale per gli L_1-piani.

NOTA: Mentre questo lavoro era in corso di stampa, abbiamo esposto i principali risultati in esso ottenuti in una comunicazione effettuata durante il convegno sui « Grundlagen der Geometrie » svoltosi in Oberwolfach dal 22 al 26 Aprile 1963.

In questa occasione ci sono state date alcune indicazioni, una delle quali esprime una notevole proprietà del gruppo $\mathfrak{G}$ (n. 4), mentre l'altra permette di rispondere in modo completo a una delle questioni lasciate aperte nel n. 5.

Precisamente siamo grati al Prof. R. Baer che ha richiamato la nostra attenzione sulla seguente circostanza (cfr. n. 4):

Il gruppo $\mathfrak{G}$ è localmente libero.

Infatti se consideriamo un numero finito di elementi di $\mathfrak{G}$, il cui insieme indichiamo con $\{\mathfrak{g}\}$, e chiamiamo $\mathfrak{G}'$ il sottogruppo di $\mathfrak{G}$ generato da questi, possono presentarsi due casi:

a) gli elementi di $\{\mathfrak{g}\}$ non sono legati da alcuna delle relazioni generatrici indicate nell'enunciato del teorema IV. Il gruppo $\mathfrak{G}'$ è quindi un gruppo libero.

b) Alcuni degli elementi di $\{\mathfrak{g}\}$ sono legati dalle relazioni generatrici. Ma poichè gli elementi di $\{\mathfrak{g}\}$ sono in numero finito è possibile esprimere alcuni di essi mediante gli inversi di altri, in modo da ottenere un insieme $\{\mathfrak{g}'\}$ a partire dal quale $\mathfrak{G}'$ è generato liberamente.

Risulta così provata la proprietà sopra enunciata. Resta aperta la questione di vedere se il gruppo $\mathfrak{G}$ stesso è o no un gruppo libero.

Siamo inoltre grati al dr. Salzmann che ci ha indirizzati a un risultato (in corso di pubblicazione) del dr. Joussen, mediante il quale il teorema VI si può sostituire con il seguente

TEOREMA VI': *In un piano libero il gruppo G_r è triplamente transitivo.*

Il teorema dimostrato dal dr. Joussen, mediante il quale si giunge subito al teorema VI', asserisce l'esistenza di un ordinamento lineare completo nei piani liberi, mentre invece l'ipotesi che G_r sia quattro volte transitivo sui punti di r contrasta con l'esistenza di un tale ordinamento.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARLOTTI A.: *La determinazione del gruppo delle proiettività di una retta in sè in alcuni particolari piani grafici finiti non desarguesiani.* « Bollettino U.M.I. », (3), 14, pp. 543-547 (1959).

[2] DEMBOWSKI P.: *Freie und offene projektive Ebenen.* « Math. Z. », 72, pp. 410-438 (1960).

[3] DITOR S.: *A new kind of free extension for projective planes.* « Canad. Math. Bull. », 5, pp. 167-170 (1962).

[4] HALL M.: *Projective planes.* « Trans. Amer. Math. Soc. », 54, pp. 229 277 (1943).

[5] HALL M.: *The theory of groups.* New York, 1959.

[6] JOUSSEN J.: *Ordnungsfunktionen in freien Ebenen.* « Abh. math. Seminar Univ. Hamburg », 24, pp. 239-263 (1960).

[7] KOPEJKINA L. I.: *Scomposizioni libere di piani proiettivi.* (In russo). « Isvestija Akad. Nauk. SSSR », S. Mat., 9, pp. 495-526 (1945).

[8] LOMBARDO RADICE L.: *Su alcuni caratteri dei piani grafici.* « Rendiconti seminario mat. Padova », 24, pp. 312-345 (1955).

[9] MAGARI R.: *Su una classe di simboli atta a rappresentare gli elementi di un piano grafico e su un teorema di riduzione a forma normale.* « Rend. Accad. Lincei », (8), 33, pp. 37-44 (1962).

[10] MAISANO, F.: *Sulla struttura dei piani liberi di M. Hall.* « Convegno internazionale Reticoli e Geometrie finite, Palermo 1957 ». Roma, 1958.

[11] PICKERT G.: *Projektive Ebenen.* Berlin, 1955.

[12] SKORNYAKOV L. A.: *Projective planes.* « Amer. Math. Soc. Translation », 99 (1953).

[13] v. STAUDT G. C. C.: *Geometria di posizione* (trad. a cura di M. PIERI). Torino (1889).