DOMENICO BOCCIONI

**Condizioni di mutua distributività con ripetizioni**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 33 (1963), p. 60-84

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__60_0>

# CONDIZIONI DI MUTUA DISTRIBUTIVITÀ CON RIPETIZIONI

*Nota* *) *di* DOMENICO BOCCIONI (*a Padova*)

Se per tre elementi $x$, $y$, $z$ di un insieme $B$, avente numero cardinale (non necessariamente finito) $\nu \geqslant 2$, vale almeno una delle eguaglianze $x = y$, $y = z$, $z = x$, la terna (ordinata) $(x, y, z)$ viene detta una terna con ripetizioni.

Le eguaglianze che si ottengono dalle seguenti quattro:

$$x(y + z) = (xy) + (xz)\,, \qquad (x + y)z = (xz) + (yz)\,,$$
$$x + (yz) = (x + y)(x + z)\,, \qquad (xy) + z = (x + z)(y + z)\,,$$

in corrispondenza a tutte le terne con ripetizioni $(x, y, z)$ di elementi di $B$, vengono dette condizioni di mutua distributività con ripetizioni di $B$, e il loro insieme viene denotato con $R$.

Era già noto da precedenti lavori ([1] [1]) e [2]) che le condizioni di $R$ non sono indipendenti (si veda, ad es., l'introduzione di [5]) se $\nu = 2$, e che sono indipendenti se $\nu \geqslant 4$.

Nel presente lavoro si dimostra che le condizioni di $R$ non sono indipendenti neanche per $\nu = 3$, e si determinano, in entrambi i casi $\nu = 2$ e $\nu = 3$, tutti i sottoinsiemi di $R$ indipendenti ed equivalenti ad $R$.

---

*) Pervenuta in Redazione il 25 giugno 1962.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

[1]) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

La situazione incontra nel caso $\nu = 3$ è notevolmente complessa: i sottinsiemi indipendenti ed equivalenti ad $R$ (che consta di 84 condizioni) sono 64000, e ciascuno di essi è formato da 72 condizioni (n.o 8, teor. 1).

Se $\nu = 2$, $R$ coincide con l'insieme delle $4\nu^3$ condizioni di mutua distributività di $B$ ([2]), ed ogni sottinsieme indipendente ed equivalente ad $R$ è formato da 12 condizioni (n.o 9, teor. 2).

**1.** – Denotiamo con

$$M$$

l'insieme delle $4\nu^3$ condizioni di mutua distributività ([2], n.o 1):

$$x(y + z) = (xy) + (xz)\,, \tag{1}$$

$$(x + y)z = (xz) + (yz)\,, \tag{2}$$

$$x + (yz) = (x + y)(x + z)\,, \tag{3}$$

$$(xy) + z = (x + z)(y + z) \tag{4}$$

di un insieme $B$ avente numero cardinale (non necessariamente finito) $\nu \geqslant 2$ ($x, y, z \in B$). Le quattro eguaglianze (1), (2), (3), (4) verranno (per brevità) denotate rispettivamente con i simboli

$$1(x, y, z)\,, \quad 2(x, y, z)\,, \quad 3(x, y, z)\,, \quad 4(x, y, z)\,. \tag{5}$$

e si diranno *relative* alla terna (ordinata) $(x, y, z)$ di elementi di $B$.

Se vale una almeno delle tre eguaglianze $x = y$, $y = z$, $z = x$, la terna $(x, y, z)$ si dirà una terna *con ripetizioni*. Denoteremo con

$$R$$

l'insieme costituito dalle eguaglianze (1), (2), (3), (4) relative a tutte le terne con ripetizioni di elementi di $B$. L'insieme $R$ è dunque un sottinsieme di $M$, e coincide con $M$ se, e solo se, $\nu = 2$.

Le eguaglianze costituenti $R$ si diranno *condizioni di mtua distributività con ripetizioni* di $B$.

Lo scopo del presente lavoro è di determinare tutti quei sottoinsiemi, $R'$, di $R$ che sono indipendenti ([4], n.° 1) ed equivalenti ([4], n.° 1)) ad $R$. Restano, a tal fine, da esaminare soltanto i due casi $\nu = 2$, $\nu = 3$, poiché già sappiamo ([2], n.° 1, teor. 1) che:

I) *Se il numero cardinale $\nu$ di un insieme $B$ è $\geqslant 4$, l'insieme $R$, delle condizioni di mutua distributività con ripetizioni di $B$, è indipendente* ([4], n.° 1).

Fissiamo tre elementi distinti $a$, $b$, $c$ dell'insieme $B$, l'ultimo dei quali, $c$, presentandosi soltanto se $\nu > 2$. Con $B^3$ denotiamo l'insieme di tutte le $\nu^3$ terne (ordinate) di elementi di $B$.

Pensiamo $B^3$ suddiviso nelle classi, a due a due disgiunte, delle quali si parla nel n° 2 di [1]. Ognuna di queste classi verrà chiamata un *tipo* (di $B^3$), ed il simbolo

$$[x, y, z]$$

denoterà il tipo contenente la terna $(x, y, z)$. I tipi sono cinque se $\nu > 2$, quattro se $\nu = 2$.

Inoltre, se $x'$, $y'$, $z'$ sono elementi di $B$, il simbolo

$$i[x', y', z']$$

denoterà l'insieme di tutte le eguaglianze $i(x, y, z)$ con $(x, y, z) \in [x', y', z']$. ($i = 1, 2, 3, 4$.)

Salvo avviso in contrario, conserviamo nel seguito tutte le definizioni e le notazioni adottate in [1] e in [2].

**2.** – Esaminiamo dapprima il caso $\nu = 3$, lo studio del quale occuperà la maggior parte del seguito (n.$^i$ 2-8). Poniamo (n.° 1):

$$\begin{aligned} R_0 = {} & 1[a, a, a] \cup 2[a, a, a] \cup 4[a, a, a] \cup 3[a, a, a] \cup \\ & 1[b, a, a] \cup 2[a, a, b] \cup 4[a, a, b] \cup 3[b, a, a]\,, \end{aligned}$$

ed osserviamo che:

II) ***Fissata una qualunque condizione di mutua distributività di $B = \{a, b, c\}$ appartenente ad $R_0$, esiste un bisistema di*** *sostegno $B$ nel quale la condizione fissata non è soddisfatta, mentre tutte le rimanenti condizioni di mutua distributività di $B$ vi sono invece soddisfatte.*

Infatti, esistono ([2], n.° 3, punti 1°) e 3°)) due bisistemi (2, 3, 4)-distributivi ([2], p. 42) di sostegno $B = \{a, b, c\}$ in cui risp. sono (1)-isolate ([2], p. 42) le terne $(a, a, a)$, $(b, a, a)$; le terne $(a, a, a)$, $(a, a, b)$ sono allora ([1], p. 22, lemma 13, [2], p. 43, lemma 2) (2)-isolate risp. nei due bisistemi, (1, 3, 4)-distributivi, opposti dei due precedenti; le terne $(a, a, a)$, $(b, a, a)$ sono ([5], n.° 2, lemma 2) (3)-isolate risp. nei due bisistemi, (1, 2, 4)-distributivi, duali dei due considerati all'inizio; infine le terne $(a, a, a)$, $(a, a, b)$ sono ([5], n.° 2, lemma 2) (4)-isolate risp. nei due bisistemi, (1, 2, 3)-distributivi, duali dei due considerati in secondo luogo. Opportune immagini isomorfe degli otto bisistemi ora considerati sono i residui bisistemi la cui esistenza è affermata dalla II) (cfr. [1], n.° 2).

