RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

Condizioni indipendenti ed equivalenti a quelle di mutua distributività

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 33 (1963), p. 91-98

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__91_0>

CONDIZIONI INDIPENDENTI ED EQUIVALENTI A QUELLE DI MUTUA DISTRIBUTIVITÀ

Nota *) *di* DOMENICO BOCCIONI (*a Padova*)

Gli studi eseguiti precedentemente sull'interdipendenza delle $4\nu^3$ condizioni di mutua distributività (1), (2), (3), (4) (si veda il n.° 1) di un insieme B avente ν ($\geqslant 2$) elementi ([2] [1]; [6], n.° 9) hanno permesso di determinare per ogni valore (non necessariamente finito) di $\nu \neq 3$, sottinsiemi di condizioni indipendenti ed equivalenti all'insieme delle $4\nu^3$ condizioni di mutua distributività di B. Nessuno di tali sottinsiemi era invece ancora noto nel caso $\nu = 3$, che presentava notevoli difficoltà, nonostante già si sapesse ([3]) che le 108 ($= 4 \cdot 3^3$) condizioni di mutua distributività dell'insieme $B = \{a, b, c\}$ non sono indipendenti.

Nel presente lavoro vengono appunto determinati sottinsiemi costituiti da condizioni indipendenti ed equivalenti alle 108 condizioni di mutua distributività dell'insieme $B = \{a, b, c\}$. Ciascuno dei sottinsiemi trovati (n.° 5) consta di 84 condizioni.

1. – Denotiamo con

$$M$$

---

*) Pervenuta in Redazione il 30 giugno 1962.
Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

[1]) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

l'insieme delle $4\nu^3$ condizioni di mutua distributività ([2], n.° 1):

$$(1) \qquad x(y+z) = (xy) + (xz) \,,$$

$$(2) \qquad (x+y)z = (xz) + (yz) \,,$$

$$(3) \qquad x + (yz) = (x+y)(x+z) \,,$$

$$(4) \qquad (xy) + z = (x+z)(y+z)$$

di un insieme B avente numero cardinale ν ($x, y, z \in B$). Le quattro eguaglianze (1), (2), (3), (4) verranno (per brevità) denotate rispettivamente con i simboli

$$(5) \qquad 1(x, y, z) \,, \quad 2(x, y, z) \,, \quad 3(x, y, z) \,, \quad 4(x, y, z) \,.$$

Supporremo costantemente nel seguito $\nu = 3$, e denoteremo con a, b, c i tre elementi di B:

$$B = \{a, b, c\} \,.$$

Lo scopo del presente lavoro è quello di determinare almeno un sottinsieme di M (insieme delle 108 condizioni di mutua distributività di $B = \{a, b, c\}$) che sia indipendente ([4], n.° 1) ed equivalente ([4], n.° 1) ed M.

Se R_0 è il sottinsieme di M definito all'inizio del n.° 2 di [6], poniamo:

$$M_0 = R_0 \cup 1[a, \; b, \; c] \cup 2[a, \; b, \; c] \cup 4[a, \; b, \; c] \cup 3[a, \; b, \; c] \,,$$

ricordando il significato del simbolo $i[x', y', z']$, detto nel n.° 1 di [6]. Il sottinsieme M_0 di M, così definito, consta di 60 condizioni.

Salvo avviso in contrario, conserviamo nel seguito tutte le definizioni e le notazioni adottate in [1] e in [2].

2. – Dimostriamo anzitutto che:

I) ***La terna*** (a, b, c) ***è*** (1)-***isolata*** ([2], p. 42) ***in un bisistema*** (2, 3, 4)-***distributivo*** ([2], p. 42) ***di sostegno*** $B = \{a, b, c\}$.

Infatti, un tale bisistema è, ad es., quello definito dalle due seguenti tabelle:

$$(6)\qquad \begin{array}{c|ccc} + & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & b & b & b \\ c & a & b & c \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & a & c \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \end{array}$$

