TOMASO MILLEVOI

Immersione di un anello in uno « minimale » dotato di unità

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 33 (1963), p. 85-90

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__85_0>

IMMERSIONE DI UN ANELLO IN UNO «MINIMALE» DOTATO DI UNITÀ

Nota *) *di* TOMASO MILLEVOI (*a Padova*) **)

È noto [1]) che ogni anello A può essere immerso in uno A_1 dotato di unità; dirò che A_1 è « minimale » se soddisfa alla seguente condizione: ogniqualvolta A sia immerso in un anello R_1 con unità, R_1 contenga un sottoanello con unità R_1^* contenente A, di cui A_1 sia immagine omomorfa.

$$(R_1 \supset A) \Rightarrow \{ \exists R_1^* : (R_1 \supset R_1^* \supset A) \ , \quad (R_1^* \rightarrow A_1 \rightarrow O) \} .$$

Mi propongo di trovare condizioni per l'esistenza di un siffatto A_1 e di indicarne, sotto tali condizioni, una costruzione canonica.

1. - Sia dato un anello A; atteggiamo [2]) ad anello l'insieme $A \times Z$ (Z essendo l'anello degli interi) con le:

$$(\alpha, n) + (\beta, m) = (\alpha + \beta, n + m)$$
$$(\alpha, n) \cdot (\beta, m) = (\alpha\beta + m\alpha + n\beta, nm)$$

---

*) Pervenuta in redazione il 30 giugno 1962.
Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.
**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

[1]) Cfr. ad es. U. MORIN, *Algebra Astratta*; CEDAM, 1955; pag. 185; oppure N. JACOBSON, *Lectures in Abstract Algebra*. Vol. I°, 1951; pag. 84; oppure N. BOURBAKI IV, Livre II, *Algèbre*. Ch. 1: «Structures algebriques» 3e éd. pag. 132.

[2]) Idem.

(α, $\beta \in A$; $m, n \in Z$; $m\alpha = \alpha + ... + \alpha$, somma di m addendi uguali ad α).

$A \times Z$ risulta quindi un anello dotato di unità e contenente un sottoanello isomorfo ad A, precisamente l'insieme delle coppie $(\alpha, 0)$.

2. - Consideriamo l'insieme Σ degli elementi di Z così definito:

$$n \in \Sigma = \exists \nu \in A : n\alpha = \nu\alpha = \alpha\nu \quad \text{per ogni} \quad \alpha \in A .$$

Σ non è vuoto poichè contiene almeno lo zero; esso risulta inoltre un ideale di Z, infatti:

$$\begin{aligned}
&n, \ m \in \Sigma \Rightarrow \exists \nu, \ \mu : \\
&n\alpha = \nu\alpha = \alpha\nu \\
&m\alpha = \mu\alpha = \alpha\mu \\
&(m - n)\alpha = (\mu - \nu)\alpha = \alpha(\mu - \nu) \Rightarrow m - n \in \Sigma ; \\
&r \in Z \Rightarrow (rn)\alpha = r(n\alpha) = r(\nu\alpha) = r(\alpha\nu) = \\
&\qquad\qquad = (r\nu)\alpha = \alpha(r\nu) \Rightarrow rn \in \Sigma .
\end{aligned}$$

Essendo Z anello ad ideali principali, Σ è generato da un elemento $s \geqslant 0$:

$$\Sigma = (s) .$$

$$\text{(i)} \qquad s \in \Sigma \Rightarrow \exists \sigma : s\alpha = \sigma\alpha = \alpha\sigma .$$

Se $s = 0$, prendiamo $\sigma = 0$.

3. - Consideriamo, in $A \times Z$ l'ideale principale sinistro generato dall'elemento $(\sigma, -s)$. Essendo σ commutabile con ogni elemento di A, tale ideale coincide con l'ideale destro generato dall'elemento stesso.

Nell'omomorfismo φ di $A \times Z$ sull'anello dei residui $(A \times Z)/[(\sigma, -s)]$ il sottoanello di $A \times Z$ isomorfo ad A è trasformato in un sottoanello di $(A \times Z)/[(\sigma, -s)]$ ancora isomorfo ad A. Infatti

$$\begin{aligned}
&\varphi(\alpha, 0) = 0 \Rightarrow (\alpha, 0) = (\beta, m) \cdot (\sigma, -s) \Rightarrow \\
&(-ms = 0), \ (\beta\sigma - s\beta + m\sigma = \alpha) \Rightarrow [(m = 0) \vee (s = 0)] ;
\end{aligned}$$

$$(m = 0) \Rightarrow (\alpha = \beta\sigma - s\beta + m\sigma = m\sigma = 0)$$
$$(s = 0) \Rightarrow (\sigma = 0) \Rightarrow (\alpha = m\sigma = 0) .$$

Quindi in ogni caso $[\varphi(\alpha, 0) = 0] \Rightarrow \alpha = 0$.