III) $1(a, a, b)$ *e* $1(a, b, a)$ *sono le uniche due condizioni di mutua distributività con ripetizioni di* $B = \{a, b, c\}$ *non soddisfatte in un bisistema di sostegno* $B$.

Infatti, un tale bisistema è, ad es., quello definito dalle due seguenti tabelle:

$$(6) \qquad \begin{array}{c|ccc} + & a & b & c \\ \hline a & a & b & a \\ b & b & b & b \\ c & c & b & c \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & b & a & b \\ b & b & b & b \\ c & b & b & b \end{array}$$

IV) $1(a, a, b)$ *e* $2(a, b, a)$ *sono le uniche due condizioni di mutua distributività di* $B = \{a, b, c\}$ *non soddisfatte in un bisistema di sostegno* $B$.

Infatti, un tale bisistema è, ad es., quello definito dalle due seguenti tabelle:

$$(7) \qquad \begin{array}{c|ccc} + & a & b & c \\ \hline a & c & a & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & c & b & c \\ c & c & c & c \end{array}$$

come agevolmente si verifica (cfr. [1], p. 8, ult. capov.).

V) $1(a, a, b)$ *e* $4(a, b, a)$ ***sono le uniche due condizioni di mutua distributività con ripetizioni di*** $B = \{a, b, c\}$ ***non soddisfatte in un bisistema di sostegno*** $B$.

Infatti, un tale bisistema è, ad es., quello definito dalle due seguenti tabelle:

(8)

| $+$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $c$ | $b$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $c$ |

| $\cdot$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $c$ | $a$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$ |

VI) $1(a, a, b)$ *e* $3(a, b, a)$ ***sono le uniche due condizioni di mutua distributività con ripetizioni di*** $B = \{a, b, c\}$ ***non soddisfatte in un bisistema di sostegno*** $B$.

Infatti, un tale bisistema è, ad es., il $\mu$-opposto del duale del bisistema definito dalle tabelle (8) (in virtù dei lemmi 2 e 3 di [5], n.º 2).

VII) $1(a, a, b)$ *e* $3(a, a, b)$ ***sono le uniche due condizioni di mutua distributività con ripetizioni di*** $B = \{a, b, c\}$ ***non soddisfatte in un bisistema di sostegno*** $B$.

Infatti, un tale bisistema è, ad es., quello definito dalle due seguenti tabelle:

(9)

| $+$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $c$ | $a$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$ |

| $\cdot$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$ |

VIII) $1(a, a, b)$ *e* $4(a, b, b)$ ***sono le uniche due condizioni di mutua distributività di*** $B = \{a, b, c\}$ ***non soddisfatte in un bisistema di sostegno*** $B$.

Infatti, un tale bisistema è, ad es., quello definito dalle tabelle (18) di [1], p. 27 (cfr. [1], p. 8, ult. capov.).

IX) $1(a, b, a)$ *e* $4(a, b, a)$ ***sono le uniche due condizioni di mutua distributività con ripetizioni di*** $B = \{a, b, c\}$ ***non soddisfatte in un bisistema di sostegno*** $B$.

Infatti, un tale bisistema è ad es. ([5], n.º 2, lemma 1) l'$\alpha$-opposto di quello definito dalle precedenti tabelle (9).

X) $1(a, b, a)$ *e* $3(b, a, b)$ *sono le uniche due condizioni di mutua distributività di* $B = \{a, b, c\}$ *non soddisfatte in un bisistema di sostegno* $B$.

Infatti, un tale bisistema è ad es. ([5], n.° 2, lemma 1) l'$\alpha$-opposto di quello definito dalle tabelle (18) di [1], p. 27.

**3.** – Pensiamo ripartite le condizioni di mutua distributività con ripetizioni di $B = \{a, b, c\}$ non appartenenti ad $R_0$ (n.° 2), cioè le condizioni di $R - R_0$, in dodici classi ognuna costituita da quattro condizioni; precisamente poniamo (n.° 1):

$$P_{uv} = \{1(u, u, v),\ 2(v, u, u),\ 4(v, u, u),\ 3(u, u, v)\},$$
$$Q_{uv} = \{1(u, v, u),\ 2(u, v, u),\ 4(u, v, u),\ 3(u, v, u)\},$$

$u$, $v$ essendo due qualsiasi elementi *distinti* di $B = \{a, b, c\}$.

XI) ***Fissate comunque due condizioni di mutua distributività con ripetizioni di*** $B = \{a, b, c\}$ ***appartenenti una alla classe*** $P_{uv}$ ***e l'altra alla classe*** $Q_{uv}$, ***esiste un bisistema di sostegno*** $B$ ***nel quale le due condizioni fissate non sono soddisfatte, mentre vi sono invece soddisfatte tutte le rimanenti condizioni di mutua distributività con ripetizioni di*** $B$. ($u \neq v$; $u, v \in B$.)

Infatti, se $(u, v) = (a, b)$, un tale bisistema è uno dei quattro forniti dalle III), IV), V), VI) (n.° 2), oppure ([1], p. 22, lemma 13, [2], p. 43, lemma 2) è uno degli opposti di questi quattro, oppure ([5], n.° 2, lemma 2) è uno dei duali dei precedenti otto; se $(u, v) \neq (a, b)$, un tale bisistema è l'immagine isomorfa di uno dei precedenti sedici (cfr. [1], n.° 2) mediante la corrispondenza biunivoca di $B$ su sé stesso in cui $a \longrightarrow u$, $b \longrightarrow v$.

Pensiamo ora ripartite le condizioni di mutua distributività con ripetizioni di $B = \{a, b, c\}$ non appartenenti ad $R_0$ (n.° 2) in ventiquattro classi, ognuna costituita da due condizioni; precisamente poniamo (n.° 1):

$$P'_{uv} = \{1(u, u, v),\ 2(u, v, v)\},$$
$$P''_{uv} = \{4(u, v, v),\ 3(u, u, v)\},$$
$$Q'_{uv} = \{1(u, v, u),\ 2(v, u, v)\},$$
$$Q''_{uv} = \{4(u, v, u),\ 3(v, u, v)\},$$

$u$, $v$ essendo due qualsiasi elementi *distinti* di $B = \{a, b, c\}$.

XII) *Fissate comunque due condizioni di mutua distributività con ripetizioni di* $B = \{a, b, c\}$ *appartenenti una alla classe* $P'_{uv}$ *(risp.* $Q'_{uv}$*) e l'altra alla classe* $P''_{uv}$ *(risp.* $Q''_{uv}$*), esiste un bisistema di sostegno B nel quale le due condizioni fissate non sono soddisfatte, mentre vi sono invece soddisfatte tutte le rimanenti condizioni di mutua distributività con ripetizioni di B.* $(u \neq v;\ u, v \in B.)$

Infatti, per quanto riguarda $P'_{uv}$, $P''_{uv}$ (risp. $Q'_{uv}$, $Q''_{uv}$), se $(u, v) = (a, b)$, un tale bisistema è uno dei due forniti dalle VII), VIII) (risp. IX), X)) del n° 2, oppure è uno degli opposti delle immagini isomorfe di questi due mediante $a \longrightarrow b$, $b \longrightarrow a$, $c \longrightarrow c$; se $(u, v) \neq (a, b)$, un tale bisistema è l'immagine isomorfa di uno dei precedenti quattro mediante la corrispondenza biunivoca di $B$ su sé stesso in cui $a \longrightarrow u$, $b \longrightarrow v$.