E invero, qualunque siano $x, y, z \in B = \{a, b, c\}$, (1):
$a(b + c) = ab = a$, $(ab) + (ac) = a + c = c$; $a(y + y) = ay$, $(ay) + (ay) = ay$; $a(a + b) = ab = a$, $(aa) + (ab) = a + a = a$; $a(a + c) = ac = c$, $(aa) + (ac) = a + c = c$; $a(b + a) = ab = a$, $(ab) + (aa) = a + a = a$; $a(c + a) = aa = a$, $(ac) + (aa) = c + a = a$; $a(c + b) = ab = a$, $(ac) + (ab) = c + a = a$; $b(y + z) = b$, $(by) + (bz) = b + b = b$; $c(y + z) = c$, $(cy) + (cz) = c + c = c$; (2): $(x + y)a = x + y$, $(xa) + (ya) = x + y$; $(x + y)b = x + y$, $(xb) + (yb) = x + y$; $(x + x)c = xc$, $(xc) + (xc) = xc$; $(a + b)c = bc = b$, $(ac) + (bc) = c + b = b$; $(a + c)c = cc = c$, $(ac) + (cc) = c + c = c$; $(b + y)c = bc = b$, $(bc) + (yc) = b + (yc) = b$; $(c + a)c = ac = c$, $(cc) + (ac) = c + c = c$; $(c + b)c = bc = b$, $(cc) + (bc) = c + b = b$; (3): $a + (yz) = yz$, $(a + y)(a + z) = yz$; $b + (yz) = b$, $(b + y)(b + z) = bb = b$; $c + (yz) = yz$, $(c + y)(c + z) = yz$; (4): $(xy) + b = b$, $(x + b)(y + b) = bb = b$; $(by) + z = b + z = b$, $(b + z)(y + z) = b(y + z) = b$; $(xx) + z = x + z$, $(x + z)(x + z) = x + z$; $(ac) + c = c + c = c$, $(a + c)(c + c) = cc = c$; $(ca) + a = c + a = a$, $(c + a)(a + a) = aa = a$; $(ab) + a = a + a = a$, $(a + a)(b + a) = ab = a$; $(ac) + a = c + a = a$, $(a + a)(c + a) = aa = a$; $(ca) + c = c + c = c$, $(c + c)(a + c) = cc = c$; $(cb) + c = c + c = c$, $(c + c)(b + c) = cb = c$; $(ab) + c = a + c = c$, $(a + c)(b + c) = cb = c$; $(cb) + a = c + a = a$, $(c + a)(b + a) = ab = a$.

II) ***Fissata una qualunque condizione di mutua distributività di $B = \{a, b, c\}$ appartenente ad M_0*** **(n.º 1),** ***esiste un bisistema di sostegno B nel quale la condizione fissata non è soddisfatta, mentre tutte le rimanenti condizioni di mutua distributività di B vi sono invece soddisfatte.***

Infatti, se la condizione fissata appartiene ad R_0, la cosa è già nota ([6], n.° 2, II)). Esaminiamo dunque le condizioni di $M_0 - R_0$. E invero, vale la I); e dalla I) segue che la terna (c, b, a) è (2)-isolata nel bisistema, (1, 3, 4)-distributivo, opposto di quello definito dalla tabelle (6) (in virtù del lemma 13 di [1], pp. 22, e del lemma 2 di [2], p. 43). La terna (c, b, a) è allora (4)-isolata nel bisistema, (1, 2, 3)-distributivo, duale del precedente; mentre la terna (a, b, c) è (3)-isolata nel bisistema, (1, 2, 4)-distributivo, duale di quello definito dalle tabelle (6) (in virtù del lemma 2 di [5], n.° 2). Opportune immagini isomorfe dei quattro bisistemi sopra considerati sono gli ulteriori bisistemi la cui esistenza è affermata dalla II) (cfr. [1], n.° 2).

III) *Se un sottinsieme M' di M* (insieme delle 108 condizioni di mutua distributività di $B = \{a, b, c\}$) *è indipendente ed equivalente* ([4], n.° 1) *ad M, allora M' deve necessariamente contenere M_0* (n.° 1, penult. capov.):

$$M' \supseteq M_0 .$$

Infatti, se M' non contiene una condizione di M_0, la II) implicherebbe che M' non è equivalente ad M, contro l'ipotesi.

3. – Ricordando alcune posizioni fatte, per comodità espositiva, nel n.° 1 del presente lavoro e nel n.° 3 di [6], dimostriamo adesso che:

IV) ***Non esiste alcun bisistema di sostegno*** $B = \{a, b, c\}$ ***nel quale*** $1(a, a, b)$ ***non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte*** $1(a, b, a)$ ***e tutte le condizioni della classe*** $M_0 \cup P''_{ab} \cup Q'_{ba}$ (n.° 1; [6], n.° 3).

Infatti, supponiamo che un bisistema la cui esistenza è negata dalla IV) esista, chiamiamolo B°; e dimostriamo l'assurdità di questa ipotesi. Possiamo, fortunatamente, limitarci alla revisione della dimostrazione della XIII), fatta nel n.° 4 di [6], cambiandola soltanto in quei punti in cui è sfruttata la validità di una delle due condizioni

$$3(a, b, a) , \qquad 4(a, b, a)$$

(che non appartengono alla classe $M_0 \cup P''_{as} \cup Q'_{is}$). Ebbene, rileggendo la suddetta dimostrazione della XIII), si vede che tutti i casi e sottocasi ivi considerati vanno bene anche attualmente, ad eccezione dei tre qui sotto modificati.

