RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CARLO BANFI

Sul teorema di unicità per le equazioni dell'aerotermochimica

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 33 (1963), p. 48-59

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__48_0>

SUL TEOREMA DI UNICITÀ PER LE EQUAZIONI DELL'AEROTERMOCHIMICA

Nota *) *di* CARLO BANFI (*a Bologna*)

1. L'aerotermochimica tratta i fenomeni di meccanica dei fluidi in cui intervengono reazioni chimiche. Le equazioni che reggono tali fenomeni sono sostanzialmente quelle valide per le miscele di gas, in cui tuttavia le reazioni chimiche costituiscono delle sorgenti distribuite di energia, e comportano delle variazioni di composizione nella miscela. Il problema completo dell'aerotermochimica, si presenta assai complesso in quanto in esso si intrecciano ai fenomeni di movimento, fenomeni di trasformazioni termodinamiche, di viscosità, di diffusione dei gas. Von Karman ha condotto una analisi di tali fenomeni ed ha dato un sistema di equazioni dell'aerotermochimica [1]). Per alcuni casi interessanti, in cui si possono trascurare alcuni dei fenomeni in gioco, sono stati dati dei sistemi di equazioni semplificati [2]).

Nel caso in cui, detti D_I il primo numero di Damkoler ed M il numero di Mach, si ha: $D_I \ll 1$, $M = 0(1)$; per una miscela di due gas perfetti N_1 ed N_2, non soggetti a forze esterne e termi-

---

*) Pervenuta in redazione il 5 giugno 1962.
Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Bologna.

[1]) T. VON KARMAN: *Fundamental equations in aerothermochemestry. Selected combustion problems II.* Butterworths; London 1956. AGARD.

[2]) L. G. NAPOLITANO: *Introduzione allo studio dell'aerotermochimica.* L'Aerotenica, vol. XXXVIII, 1958, pag. 96-108.

camente isolati, si possono scrivere le seguenti equazioni:

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \,, \tag{1}$$

$$\varrho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = - \operatorname{grad} p \,, \tag{2}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \beta \,, \tag{3}$$

$$\frac{ds}{dt} + \beta B = 0 \,. \tag{4}$$

Dove con ϱ, p, s, $\boldsymbol{v}$, si indicano rispettivamente, la densità, la pressione, l'entropia specifica, la velocità della miscela nel punto P e nell'istante t generico; α la concentrazione di massa del primo componente cioè $\alpha = \frac{\varrho_1}{\varrho}$; $\beta = \frac{\xi}{\varrho}$ con ξ velocità di formazione del componente N_1 per unità di volume; βB entropia prodotta per unità di volume e di tempo, con $B = (g_1 - g_2)/T$, g_1 e g_2 potenziali chimici dei due componenti, T temperatura assoluta. Si indicherà con $\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}$ il prodotto di composizione del tensore $\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}$ con $\boldsymbol{v}$. Infine p è da considerarsi funzione di ϱ, α, s, tramite l'equazione di stato della miscela:

$$p = p(\varrho, \alpha, s) \,. \tag{5}$$

Pure funzioni assegnate di ϱ, α, s risulteranno β e βB:

$$\beta = \beta(\varrho, \alpha, s) \,, \tag{6}$$

$$\beta B = \varphi(\varrho, \alpha, s) \,. \tag{7}$$

Il sistema di equazioni (1), (2), (3), (4), con le relazioni (5), (6), (7), è stato studiato nel caso unidimensionale e linearizzato [3], [4], [5].

In questa nota ci si propone di stabilire per il sistema di equazioni scritto, il teorema di unicità in una regione finita $\mathcal{V}(t)$ in un intervallo di tempo 0, τ dove τ è un valore finito ma arbitrario del tempo, qualora siano assegnate opportune condizioni iniziali e sul contorno $\mathcal{S}$ di $\mathcal{V}$. Considereremo, delle equazioni date, solo soluzioni che diremo regolari; cioè supporremo $\boldsymbol{v}$, ϱ, α, s, funzioni continue insieme alle loro derivate prime e seconde. Supporremo che le (5), (6), (7) siano funzioni continue insieme alle loro derivate prime e seconde rispetto a ϱ, α, s, ed inoltre che ϱ e $\dfrac{\partial p}{\partial \varrho}$ siano sempre positive; si potrà quindi sempre porre $\varrho \geqslant m > 0$ e $\dfrac{\partial p}{\partial \varrho} = c^2$.

Detta G la velocità normale verso l'esterno del contorno $\mathcal{S}$ di $\mathcal{V}(t)$ ed $\boldsymbol{n}$ il versore normale esterno della superficie $\mathcal{S}$, porremo:

$$U = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} - G .$$

Enunciamo pertanto il seguente teorema di unicità: il sistema di equazioni (1), (2), (3), (4), con le (5), (6), (7), funzioni continue insieme alle loro derivate prime e seconde, ammette nella regione $\mathcal{V}(t)$ e per ogni istante t una sola soluzione regolare $\boldsymbol{v}$, ϱ, α, s; qualora siano assegnati per $t = 0$ i valori di $\boldsymbol{v}$, ϱ, α, s, in tutto $\mathcal{V}(0)$ (condizioni iniziali) ed inoltre siano assegnati per ogni $t > 0$ sulla superficie $\mathcal{S}$ di contorno, escluse le regioni in cui $U > c$, i valori di $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$, e nelle regioni di $\mathcal{S}$ in cui $U < 0$ anche i valori di ϱ, α, s.