**4.** – Dimostriamo ora che:

XIII) *Non esiste alcun bisistema di sostegno* $B = \{a, b, c\}$ *nel quale* $1(a, a, b)$ *non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte tutte le condizioni della classe* $R_0 \cup P''_{ab} \cup Q_{ab}$ (n.[i] 2, 3).

Infatti, supponiamo che $B^0$ sia un bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$ in cui $1(a, a, b)$ non sia soddisfatta, cioè in cui risulti

$$a(a \dotplus b) \neq (aa) \dotplus (ab)\,, \tag{10}$$

e nel quale siano invece soddisfatte le condizioni della classe $R_0 \cup P''_{ab} \cup Q_{ab}$; e dimostriamo, in ciascuno dei possibili nove casi (1) di [3] (n.° 1), l'assurdità di questa ipotesi. Possiamo, fortunatamente, limitarci alla revisione della dimostrazione fatta in [3], cambiandola soltanto in quei punti in cui è sfruttata la validità di qualche condizione non appartenente alla classe $R_0 \cup P''_{ab} \cup Q_{ab}$.

Leggiamo dunque il lavoro [3]:

1) I due sottocasi $1_1$) e $1_2$) vanno bene. Va pure bene il sottocaso $1_3$), con l'unica variante di leggervi (com'è lecito) $3(a, a, b)$ invece di $3(a, a, c)$.

2) Va bene fino all'eguaglianza $bb = b$. Ma allora $4(a, b, b)$ implica $bb = c$, donde l'assurdo.

3) Va bene fino all'eguaglianza $cc = c$. Il sottocaso $3_1$) va bene.

$3_2$) Sia inoltre

$$a + b = b .$$

Allora $4(c, c, b)$, $4(a, a, b)$ e la (10) implicano successivamente

$$c + b \neq a , \quad bb \neq a , \quad ab \neq c .$$

Distinguiamo i due sottocasi $bb = b, c$.

$3_{2.1}$) Sia inoltre

$$bb = b .$$

Allora $4(a, a, b)$ implica $c + b = b$, quindi la (10) comporta

$$ab = a .$$

Perciò $1(a, b, a)$, $4(b, b, a)$ implicano successivamente $b + a \neq b$,

$$b + a = c ,$$

quindi $1(a, b, a)$ comporta $ac = c$; ma allora $4(a, b, a)$ implica $a = a + a = (ab) + a = (a + a)(b + a) = ac = c$, il che è assurdo.

$3_{2.2}$) Sia inoltre

$$bb = c .$$

Allora $1(b, b, b)$ implica $b(b + b) = c$, quindi $4(a, b, b)$ comporta

$$ab = b , \quad b + b = c ,$$

e perciò $2(a, a, b)$ implica $b = ab = (a + a)b = (ab) + (ab) = b + b = c$, il che è assurdo.

$3_3$) Sia inoltre

$$a + b = c .$$

Allora $3(a, a, b)$ implica $ac \neq b$; quindi $4(a, a, b)$, la (10), $3(a, a, b)$,

$1(a, b, a)$ implicano successivamente

$$c + b = c\,, \quad ac = a\,, \quad ab = a\,, \quad b + a = a\,,$$

e perciò $4(a, b, a)$ comporta $a = a + a = (ab) + a = = (a + a)(b + a) = aa = c$, il che è assurdo.

4) Va bene, tranne il ricorso finale alla $4(a, c, b)$, che va così sostituito: $2(a, a, c)$ implica $c = bc = (a+a)c = (ac)+(ac) = = b + b = b$, il che è assurdo.

5) Va bene, tranne il ricorso finale alla $3(b, a, b)$, che va così sostituito: $3(b, c, c)$ implica $b + c = (b + c)(b + c)$, il che (in entrambi i casi possibili $b + c = a, b$) è assurdo.

6) I due sottocasi $6_1$) e $6_2$) vanno bene.

$6_3$) Va bene fino alla diseguaglianza $ac \neq c$. Quindi $1(a, c, c)$, $3(a, a, b)$ implicano successivamente

$$ac = b\,, \quad b + b = b\,, \quad bc = c\,,$$

e perciò $2(a, a, c)$ comporta $c = bc = (a + a)c = (ac) + (ac) = = b + b = b$, il che è assurdo.

7) L'osservazione preliminare (p. 60): « $3(a, a, c)$ implica $a + c \neq a$ » non viene mai sfruttata nel seguito; quindi questo caso va bene.

8) Il sottocaso $8_1$) va bene.

$8_2$) Il sottocaso $8_{2.2}$) va bene.

$8_{2.1}$) Sia inoltre

$$ab = a\,.$$

Allora $1(a, b, a)$ implica $a = ab = a(b + a) = (ab) + (aa) = = a + b = b$, il che è assurdo.

$8_{2.3}$) Va bene fino all'eguaglianza $bb = c$. Allora $4(b, b, b)$ implica $c = c + b = (bb) + b = (b + b)(b + b) = cc = b$, il che è assurdo.

$8_3$) Va bene fino alla diseguaglianza $b + c \neq c$. Allora $3(b, c, c)$, $3(a, a, b)$ implicano rispettivamente

$$b + c = b\,, \quad a + c = c\,,$$

quindi $4(a, a, c)$ comporta $b = b + c = (aa) + c = (a + c)(a + c) = = cc = c$, il che è assurdo.

9) Tutti i sottocasi vanno bene, tranne i due qui sotto modificati.

$9_1$) Sia inoltre

$$a + c = a.$$

Allora $4(a, a, c)$ implica $c + c = c$, quindi $1(c, c, c)$ comporta $a = cc = c(c + c) = (cc) + (cc) = a + a = c$, il che è assurdo.

$9_{3.2.1}$) Va bene fino all'eguaglianza $bc = b$, con l'unica variante di leggere (com'è lecito) $3(a, b, b)$ invece di $2(a, b, b)$. Quindi $1(b, c, c)$ implica $b = bc = b(c + c) = (bc) + (bc) = = b + b = c$, il che è assurdo.

XIV) *Non esiste alcun bisistema di sostegno* $B = \{a, b, c\}$ *nel quale* $1(a, b, a)$ *non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte tutte le condizioni della classe* $R_0 \cup Q''_{ab} \cup P_{ab}$ (n.$^i$ 2, 3).

Infatti, se un tal bisistema esistesse, chiamiamolo $B^0$, i suoi gruppoidi additivo e moltiplicativo ([1], p. 6) non potrebbero essere opposti (invero, se in $B^0$ si avesse sempre $x + y = yx$, allora $a(b+a) \neq (ab)+(aa)$ implicherebbe $(ab)+a \neq (a+a)(b+a)$, mentre per ipotesi vale la $4(a, b, a)$); dunque esisterebbe ([1], p. 6, nota [2])) il bisistema $\alpha$-opposto di questo $B^0$, il quale (per il lemma 1 di [5], n.° 2) sarebbe un bisistema la cui esistenza è negata dalla precedente XIII).

**5.** – Siano $u$, $v$ due qualsiasi elementi distinti di $B = \{a, b, c\}$.

XV) *Non esiste alcun bisistema di sostegno* $B = \{a, b, c\}$ *nel quale* $1(u, u, v)$ (*risp.* $2(u, v, v)$) *non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte tutte le condizioni della classe* $R_0 \cup P''_{uv} \cup Q_{uv}$ (*risp.* $R_0 \cup P''_{uv} \cup Q_{vu}$), (n.$^i$ 2, 3). ($u \neq v$; $u, v \in B$.)