$3_{2,1}$) Va bene fino all'eguaglianza $ac = c$. Ma allora $1(a, c, b)$ implica $a = ab = a(c + b) = (ac) + (ab) = c + a = c$, il che è assurdo.

3_3) Va bene fino all'eguaglianza $b + a = a$. Allora $3(b, a, a)$, $4(b, b, a)$ implicano risp.

$$b + c = c\,, \qquad bb = c\,,$$

quindi $2(a, b, c)$, $2(b, a, c)$, $1(b, c, a)$ comportano successivamente $bc \neq a$,

$$bc = b\,, \qquad ba = b\,,$$

e perciò $1(b, a, b)$ implica $b = bc = b(a + b) = (ba) + (bb) = b + c = c$, il che è assurdo.

7) I due sottocasi 7_1) e 7_2) (v. [3], pp. 60-61) vanno bene, (tenuto conto dell'osservazione fatta in [6]).

7_3) (v. [3], p. 61). Va bene fino all'eguaglianza $a + b = a$. Allora $2(a, b, a)$, $3(a, b, b)$ implicano risp.

$$ba = b\,, \qquad bb = b\,,$$

e perciò $2(b, b, b)$ comporta $b + b \neq a$. Quindi poichè $1(b, a, a)$ implica

$$bc = b + b\,,$$

risulta pure $bc \neq a$. Ne segue, per la $3(a, b, c)$, $bc = c$, quindi

$$b + b = c\,,$$

e perciò $1(b, a, b)$ comporta $b = ba = b(a + b) = (ba) + (bb) = b + b = c$, il che è assurdo.

V) *Non esiste alcun bisistema di sostegno* $B = \{a, b, c\}$ *nel quale* $1(a, b, a)$ *non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte* $1(a, a, b)$ *e tutte le condizioni della classe* $M_0 \cup Q''_{as} \cup P'_{is}$ (n.o 1; [6], n.o 3).

Infatti, se un tal bisistema esistesse, chiamiamolo B^o, i suoi gruppoidi additivo e moltiplicativo non potrebbero essere opposti (v. [6], n.º 4, ult. capov.); dunque esisterebbe il bisistema α-opposto di questo B^o, il quale (per il lemma 1 di [5], n.º 2) sarebbe un bisistema la cui esistenza è negata dalla precedente IV).

4. – Se u, v sono due qualsiasi elementi *distinti* di $B = \{a, b, c\}$, con procedimento e ragionamenti perfettamente analoghi a quelli del n.º 5 di [6] (ove si partiva dalle proposizioni XIII) e XIV)), si ottengono dalle precedenti proposizioni IV) e V) le seguenti quattro altre.

VI) *Non esiste alcun bisistema di sostegno* $B = \{a, b, c\}$ *nel quale* $1(u, u, v)$ (*risp.* $2(u, v, v)$) *non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte* $1(u, v, u)$ (*risp.* $2(v, u, v)$) *e tutte le condizioni della classe* $M_0 \cup P''_{uv} \cup Q'_{vu}$ (n.º 1; [6], n.º 3). ($u \neq v$; $u, v \in B$.)

VII) *Non esiste alcun bisistema di sostegno* $B = \{a, b, c\}$ *nel quale* $3(u, u, v)$ (*risp.* $4(u, v, v)$) *non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte* $3(u, v, u)$ (*risp.* $4(v, u, v)$) *e tutte le condizioni della classe* $M_0 \cup P'_{uv} \cup Q''_{uv}$ (n.º 1; [6], n.º 3). ($u \neq v$; $u, v \in B$.)

VIII) *Non esiste alcun bisistema di sostegno* $B = \{a, b, c\}$ *nel quale* $1(u, v, u)$ (*risp.* $2(v, u, v)$) *non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte* $1(u, u, v)$ (*risp.* $2(u, v, v)$) *e tutte le condizioni della classe* $M_0 \cup Q''_{uv} \cup P'_{vu}$ (n.º 1; [6], n.º 3). ($u \neq v$; $u, v \in B$.)

IX) *Non esiste alcun bisistema di sostegno* $B = \{a, b, c\}$ *nel quale* $3(u, v, u)$ (*risp.* $4(v, u, v)$) *non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte* $3(u, u, v)$ (*risp.* $4(u, v, v)$) *e tutte le condizioni delle classe* $M_0 \cup Q'_{vu} \cup P''_{vu}$ (n.º 1; [6], n.º 3). ($u \neq v$; $u, v \in B$.)