---

[3]) T. von Karman: *Aerothermodynamics and combustion theory.* L'Aerotecnica; vol. XXXIII; 1956.

[4]) F. Stoppelli: *Un problema di aerotermochimica linerizzata.* Libreria Liguori, via Mezzocannone 22-23, Napoli.

[5]) L. G. Napolitano: *Contributo allo studio della fluidodinamica di sistemi non in equilibrio termodinamico.* L'Aerotecnica; vol. XL; 1960.

2. Siano $\boldsymbol{v}, \varrho, \alpha, s$, e $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1$, $\varrho+\varrho_1$, $\alpha+\alpha_1$, $s+s_1$, due eventuali soluzioni regolari in $\mathcal{V}(t)$ e $0 \leqslant t \leqslant \tau$ del sistema dato, con le medesime suddette condizioni iniziali e al contorno.

Sostituendo nelle equazioni date la seconda soluzione e sottraendo ordinatamente a queste le stesse equazioni, in cui si sia sostituito la prima soluzione, si ottiene: [6])

$$\frac{d\varrho_1}{dt} + \boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad}(\varrho+\varrho_1) + \varrho \operatorname{div} \boldsymbol{v}_1 + \varrho_1 \operatorname{div}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1) = 0 \,, \tag{8}$$

$$\varrho \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} + \varrho \frac{d(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)}{dP} \boldsymbol{v}_1 + \varrho \frac{d(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)}{dt} = -\operatorname{grad} p_1 \,, \tag{9}$$

$$\frac{d\alpha_1}{dt} + \boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad}(\alpha+\alpha_1) - \beta_1 = 0 \,, \tag{10}$$

$$\frac{ds_1}{dt} + \boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad}(s+s_1) + \varphi_1 = 0 \,. \tag{11}$$

Dove con p_1, β_1, φ_1, si sono indicate le differenze:

$$p(\varrho+\varrho_1, \alpha+\alpha_1, s+s_1) - p(\varrho, \alpha, s) \,;$$
$$\beta(\varrho+\varrho_1, \alpha+\alpha_1, s+s_1) - \beta(\varrho, \alpha, s);$$
$$\varphi(\varrho+\varrho_1, \alpha+\alpha_1, s+s_1) - \varphi(\varrho, \alpha, s) \,.$$

Moltiplicando scalarmente la (9) per v_1 si ha:

$$\frac{1}{2} \varrho \frac{dv_1^2}{dt} = -\varrho \boldsymbol{v}_1 \cdot \frac{d(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)}{dP} \boldsymbol{v}_1 - \varrho_1 \boldsymbol{v}_1 \cdot \frac{d(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)}{dt} - \boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad} p_1 \,. \tag{12}$$

---

[6]) Si tengano presenti le seguenti relazioni, scritte per grandezze generiche:

$$(a+a_1)(b+b_1) - ab = ab_1 + a_1(b+b_1) \,,$$

$$\frac{d(F+F_1)}{dt} - \frac{dF}{dt} =$$

$$\frac{\partial(F+F_1)}{\partial t} + (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1) \cdot \operatorname{grad}(F+F_1) - \frac{\partial F}{\partial t} - \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} F =$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} F_1 + \boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad}(F+F_1) = \frac{dF_1}{dt} + \boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad}(F+F_1).$$

Tenendo presente che per una generica grandezza F vale la relazione [7]:

$$(13)\qquad \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \varrho F d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \varrho \frac{dF}{dt} d\mathcal{V} - \int_{S} \varrho U F dS ,$$

per la (12) si può scrivere:

$$(14)\qquad \frac{d}{dt}\int_{S} \frac{1}{2}\varrho v_1^2 d\mathcal{V} = -\int_{S}\left[\varrho \boldsymbol{v}_1 \cdot \frac{d(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)}{dP}\boldsymbol{v}_1 + \right.$$

$$\left. + \varrho_1 \boldsymbol{v}_1 \cdot \frac{d(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)}{dt} + \boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad} p\right] d\mathcal{V} - \int_{S} \varrho U \frac{v_1^2}{2} dS .$$

Analogamente per la (10) e la (11) moltiplicate rispettivamente per α_1 e s_1 si ha:

$$(15)\qquad \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2}\varrho \alpha_1^2 d\mathcal{V} =$$

$$= -\int_{\mathcal{V}} [\varrho \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad}(\alpha + \alpha_1) - \varrho \alpha_1 \beta_1]\, d\mathcal{V} - \int_{S} \frac{1}{2}\varrho U \alpha_1^2 dS ,$$

$$(16)\qquad \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2}\varrho s_1^2 d\mathcal{V} =$$

$$= -\int_{\mathcal{V}} [\varrho s_1 \boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad}(s + s_1) + \varrho s_1 \varphi_1]\, d\mathcal{V} - \int_{S} \frac{1}{2}\varrho U s_1^2 dS .$$