Infatti: 1°) Se un tal bisistema esistesse, la sua immagine isomorfa, mediante la corrispondenza biunivoca di $B$ su sé stesso in cui $u \longrightarrow a$, $v \longrightarrow b$, sarebbe un bisistema la cui esistenza è negata dalla XIII) del n.° 4 (cfr. [1], n.° 2).

2° (risp.) Se un tal bisistema esistesse, il suo opposto sarebbe ([1], p. 22, lemma 13; [2], p. 43, lemma 2) un bisistema la cui esistenza è negata dalla prima parte della XV) (qui sopra dimostrata in 1°)).

XVI) *Non esiste alcun bisistema di sostegno* $B = \{a, b, c\}$ *nel quale* $3(u, u, v)$ (*risp.* $4(u, v, v)$) *non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte tutte le condizioni della classe* $R_0 \cup P'_{uv} \cup Q_{uv}$ (*risp.* $R_0 \cup P'_{uv} \cup Q_{vu}$), (n.i 2, 3). ($u \neq v$; $u, v \in B$.)

Infatti, se un tal bisistema esistesse, il suo duale sarebbe ([5], n.° 2, lemma 2) un bisistema la cui esistenza è negata dalla XV).

XVII) *Non esiste alcun bisistema di sostegno* $B = \{a, b, c\}$ *nel quale* $1(u, v, u)$ (*risp.* $2(v, u, v)$) *non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte tutte le condizioni della classe* $R_0 \cup Q''_{uv} \cup P_{uv}$ (*risp.* $R_0 \cup Q''_{uv} \cup P_{vu}$), (n.i 2, 3). ($u \neq v$; $u, v \in B$.)

Infatti: 1°) Se un tal bisistema esistesse, la sua immagine isomorfa, mediante la corrispondenza biunivoca di $B$ su sé stesso in cui $u \longrightarrow a$, $v \longrightarrow b$, sarebbe un bisistema la cui esistenza è negata dalla XIV) del n.° 4 (cfr. [1], n.° 2).

2°) (risp.) Se un tal bisistema esistesse, il suo opposto sarebbe ([1], p. 22, lemma 13; [2], p. 43, lemma 2) un bisistema la cui esistenza è negata dalla prima parte della XVII) (qui sopra dimostrata in 1°)).

XVIII) *Non esiste alcun bisistema di sostegno* $B = \{a, b, c\}$ *nel quale* $3(u, v, u)$ (*risp.* $4(v, u, v)$) *non sia soddisfatta, e nel quale siano invece soddisfatte tutte le condizioni della classe* $R_0 \cup Q'_{vu} \cup P_{uv}$ (*risp.* $R_0 \cup Q'_{vu} \cup P_{vu}$), (n.i 2, 3). ($u \neq v$; $u, v \in B$.)

Infatti, se un tal bisistema esistesse, il suo duale sarebbe ([5], n.° 2, lemma 2) un bisistema la cui esistenza è negata dalla XVII).

**6.** – Alla prosecuzione dello studio del caso $\nu = 3$ (n.° 2), premettiamo le due osservazioni seguenti.

Osservazione 1a: Consideriamo la corrispondenza biunivoca e involutoria, $\omega$ (risp. $\delta$), di $M$ (n.° 1) su sé stesso che ad ogni condizione di mutua distributività di $B$ associa la sua opposta (risp. duale), ([5], n.° 7).

Ebbene, se $R'$ è un sottinsieme di $R$ (n.° 1) indipendente ed equivalente ad $R$ ([4], n.° 1), l'insieme *opposto* (risp. *duale*) di $R'$, cioè l'insieme costituito dalle condizioni opposte (risp. duali) di quelle costituenti $R'$ (ossia l'immagine di $R'$ in $\omega$ — risp. in $\delta$ —), è anch'esso un sottoinsieme di $R$ indipendente ed equivalente ad $R$.

Infatti, basta notare che $\omega$ (risp. $\delta$) applica $R$ su sé stesso e ricordare le cose dette negli ultimi due capoversi del n.° 7 di [5].

OSSERVAZIONE 2ª: Una qualsiasi corrispondenza biunivoca $\tau$ di $B$ (n.° 1) su sé stesso, nella quale agli elementi $x$, $y$, $z$ variabili in $B$ corrispondono rispettivamente $x'$, $y'$, $z'$, induce una corrispondenza biunivoca, che denoteremo pure con $\tau$, di $M$ (n.° 1) su sé stesso, nella quale alla prima delle due seguenti condizioni (n.° 1):

$$i(x, y, z)\,, \qquad i(x', y', z')$$

corrisponde la seconda, ($i = 1, 2, 3, 4$). La seconda (risp. la prima) di queste due condizioni si dirà la condizione *$\tau$-isomorfa* (risp. *$\tau^{-1}$-isomorfa*) della prima (risp. della seconda).

Ebbene, se $R'$ è un sottoinsieme di $R$ (n.° 1) indipendente ed equivalente ad $R$ ([4], n.° 1) l'insieme *$\tau$-isomorfo* di $R'$, cioè l'insieme costituito dalle condizioni $\tau$-isomorfe di quelle costituenti $R'$ (ossia l'immagine di $R'$ in $\tau$), è anch'esso un sottoinsieme di $R$ indipendente ed equivalente ad $R$.

Infatti, basta notare che $\tau$ applica $R$ su sé stesso e ricordare le cose dette nella parte finale del n.° 2 di [1].

**7.** – Consideriamo l'insieme $R$ delle condizioni di mutua distributività con ripetizioni dell'insieme $B = \{a, b, c\}$, e poniamo (n.° 3):

$$R_{uv} = P_{uv} \cup P_{vu} \cup Q_{uv} \cup Q_{vu}\,,$$

$u$, $v$ essendo due qualsiasi elementi distinti di $B = \{a, b, c\}$. Si noti che

$$R_{uv} = R_{vu}\,.$$

Poniamo inoltre (n.<sup>i</sup> 1, 3), $u$, $v$ essendo sempre due qualsiasi elementi distinti di $B = \{a, b, c\}$:

$$\begin{aligned}
P^{12}_{uv} &= \{1(u, u, v),\ 2(v, u, u)\}\,, \\
P^{13}_{uv} &= \{1(u, u, v),\ 3(u, u, v)\}\,, \\
P^{14}_{uv} &= \{1(u, u, v),\ 4(v, u, u)\}\,, \\
P^{23}_{uv} &= \{2(v, u, u),\ 3(u, u, v)\}\,, \\
P^{24}_{uv} &= \{2(v, u, u),\ 4(v, u, u)\}\,, \\
P^{43}_{uv} &= \{4(v, u, u),\ 3(u, u, v)\}\,;
\end{aligned}$$

e poniamo infine (n.' 1, 3):

$$Q^{rs}_{uv} = \{r(u, v, u),\ s(u, v, u)\},\quad (r, s = 1, 2, 3, 4;\ r \neq s).$$

Supponiamo che $R'$ sia un sottinsieme di $R$ indipendente ed equivalente ad $R$ ([4], n.° 1), e *cerchiamo di determinare l'intersezione di $R'$ ed $R_{uv}$.*

Osserviamo anzitutto che $R'$ *deve contenere* $R_0$ (n.° 2):

$$R' \supseteq R_0\,,$$

e ciò per la II) del n.° 2, essendo $R'$ equivalente ad $R$.

$R'$ non può contenere $R_{uv}$ (per la XV), essendo $R'$ indipendente). Supponiamo perciò dapprima che $R'$ non contenga $1(u, u, v)$. Allora $R'$ deve contenere $P''_{uv} \cup Q_{uv}$ (per le XI) e XII) del n.° 3, essendo $R'$ equivalente ad $R$). Poiché $R'$ deve contenere almeno una delle due condizioni $1(v, v, u)$, $3(v, v, u)$ (per la XII)), $R'$ non può contenere entrambe le condizioni $2(v, u, u)$, $4(v, u, u)$ (per le XV) e XVI)).