L'anello $(A \times Z)/[(\sigma, -s)]$, ovviamente dotato di unità, contiene quindi un sottoanello isomorfo ad A.

4. - Supponiamo che si verifichi uno dei due casi

a) $s = 0$

b) $s \neq 0$, ma esista un solo σ associato ad s nella (i).

In queste ipotesi l'anello $A_1 = (A \times Z)/[(\sigma, -s)]$ è minimale. Infatti

$$a) \text{ se } \quad s = 0 , \quad \sigma = 0 \quad \text{ed} \quad A_1 \cong A \times Z .$$

Sia $R_1 \supset A$, consideriamo il sottogruppo additivo generato (per somma) in R_1 dal sistema i cui elementi sono quelli di A e l'unità. Tale sottogruppo risulta ovviamente un sottoanello R_1^* contenente A. Ogni elemento di R_1^* può esprimersi (in R_1) come somma di un elemento di A e di un multiplo intero dell'unità.

$$t \in R_1^* \Leftrightarrow t = \alpha + n .$$

D'altra parte questa rappresentazione è unica, infatti

$$(\alpha + n = \beta + m) \Leftrightarrow (\alpha - \beta = m - n) \Rightarrow (m - n \in \Sigma) \Rightarrow$$
$$(m - n = 0) \Rightarrow (\alpha - \beta = 0) \Leftrightarrow (\alpha = \beta , \ m = n) .$$

Si verifica quindi immediatamente che R_1^* è isomorfo (canonicamente) ad $A \times Z$.

b) L'unicità di σ equivale, in questo caso, alla non esistenza in A di elementi che siano simultaneamente annichilatori destri e sinistri; sia infatti ε un siffatto elemento, allora evidentemente

$$s\alpha = \sigma\alpha = \alpha\sigma = (\sigma + \varepsilon)\alpha = \alpha(\sigma + \varepsilon) .$$

Viceversa se ad s sono associati entrambi gli elementi σ' e σ'', $(\sigma' - \sigma'')$ è annichilatore sia destro che sinistro di A.

Sia $R_1 \supset A$, consideriamo, come nel caso precedente il sottoanello $R_1^* \supset A$.

$$t \in R_1^* \Leftrightarrow t = \alpha + n \,.$$

Consideriamo l'applicazione φ (canonica): $(A \times Z) \to R_1^*$ così definita $\varphi(\alpha, n) = \alpha + n$. φ risulta di più un omomorfismo suriettivo. Il nucleo di φ risulta composto da quegli elementi $(\varrho, -r)$ tali che $\varrho = r$ in R_1^*. r appartiene quindi a Σ ed è multiplo di s: $r = qs$; ϱ, per l'assenza di annichilatori, è uguale quindi a $q\sigma$ e si ha $(\varrho, -r) = q(\sigma, -s) \in [(\sigma, -s)]$.
Il nucleo di φ è quindi contenuto in $[(\sigma, -s)]$.

Si ha allora che

$$R_1^*/\varphi[(\sigma, -s)] \cong (A \times Z)/[(\sigma, -s)] = A_1 \,.$$

5. - Nelle ipotesi *a*) o *b*) del n. 4 l'anello A_1 ha la stessa caratteristica k di A.

Se $s = 0$ la cosa è evidente.

Osserviamo che $k \in \Sigma$ in quanto $k\alpha = 0\alpha = \alpha 0$. Quindi k è multiplo di s: $k = rs$. D'altra parte al numero rs è associato $r\sigma$ e (nell'ipotesi *b*)) $r\sigma$ soltanto, per l'assenza di annichilatori. Ne consegue che $r\sigma = 0$. All'ideale $[(\sigma, -s)]$ appartiene anche l'elemento $(0, -r)\cdot(\sigma, -s) = (-r\sigma, rs) = (0, k)$, la qual cosa assicura che la caratteristica di A_1 non è superiore a k. D'altra parte A_1, contenendo un sottoanello isomorfo ad A non può avere caratteristica inferiore ad A, il che prova l'asserto.

6. - Pur non essendo verificate nè l'ipotesi *a*) nè la *b*), se tra gli associati di s c'è lo 0, convenendo di scegliere $\sigma = 0$, otteniamo, col procedimento del n. 3, un anello della medesima caratteristica di A. Ciò risulta evidente non appena si osservi che in questo caso la caratteristica è uguale ad s.

7. - Nel caso che A sia finito, se esiste un anello minimale A_1, esso è, ovviamente, individuato (a meno di isomorfismi). Altrettanto non si può dire in generale.