5. – Se u, v sono due qualsiasi elementi distinti di $B = \{a, b, c\}$, denotiamo con

$$K_{uv}$$

uno qualunque dei due insiemi seguenti (costituiti, ciascuno, da otto condizioni di mutua distributività di $B = \{a, b, c\}$):

$$P'_{uv} \cup P'_{vu} \cup Q''_{uv} \cup Q''_{vu}\,, \tag{7}$$

$$P''_{uv} \cup P''_{vu} \cup Q'_{uv} \cup Q'_{vu} \tag{8}$$

([6], n.° 3).

Si osservi che

$$K_{uv} \subset R_{uv}\,,$$

dove R_{uv} è il sottinsieme di $M - M_0$ (n.° 1) definito nel n.° 7 di [6] (1° capov.). R_{uv} non è poi altro che la riunione dei due insiemi (disgiunti) (7) e (8).

X) ***Fissata una qualsiasi delle*** (otto) ***condizioni costituenti l'insieme*** K_{uv} (questo n.°, 1° capov.), ***esiste un bisistema di sostegno*** $B = \{a, b, c\}$ ***nel quale la condizione fissata non è soddisfatta, mentre vi sono invece soddisfatte sia le*** (sette) ***condizioni di*** K_{uv} ***diverse da quella fissata, sia tutte le condizioni di*** $M - R_{uv}$ (questo n.°, 2° capov.). ($u \neq v$; $u, v \in B$.)

Infatti, se $(u, v) = (a, b)$, un tale bisistema è quello fornito dalla IV) di [6] (n.° 2), oppure è l'opposto di questo ([1], pp. 22, lemma 13, [2], p. 43, lemma 2), oppure è l'immagine isomorfa di uno dei precedenti due mediante $a \longrightarrow b$, $b \longrightarrow a$, $c \longrightarrow c$ (cfr. [1], n.° 2), oppure è uno dei duali dei precedenti quattro ([5], n.° 2, lemma 2). Se $(u, v) \neq (a, b)$, un tale bisistema è l'immagine isomorfa di uno dei precedenti otto mediante la corrispondenza biunivoca di B su sé stesso in cui $a \longrightarrow u$, $b \longrightarrow v$.

XI) ***Se in un bisistema di sostegno*** $B = \{a, b, c\}$ ***sono soddisfatte sia le condizioni costituenti l'insieme*** M_0 (n.° 1), ***sia le*** (otto) ***condizioni costituenti l'insieme*** K_{uv} (questo n.°, 1° capov.), ***allora, in questo bisistema, sono pure soddisfatte le*** (otto) ***condizioni di*** $R_{uv} - K_{uv}$ (questo n.°, 2° capov.). ($u \neq v$; $u, v \in B$.)

Infatti, questa proposizione XI) è conseguenza delle proposizioni del n.° 4.

TEOREMA: ***Sia*** M ***l'insieme delle*** 108 ***condizioni di mutua distributività di*** $B = \{a, b, c\}$ (n.° 1). ***Si scelgano uno qualsiasi dei due insiemi*** K_{ab} (si veda il 1° capoverso di questo n.° 5), ***uno*** *qualsiasi dei due insiemi* K_{ac} *ed uno qualsiasi dei due insiemi* K_{bc}. *Le* (ventiquattro) *condizioni costituenti i tre insiemi così scelti e le* (sessanta) *condizioni costituenti l'insieme* M_0 (n.° 1) *formano, complessivamente, un sottinsieme,* M', *di* M *indipendente ed equivalente* ([4], n.° 1) *ad* M.

Dimostrazione: L'indipendenza di M' è provata dalle due proposizioni II), X) (n.^{i} 2, 5); l'equivalenza di M' ad M è provata dalla proposizione XI) (n.° 5).

I sottinsiemi M' di M determinati mediante il teorema precedente sono evidentemente otto, e ciascuno di essi è formato da 84 condizioni.

Uno di questi otto sottinsiemi M' di M è, ad es., il seguente ([6], n.^{i} 1, 2): $1[a, b, a] \cup 2[a, b, a] \cup 4[b, a, a] \cup 3[a, a, b] \cup M_0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOCCIONI D.: *Indipendenza delle condizioni di distributività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 1-30.

[2] BOCCIONI D.: *Indipendenza delle condizioni di mutua distributività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 40-49.

[3] BOCCIONI D.: *Dipendenza delle condizioni di mutua distributività nei bisistemi di ordine* 3, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 50-67.

[4] BOCCIONI D.: *Condizioni di distributività ed associatività unilaterali*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 30 (1960), pp. 178-193.

[5] BOCCIONI D.: *Indipendenza delle condizioni di doppia e di tripla distributività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 33 (1963).

[6] BOCCIONI D.: *Condizioni di mutua distributività con ripetizioni*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 33 (1963).