Supponiamo perciò in primo luogo che $R'$ non contenga $2(v, u, u)$. Allora $R'$ deve contenere $P''_{vu}$ (per la XII)). Quindi non può accadere che $R'$ contenga una delle due condizioni $1(v, v, u)$, $2(u, v, v)$ e che non contenga l'altra; se invero $R'$ contenesse $2(u, v, v)$ e non contenesse $1(v, v, u)$, allora, non contenendo $1(v, v, u)$, $R'$ dovrebbe contenere $Q_{vu}$ (per la XI)), donde l'assurdo (per la XV), essendo $R'$ indipendente); se poi $R'$ contenesse invece $1(v, v, u)$ e non contenesse $2(u, v, v)$, allora $R'$ dovrebbe contenere $Q_{vu}$ (per la XI)), donde appunto l'assurdo (per la XV)). Dunque i casi sono due: o $R'$ non contiene alcuna delle due condizioni $1(v, v, u)$, $2(u, v, v)$, e quindi contiene $Q_{vu}$ (per la XI)), per cui:

$$R' \cap R_{uv} = Q_{uv} \cup Q_{vu} \cup P^{43}_{uv} \cup P^{43}_{vu}, \tag{11}$$

oppure $R'$ contiene entrambe le condizioni $1(v, v, u)$, $2(u, v, v)$, e quindi $R'$ contiene $P_{vu}$. In quest'ultimo caso $R'$ deve contenere una (per la XII)) delle due condizioni $2(v, u, v)$, $3(v, u, v)$ ed una sola (per la XVII)); inoltre $R'$ deve contenere una (per la XII)) delle due condizioni $1(v, u, v)$, $4(v, u, v)$ ed una sola per la XVIII)); quindi deve valere una delle seguenti quattro eguaglianze:

$$R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P^{43}_{uv} \cup Q^{12}_{vu}, \tag{12}$$

$$R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P^{43}_{uv} \cup Q^{43}_{vu}, \tag{13}$$

$$R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P^{43}_{uv} \cup Q^{13}_{vu}, \tag{14}$$

$$R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P^{43}_{uv} \cup Q^{24}_{vu}. \tag{15}$$

Supponiamo in secondo luogo che $R'$ non contenga $4(v, u, u)$. Allora $R'$ deve contenere $P'_{vu}$ (per la XII)). Quindi non può accadere che $R'$ contenga una delle due condizioni $2(u, v, v)$, $3(v, v, u)$ e che non contenga l'altra; se invero $R'$ contenesse $2(u, v, v)$ e non contenesse $3(v, v, u)$, allora non contenendo $3(v, v, u)$, $R'$ dovrebbe contenere $Q_{vu}$ (per la XI)), donde l'assurdo (per la XV)); se poi $R'$ contenesse $3(v, v, u)$ e non contenesse $2(u, v, v)$, allora $R'$ dovrebbe contenere $Q_{vu}$ (per la XI)), donde appunto l'assurdo (per la XVI)). Dunque i casi sono due: o $R'$ non contiene alcuna delle due condizioni $2(u, v, v)$, $3(v, v, u)$, e quindi contiene $Q_{vu}$ (per la XI)), per cui:

$$R' \cap R_{uv} = Q_{uv} \cup Q_{vu} \cup P^{23}_{uv} \cup P^{14}_{vu}, \tag{16}$$

oppure $R'$ contiene entrambe le condizioni $2(u, v, v)$, $3(v, v, u)$, e quindi $R'$ contiene $P_{vu}$. In quest'ultimo caso, il medesimo ragionamento fatto qui sopra, fra le formule (11) e (12). porta a concludere che deve valere una delle seguenti quattro eguaglianze:

$$R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P^{23}_{uv} \cup Q^{12}_{vu}, \tag{17}$$

$$R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P^{23}_{uv} \cup Q^{43}_{vu}, \tag{18}$$

$$R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P^{23}_{uv} \cup Q^{13}_{vu}, \tag{19}$$

$$R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P^{23}_{uv} \cup Q^{24}_{vu}. \tag{20}$$

Concludendo:

XIX) *Se* $R'$ (sottinsieme di $R$ indipendente ed equivalente ad $R$) *non contiene* $1(u, u, v)$, *allora vale necessariamente una delle dieci eguaglianze* (11), ..., (20). ($u \neq v$; $u, v \in B = \{a, b, c\}$.)

Supponiamo ora che $R'$ contenga $1(u, u, v)$ e che non contenga $2(v, u, u)$. Allora l'opposto di $R'$ è un sottoinsieme di $R$, indipendente ed equivalente ad $R$ (n.º 6), che contiene $2(v, u, u)$ e che non contiene $1(u, u, v)$; quindi l'intersezione dell'opposto di $R'$ con $R_{uv}$ è necessariamente eguale (per la XIX)) ad uno dei cinque insiemi che figurano a 2º membro delle (16), ..., (20); uno degli opposti di questi cinque insiemi è perciò l'intersezione di $R'$ (opposto del proprio opposto) con $R_{uv}$ (coincidente col proprio opposto), cioè vale una delle seguenti cinque eguaglianze:

$$R' \cap R_{uv} = Q_{uv} \cup Q_{vu} \cup P^{14}_{uv} \cup P^{23}_{vu}, \tag{21}$$

$$R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P^{14}_{uv} \cup Q^{12}_{vu}, \tag{22}$$

$$R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P^{14}_{uv} \cup Q^{43}_{vu}, \tag{23}$$

$$R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P^{14}_{uv} \cup Q^{24}_{vu}, \tag{24}$$

$$R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P^{14}_{uv} \cup Q^{13}_{vu}. \tag{25}$$

Dal precedente capoverso e dalla XIX) risulta dunque:

XX) *Se* $R'$ (sottinsieme di $R$ indipendente ed equivalente ad $R$) *non contiene* $P^{12}_{uv}$, *allora vale necessariamente una delle quindici eguaglianze* (11), ..., (25). ($u \neq v$; $u, v \in B = \{a, b, c\}$.)

Supponiamo ora che $R'$ contenga $P^{12}_{uv}$ e che non contenga $P^{43}_{uv}$. Allora il duale di $R'$ è un sottinsieme di $R$, indipendente ed equivalente ad $R$ (n.º 6), che contiene $P^{43}_{uv}$ e che non contiene $P^{12}_{uv}$; quindi l'intersezione del duale di $R'$ con $R_{uv}$ è necessariamente eguale (per la XX)) ad uno dei cinque insiemi che figurano a 2° membro delle (11), ..., (15); uno dei duali di questi cinque insiemi è perciò l'intersezione di $R'$ (duale del proprio duale) con $R_{uv}$ (coincidente col proprio duale), cioè vale una delle seguenti cinque eguaglianze:

$$R' \cap R_{uv} = Q_{uv} \cup Q_{vu} \cup P^{12}_{uv} \cup P^{12}_{vu}, \tag{26}$$

$$R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P^{12}_{uv} \cup Q^{43}_{vu}, \tag{27}$$

$$R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P^{12}_{uv} \cup Q^{12}_{vu}, \tag{28}$$

$$R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P^{12}_{uv} \cup Q^{13}_{vu}, \tag{29}$$

$$R' \cap R_{uv} = P_{vu} \cup Q_{uv} \cup P^{12}_{uv} \cup Q^{24}_{vu}. \tag{30}$$

Dal precedente capoverso e dalla XX) risulta quindi:

XXI) *Se* $R'$ (sottinsieme di $R$ indipendente ed equivalente ad $R$) *non contiene* $P_{uv}$ (n.° 3), *allora vale necessariamente una delle venti eguaglianze* (11), ..., (30). ($u \neq v$; $u, v \in B = \{a, b, c\}$.)