Sia ad esempio $A = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} Z_i$, l'anello delle successioni di numeri interi, dove gli elementi si sommano e si moltiplicano per colonna. A è dotato di unità ed è quindi un A_1. Se consideriamo ora l'anello $B_1 = Z/(2) \oplus A$, B_1 contiene un sottoanello isomorfo ad A, ed è anche immagine omomorfa di A_1 nell'omomorfismo proprio φ che manda il primo fattore diretto Z di A_1 su $Z/(2)$ e l'n-esimo fattore Z nell'$(n$-$1)$-esimo con l'identità.

B_1 è quindi anch'esso minimale per A, ma A_1 e B_1 non sono isomorfi.

8. - Verifichiamo che, se non sussiste alcuna delle condizioni *a*), *b*) del n. 4, può non esistere un anello minimale per A.

Nell'anello $Z/(12)$ delle classi modulo dodici consideriamo il sottoanello (ideale) dei pari. Esso è un anello A composto da sei elementi: $\bar{0}\ \bar{2}\ \bar{4}\ \bar{6}\ \bar{8}\ \overline{10}$, privo di unità e dotato di un annichilatore proprio, il $\bar{6}$. Con riferimento al n. 2, $\Sigma = (2)$. Al 2 però sono associati due elementi, il $\bar{2}$ e l'$\bar{8}$.

L'anello $(A \times Z)/[(\bar{2}, -2)]$ è isomorfo a $Z/(12)$, e nell'omomorfismo $\varrho \colon A \times Z \to Z/(12)$ l'immagine di A è proprio il sottoanello dei pari.

L'anello $B_1 = (A \times Z)/[(\bar{8}, -2)]$ è composto dagli elementi

$$\begin{array}{llllll} \bar{0} & 1^* & 2^* = \bar{8} & 3^* = \bar{8} + 1^* & 4^* = \bar{4} & 5^* = \bar{4} + 1^* \\ \bar{2} & \bar{2} + 1^* & \overline{10} & \overline{10} + 1^* & \bar{6} & \bar{6} + 1^* \end{array}$$

dove n^* indica la classe dei resti modulo 6 cui n appartiene, $\bar{m}$ indica $\Psi(\bar{m}, 0)$ e $1^* = \Psi(0, 1)$, essendo Ψ l'omomorfismo naturale di

$$A \times Z \to (A \times Z)/[(\bar{8}, -2)] ;$$

dove inoltre somme e prodotti si eseguiscono tenendo conto della commutatività, delle relazioni già scritte e del fatto che 1^* è unità.

In $Z/(12)$, A ammette due sole unità locali, precisamente $\bar{1}$ e $\bar{7}$. Il sottoanello generato da A e $\bar{1}$ e quello generato da A e $\bar{7}$ (in $Z/(12)$) coincidono con $Z/(12)$.

In B_1, A ammette pure due unità locali, 1^* e $1^* + \bar{6}$. Anche qui i due sottoanelli generati da A e 1^*, e da A e $1^* + \bar{6}$ coincidono con B_1.

Se esistesse un A_1 questo dovrebbe essere immagine omomorfa e di $Z/(12)$ e di B_1. $Z/(12)$ è di caratteristica 12, B_1 di caratteristica 6, A di caratteristica 6. A_1 dovrebbe essere quindi di caratteristica 6. $Z/(12)$ e B_1 hanno lo stesso numero di elementi e quindi B_1 non può essere immagine omomorfa di $Z/(12)$, e quindi non è minimale. Un eventuale A_1 non è quindi isomorfo a B_1. L'omomorfismo suriettivo φ: $B_1 \rightarrow A_1$ dovrebbe quindi esser proprio (con nucleo non nullo), ciò implica che A_1 dovrebbe avere al più 6 elementi, il che è palesemente assurdo in quanto A ha 6 elementi.

9. - Come del resto già mostra l'esempio del n. 8, non è detto che risulti spontaneo l'imporre ad un $R_1 \supset A$ la medesima caratteristica di A.

Se consideriamo, ad esempio, il sottoanello A dei pari nell'anello $Z/(8)$, A risulta di caratteristica 4. $\Sigma = (2)$, al 2 sono associati $\bar{2}$ e $\bar{6}$ essendo il $\bar{4}$ un annichilatore. $\bar{2}$ e $\bar{6}$ hanno entrambi (interpretando A come gruppo additivo) ordine 4 e quindi

$$(A \times Z)/[(\bar{2}, -2)] \quad \text{e} \quad (A \times Z)/[(\bar{6}, -2)]$$

sono di caratteristica 8, ed entrambi isomorfi a $Z/(8)$. Un anello R_1 di caratteristica 4 che contenga A contiene invece un sottoanello, quello generato da A e dall'unità, isomorfo a $(A \times Z)/[(\bar{0}, -4)]$, composto da 16 elementi.