Supponiamo ora che $R'$ contenga $P_{uv}$ e che non contenga $P_{vu}$, e denotiamo con

$$\tau_{uv}$$

la corrispondenza biunivoca (e involutoria) dell'insieme $B = \{a, b, c\}$ su sé stesso nella quale $u \longrightarrow v$, $v \longrightarrow u$. Allora il $\tau_{uv}$-isomorfo di $R'$ è un sottinsieme di $R$, indipendente ed equivalente ad $R$ (n.° 6), che contiene $P_{vu}$ e che non contiene $P_{uv}$; quindi l'intersezione del $\tau_{uv}$-isomorfo di $R'$ con $R_{uv}$ è necessariamente eguale (per la XXI)) ad uno dei sedici insiemi che figurano a 2° membro delle (12), ..., (15), delle (17), ..., (20), delle (22), ..., (25) e delle (27), ..., 30); uno dei $\tau_{uv}$-isomorfi (come si è già osservato, $\tau_{uv}^{-1} = \tau_{uv}$) di questi sedici insiemi è perciò l'intersezione di $R'$ con $R_{uv}$. Ne risulta, per la XXI), che (si ricordi che $R_{vu} = R_{uv}$):

XXII) *Se* $R'$ (sottinsieme di $R$ indipendente ed equivalente ad $R$) *non contiene* $P_{uv} \cup P_{vu}$ (n.° 3), *allora vale necessariamente o una delle venti uguaglianze* (11), ..., (30), *oppure una delle sedici eguaglianze che si ottenono dalla* (12), ..., (15), *dalle* (17), ..., (20), *dalle* (22), ..., (25) *e dalle* (27), ..., (30) *leggendovi* $v$, $u$ *invece rispettivamente di* $u$, $v$. ($u \neq v$; $u, v \in B = \{a, b, c\}$.)

Supponiamo adesso che $R'$ contenga $P_{uv} \cup P_{vu}$ e che non contenga $1(u, v, u)$. Allora $R'$ deve contenere $Q''_{uv}$ (per la XII), essendo $R'$ equivalente ad $R$); quindi $R'$ non contiene $2(v, u, v)$ (per la XVII), essendo $R'$ indipendente). Poiché $R'$ deve contenere almeno una delle due condizioni $2(u, v, u)$, $3(u, v, u)$ (per la XII)), $R'$ non può contenere entrambe le condizioni $1(v, u, v)$, $4(v, u, v)$ (per le XVII), XVIII)). Perciò, o $R'$ non contiene $1(v, u, v)$, e allora $R'$ deve contenere $Q''_{vu}$ (per la XII)), quindi $R'$ non può contenere $2(u, v, u)$ (per la XVII)), cioè risulta

$$R' \cap R_{uv} = P_{uv} \cup P_{vu} \cup Q^{43}_{uv} \cup Q^{43}_{vu}, \tag{31}$$

oppure $R'$ non contiene $4(v, u, v)$, e allora $R'$ deve contenere $Q'_{vu}$ (per la XII)), quindi $R'$ non contiene $3(u, v, u)$ (per la XVIII)), ossia risulta

$$R' \cap R_{uv} = P_{uv} \cup P_{vu} \cup Q^{24}_{uv} \cup Q^{13}_{vu}. \tag{32}$$

Dal precedente capoverso e dalla XXII) risulta quindi:

XXIII) *Se* $R'$ (sottinsieme di $R$ indipendente ed equivalente ad $R$) *non contiene* $P_{uv} \cup P_{vu} \cup \{1(u, v, u)\}$, *allora vale necessariamente o una delle trentasei eguaglianze elencate nella* XXII), *oppure una delle due eguaglianze* (31), (32). ($u \neq v$; $u, v \in B = \{a, b, c\}$.)

Supponiamo ora che $R'$ contenga $P_{uv} \cup P_{vu} \cup \{1(u, v, u)\}$ e che non contenga $2(u, v, u)$. Allora l'opposto di $R'$ è un sottinsieme di $R$, indipendente ed equivalente ad $R$ (n.º 6), che contiene $P_{uv} \cup P_{vu} \cup \{2(u, v, u)\}$ e che non contiene $1(u, v, u)$; quindi l'intersezione dell'opposto di $R'$ con $R_{uv}$ è necessariamente uguale (per la XXIII)) all'insieme che figura a 2º membro della (32); l'opposto di questo insieme è perciò l'intersezione di $R'$ con $R_{uv}$:

$$R' \cap R_{uv} = P_{uv} \cup P_{vu} \cup Q^{13}_{uv} \cup Q^{24}_{vu}. \tag{33}$$

Ne risulta, per la XXIII):

XXIV) *Se* $R'$ (sottinsieme di $R$ indipendente ed equivalente ad $R$) *non contiene* $P_{uv} \cup P_{vu} \cup Q^{12}_{uv}$, *allora vale necessaria-*

*mente o una delle trentasei eguaglianze elencate nella* XXII), *oppure una delle tre eguaglianze* (31), (32), (33). ($u \neq v$; $u, v \in B = \{a, b, c\}$.)

Supponiamo infine che $R'$ contenga $P_{uv} \cup P_{vu} \cup Q^{12}_{uv}$ e che non contenga $Q^{43}_{uv}$. Allora il duale di $R'$ è un sottinsieme di $R$, indipendente ed equivalente ad $R$ (n.º 6), che contiene $P_{uv} \cup P_{vu} \cup Q^{43}_{uv}$ e che non contiene $Q^{12}_{uv}$; quindi l'intersezione del duale di $R'$ con $R_{uv}$ è necessariamente uguale (per la XXIV)) all'inieme che figura a 2º membro della (31): il duale di questo insieme è perciò l'intersezione di $R'$ con $R_{uv}$:

$$(34) \qquad R' \cap R_{uv} = P_{uv} \cup P_{vu} \cup Q^{12}_{uv} \cup Q^{12}_{vu}.$$

Ne risulta, per la XXIV), la proposizione conclusiva seguente (si vedano i primi tre capoversi di questo n.º 7):

XXV) *Se $R'$ è un qualsiasi sottinsieme di $R$* (insieme delle condizioni di mutua distributività con ripetizioni di $B = \{a, b, c\}$) *indipendente ed equivalente ad $R$, allora vale necessariamente o una delle ventiquattro eguaglianze* (11), ..., (34), *oppure una delle sedici eguaglianze che si ottengono dalle* (12), ..., (15), *dalle* (17), ..., (20), *dalle* (22), ..., (25) *e dalle* (27), ..., (30) *leggendovi $v$, $u$ invece rispettivamente di $u$, $v$.* ($u \neq v$; $u, v \in B = \{a, b, c\}$.)

E invero basta osservare che $R'$ non contiene $P_{uv} \cup P_{vu} \cup Q_{uv}$, ciò risultando (per l'indipendenza di $R'$) dalle XVII) e XVIII), dato che $R'$ deve contenere (per la XII), essendo equivalente ad $R$) almeno una delle due condizioni $2(v, u, v)$, $3(v, u, v)$.

**8.** – Se $u$, $v$ sono due qualsiasi elementi distinti di $B = \{a, b, c\}$, denotiamo con

$$H_{uv}$$

uno qualunque dei quaranta insiemi (costituiti, ciascuno, da dodici condizioni di mutua distributività con ripetizioni di $B = \{a, b, c\}$) che si trovano alla destra del segno di eguaglianza nelle ventiquattro eguaglianze (11), ..., (34) e nelle sedici eguaglianze che si ottengono dalle (12), ..., (15), dalle (17), ..., (20), dalle (22), ..., (25) e dalle (27), ..., (30) leggendovi $v$, $u$ invece rispettivamente di $u$, $v$ (si vedano il 1° capoverso del n.° 3 ed il 2° capoverso del n.° 7). Si osservi che (n.° 7, 1° capov.):

$$H_{uv} \subset R_{uv}.$$

XXVI) *Fissata una qualsiasi delle* (dodici) *condizioni costituenti l'insieme* $H_{uv}$ (si veda il preced. capov.), ***esiste un bisistema di sostegno*** $B = \{a, b, c\}$ *nel quale la condizione fissata non è soddisfatta, mentre vi sono invece soddisfatte sia le* (undici) *condizioni di* $H_{uv}$ *diverse da quella fissata, sia tutte le condizioni di* $R - R_{uv}$ (n.° 7, 1° capov.). ($u \neq v$; $u, v \in B = \{a, b, c\}$.)

Infatti, ciò risulta dalle due proposizioni XI) e XII) (n.° 3).

XXVII) *Se in un bisistema di sostegno* $B = \{a, b, c\}$ *sono soddisfatte sia le condizioni costituenti l'insieme* $R_0$ (n.° 2), *sia le* (dodici) *condizioni costituenti l'insieme* $H_{uv}$ (questo n.°, 1° capov.), *allora, in questo bisistema, sono pure soddisfatte le* (quattro) *condizioni di* $R_{uv} - H_{uv}$ (n.° 7, 1° capov.). ($u \neq v$; $u, v \in B = \{a, b, c\}$.)

Infatti, ciò risulta dalle quattro proposizioni XV), ..., XVIII) (n.° 5).

Siamo ormai in grado di concludere intanto lo studio del caso $\nu = 3$ (iniziato nel n.° 2) col seguente

TEOREMA 1: *Se* $B = \{a, b, c\}$ *è un insieme avente numero cardinale* $\nu = 3$, *ed* $R$ *è l'insieme delle 84 condizioni di mutua distributività con ripetizioni di* $B$ (n.° 1), *tutti i sottoinsiemi* $R'$ *di* $R$ *che sono indipendenti ed equivalenti* ([4], n.° 1) *ad* $R$ *si ottengono nel modo seguente: Si scelgano uno qualsiasi dei quaranta insiemi* $H_{ab}$ (si veda il 1° capoverso di questo n.° 8), *uno qualsiasi dei quaranta insiemi* $H_{ac}$ *ed uno qualsiasi dei quaranta insiemi* $H_{bc}$. *Le* (trentasei) *condizioni costituenti i tre insiemi così scelti e le* (trentasei) *condizioni costituenti l'insieme* $R_0$ (n.° 2, 1° capov.) *formano appunto complessivamente, un sottoinsieme* $R'$ (*di* $R$) *indipendente ed equivalente ad* $R$.

**Dimostrazione: Che ognuno dei sottinsiemi $R'$ di $R$ così ottenuti sia effettivamente indipendente ed equivalente ad $R$, è provato rispettivamente dalle due proposizioni II), XXVI) (n.i 2, 8) e dalla proposizione XXVII) (n.° 8). Che i sottinsiemi $R'$ di $R$ così ottenuti siano effettivamente *tutti* i sottinsiemi di $R$**

che sono indipendenti ed equivalenti ad $R$, è poi provato da un'osservazione fatta all'inizio del n.º 7 ($R' \supseteq R_0$) e dalla proposizione XXV) (l'ultima del n.º 7).

I sottinsiemi $R'$ di $R$ determinati mediante il teorema 1 sono dunque 64000 ($= 40^3$) e ciascuno di essi è costituito da 72 condizioni.

Ad esempio, uno di questi sottinsiemi $R'$ è il seguente (n.ⁱ 1, 2): $1[a, b, a] \cup 2[a, b, a] \cup 4[a, b, a] \cup 3[a, b, a] \cup 4[b, a, a] \cup 3[a, a, b] \cup R_0$.

**9.** – Esaurito lo studio del caso $\nu = 3$, passiamo ora ad esaminare il caso $\nu = 2$ (n.º 1).

Se $\nu = 2$, risulta (come si è già osservato nel n.º 1):

$$R = M\ ,$$

quindi si tratta di studiare l'insieme $M$ delle 32 ($= 4 \cdot 2^3$) condizioni di mutua distributività di $B = \{a, b\}$.

Pensiamo ripartite queste 32 condizioni nelle sedici classi $C_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ definite nel n.º 5 di [5], e consideriamo la classe

$$C_{12} \cup C_{22} \cup C_{42} \cup C_{32} \cup C_{14} \cup C_{24} \cup C_{44} \cup C_{34}\ . \tag{35}$$

XXVIII) *Non esiste alcun bisistema di sostegno $B = \{a, b\}$ in cui siano soddisfatte tutte le condizioni costituenti la classe* (35), *e nel quale le due condizioni* $1(a, a, a)$, $4(a, a, a)$ *siano una soddisfatta e l'altra non soddisfatta.*

Infatti: *i*) Supponiamo che $B^0$ sia un bisistema di sostegno $B = \{a, b\}$ in cui $1(a, a, a)$ non sia soddisfatta, cioè in cui risulti

$$a(a + a) \neq (aa) \dotplus (aa)\ , \tag{36}$$

e nel quale siano invece soddisfatte $4(a, a, a)$ e le condizioni costituenti la classe (35); e dimostriamo l'assurdità di questa ipotesi. Invero, la (36) implica $(a + a, aa) \neq (a, a)$; distinguiamo perciò i tre casi $(a + a, aa) = (a, b)$, $(b, a)$, $(b, b)$.

1) In $B^o$ risulti

$$a + a = a\,, \qquad aa = b\,.$$

Allora la (36) e $4(a, a, a)$ implicano risp.

$$b + b = a\,, \qquad b + a = b\,,$$

quindi $1(a, b, a)$ comporta successivamente

$$ab = a\,, \qquad a + b = a\,,$$

e perciò $2(a, b, a)$ implica $ba = a$. Da $3(a, b, a)$ segue quindi $a = a + a = a + (ba) = (a + b)(a + a) = aa = b$, il che è assurdo.

2) In $B^o$ risulti

$$a + a = b\,, \qquad aa = a\,.$$

Allora la (36) implica $ab = a$, quindi $1(a, b, a)$ comporta $a = a(b + a) = (ab) + (aa) = a + a = b$, il che è assurdo.

3) In $B^o$ risulti

$$a + a = b\,, \qquad aa = b\,.$$

Allora la (36) implica $b + b \neq ab$. Distinguiamo perciò i due sottocasi $(b + b, ab) = (a, b), (b, a)$.

$3_1$) Sia inoltre

$$b + b = a\,, \qquad ab = b\,.$$

Allora $1(a, b, a)$ implica $b = a(b + a) = (ab) + (aa) = b + b = a$, il che è assurdo.

$3_2$) Sia inoltre

$$b + b = b\,, \qquad ab = a\,.$$

Distinguiamo i due sottocasi $b + a = a, b$.

$3_{2.1}$) Sia inoltre

$$b + a = a\,.$$

Allora $1(a, b, a)$, $4(a, a, a)$, $4(a, b, a)$ implicano risp.

$$a + b = b\,, \qquad bb = a\,, \qquad ba = b\,,$$

quindi $3(a, b, a)$ comporta $b = a + b = a + (ba) = (a + b)(a + a) = = bb = a$, il che è assurdo.

$3_{2.2}$) Sia inoltre

$$b + a = b\,.$$

Allora $1(a, b, a)$, $4(a, a, a)$, $3(a, b, a)$ implicano successivamente

$$a + b = a\,, \qquad bb = b\,, \qquad ba = b\,,$$

quindi l'addizione e la moltiplicazione di $B^o$ coincidono, il che è assurdo.

*ii*) Supponiamo ora che $B^o$ sia un bisistema di sostegno $B = \{a, b\}$ in cui $4(a, a, a)$ non sia soddisfatta, cioè in cui risulti

$$(37) \qquad (aa) + a \neq (a + a)(a + a)$$

e nel quale siano invece soddisfatte $1(a, a, a)$ e le condizioni costituenti la classe (35); e dimostriamo l'assurdità di questa ipotesi. Invero, la (37) implica $(a + a, aa) \neq (a, a)$; distinguiamo perciò i tre casi $(a + a, aa) = (a, b)$, $(b, a)$, $(b, b)$.

1) In $B^o$ risulti

$$a + a = a\,, \qquad aa = b\,.$$

Allora la (37) implica $b + a = a$, quindi $4(a, b, a)$ comporta $a = (ab) + a = (a + a)(b + a) = aa = b$, il che è assurdo.

2) In $B^o$ risulti

$$a + a = b\,, \qquad aa = a\,.$$

Allora la (37), $1(a, a, a)$, $2(a, b, a)$ implicano risp.

$$bb = a\,, \qquad ab = b\,, \qquad ba = b\,,$$

quindi $3(a, b, a)$ comporta $a + b = (a + b)b$, cioè (in entrambi i casi $a + b = a, b$) $a = b$, il che è assurdo.

3) In $B^o$ risulti

$$a + a = b\,, \qquad aa = b\,.$$

Allora la (37) implica $b + a \neq bb$. Distinguiamo perciò i due sottocasi $(b + a, bb) = (a, b), (b, a)$.

$3_1$) Sia inoltre

$$b + a = a\,, \qquad bb = b\,.$$

Distinguiamo i due sottocasi $ab = a, b$.

$3_{1.1}$) Sia inoltre

$$ab = a\,.$$

Allora $1(a, b, a)$, $1(a, a, a)$, $2(a, b, a)$ implicano successivamente

$$a + b = b\,, \qquad b + b = a\,, \qquad ba = a\,,$$

quindi $4(a, b, a)$ comporta $b = a+a = (ab)+a = (a+a)(b+a) = = ba = a$, il che è assurdo.

$3_{1.2}$) Sia inoltre

$$ab = b\,.$$

Allora $1(a, a, a)$, $4(a, b, a)$, $2(a, b, a)$ implicano successivamente

$$b + b = b\,, \qquad ba = a\,, \qquad a + b = b\,,$$

quindi l'addizione e la moltiplicazione di $B^o$ coincidono il che è assurdo.

$3_2$) Sia inoltre

$$b + a = b\,, \qquad bb = a\,.$$

Allora $4(a, b, a)$ implica $b = (ab) + a = (a + a)(b + a) = bb = a$, il che è assurdo. E la dimostrazione della XXVIII) è terminata.

XXIX) *Non esiste alcun bisistema di sostegno* $B = \{a, b\}$ *in cui siano soddisfatte tutte le condizioni costituenti la classe* (35), *e nel quale le due condizioni* $2(a, a, a)$, $3(a, a, a)$ *siano una soddisfatta e l'altra non soddisfatta.*

Infatti, se un tal bisistema esistesse, il suo duale sarebbe ([5], n.° 2, lemma 2) un bisistema la cui esistenza è negata dalla XXVIII).

XXX) *Non esiste alcun bisistema di sostegno* $B = \{a, b\}$ *in cui siano soddisfatte tutte le condizioni costituenti la classe* (35) *e nel quale le due condizioni* $1(b, b, b)$, $4(b, b, b)$ (*oppure le due condizioni* $2(b, b, b)$, $3(b, b, b)$) *siano una soddisfatta e l'altra non soddisfatta.*

Infatti, se un tal bisistema esistesse, la sua immagine isomorfa mediante la corrispondenza $a \longrightarrow b$, $b \longrightarrow a$ (cfr. [1], n.° 2) sarebbe un bisistema la cui esistenza è negata dalla XXVIII) (oppure dalla XXIX)).

TEOREMA 2°: *Se* $B = \{a, b\}$ *è un insieme avente numero cardinale* $\nu = 2$, *ed* $R$ (n.° 1) *è l'insieme delle* 32 *condizioni di mutua distributività con ripetizioni di* $B$ (coincidente, $R$, con l'insieme $M$ delle $4\nu^3$ condizioni di mutua distributività di $B$), *tutti i sottinsiemi* $R'$ *di* $R$ *che sono indipendenti ed equivalenti* ([4], n.° 1) *ad* $R$ *si ottengono nel modo seguente*: *Si scelga in ciascuna delle dodici classi* (si veda il n.° 5 di [5]):

$$
\begin{array}{c} C_{12},\ C_{22},\ C_{42},\ C_{32},\ C_{14},\ C_{24},\ C_{44},\ C_{34}\ , \\ C_{11} \cup C_{41},\ C_{21} \cup C_{31},\ C_{13} \cup C_{43},\ C_{23} \cup C_{33} \end{array} \tag{38}
$$

*una qualunque delle condizioni che la costituiscono. Le* 12 *condizioni così scelte costituiscono appunto un sottinsieme* $R'$ (*di* $R$) *indipendente ed equivalente ad* $R$.

Dimostrazione: Questo teor. 2 è una facile conseguenza delle tre proposizioni dimostrate precedentemente in questo n.°, e delle cinque dimostrate nel n.° 5 di [5].

Ad esempio, un sottinsieme indipendente ed equivalente all'insieme $M$ $(= R)$ delle 32 condizioni di mutua distributività di $B = \{a, b\}$ (cioè uno dei sottinsiemi $R'$ determinati mediante il teor. 2) è quello costituito dalle 12 condizioni seguenti (n.° 1):

$$1(a, a, a),\ 1(b, b, b),\ 2(a, a, a),\ 2(b, b, b),\ i(a, b, a),\ i(b, a, b) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)\,.$$

Dalla I) (n.° 1) e dai teoremi 1, 2 (n.i 8, 9) risulta evidentemente il seguente

COROLLARIO: *L'insieme $R$, delle condizioni di mutua distributività con ripetizioni di un insieme $B$ avente numero cardinale $\nu$, è indipendente* ([4], n.° 1) *se, e soltanto se*, $\nu \geqslant 4$.

## BIBLIOGRAFIA


[1] BOCCIONI D.: *Indipendenza delle condizioni di distributività*. Rend, Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 1-30.

[2] BOCCIONI D.: *Indipendenza delle condizioni di mutua distributività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 40-49.

[3] BOCCIONI D.: *Dipendenza delle condizioni di mutua distributività nei bisistemi di ordine* 3, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 50-67.

[4] BOCCIONI D.: *Condizioni di distributività ed associatività unilaterali*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 30 (1960), pp. 178-193.

[5] BOCCIONI D.: *Indipendenza delle condizioni di doppia e di tripla distributività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 33 (1963).