Per i termini del secondo membro della (14) si ottengono, tenendo presente che in $0 \leqslant t \leqslant \tau$ $\frac{d(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)}{dP}$ e $\frac{d(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)}{dt}$ hanno

---

[7]) J. SERRIN: *On the uniqueness of compressible fluid motions.* Archive for Rational Mechanics and Analysis. Vol. 3; 1959, pag. 275.

componenti limitate, e che $2\,|\,ab\,| \leqslant a^2 + b^2$, le relazioni:

$$\left| \varrho \boldsymbol{v}_1 \cdot \frac{d(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1)}{dP}\, \boldsymbol{v}_1 \right| \leqslant N v_1^2 \,, \tag{17}$$

$$\left| \varrho_1 \boldsymbol{v}_1 \cdot \frac{d(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1)}{dt} \right| \leqslant N(\varrho_1^2 + v_1^2) \,. \tag{18}$$

Indicando con N, come faremo anche in seguito, un generico opportuno limite superiore.

Per il termine $\boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad} p_1$ occorre tener conto della (5) e quindi che:

$$\operatorname{grad} p = p_\varrho \operatorname{grad} \varrho + p_\alpha \operatorname{grad} \alpha + p_s \operatorname{grad} s \,. \tag{19}$$

Dove con p_ϱ, p_α, p_s, si sono indicate le derivate parziali di p rispetto a ϱ, α, s. Pertanto per la nota [6]):

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} p_1 &= \operatorname{grad} p(\varrho+\varrho_1, \alpha+\alpha_1, s+s_1) - \operatorname{grad} p(\varrho, \alpha, s) = \\ &= p_\varrho \operatorname{grad} \varrho_1 + p_\alpha \operatorname{grad} \alpha_1 + p_s \operatorname{grad} s_1 + \\ &\quad p_{\varrho_1} \operatorname{grad} (\varrho+\varrho_1) + p_{\alpha_1} \operatorname{grad} (\alpha+\alpha_1) + p_{s_1} \operatorname{grad} (s+s_1) \,; \end{aligned} \tag{20}$$

indicando con p_{ϱ_1}, $p_\varrho(\varrho+\varrho_1, \alpha+\alpha_1, s+s_1) - p_\varrho(\varrho, \alpha, s)$, e analogamente per p_{α_1} e p_{s_1}. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad} p_1 &= -\boldsymbol{v}_1 \cdot [p_\varrho \operatorname{grad} \varrho_1 + p_\alpha \operatorname{grad} \alpha_1 + \\ &+ p_s \operatorname{grad} s_1] - p_{\varrho_1} \boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad} (\varrho + \varrho_1) - \\ &- p_{\alpha_1} \boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad} (\alpha + \alpha_1) - p_{s_1} \boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad} (s + s_1) \,. \end{aligned} \tag{21}$$

per la continuità delle derivate di p_ϱ, p_α, p_s, e dei gradienti, si ha che esiste un opportuno numero N tale che:

$$\begin{aligned} &[- p_{\varrho_1} \boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad} (\varrho + \varrho_1) - p_{\alpha_1} \boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad} (\alpha + \alpha_1) - \\ &- p_{s_1} \boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad} (s + s_1)] \leqslant N(v_1^2 + \varrho_1^2 + \alpha_1^2 + s_1^2) \,. \end{aligned} \tag{22}$$

Inoltre:

$$(23)\qquad -\boldsymbol{v}_1\cdot[p_\varrho\,\mathrm{grad}\,\varrho_1+p_\alpha\,\mathrm{grad}\,\alpha_1+p_s\,\mathrm{grad}\,s_1]=$$
$$=-\mathrm{div}\,[(p_\varrho\varrho_1+p_\alpha\alpha_1+p_s s_1)\boldsymbol{v}_1]+$$
$$+(p_\varrho\varrho_1+p_\alpha\alpha_1+p_s s_1)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_1\cdot$$
$$\cdot[\varrho_1\,\mathrm{grad}\,p_\varrho+\alpha_1\,\mathrm{grad}\,p_\alpha+s_1\,\mathrm{grad}\,p_s]\,.$$

Per l'ultimo termine vale una relazione analoga alla (22) con un numero N opportuno:

$$(24)\qquad \boldsymbol{v}_1\cdot[\varrho_1\,\mathrm{grad}\,p_\varrho+\alpha_1\,\mathrm{grad}\,p_\alpha+s_1\,\mathrm{grad}\,p_s]\leqslant$$
$$\leqslant N(v_1^2+\varrho_1^2+\alpha_1^2+s_1^2)\,.$$

Ma per la (8) si ha:

$$(25)\qquad p_\varrho\varrho_1\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_1=-\varrho\frac{p_\varrho}{\varrho^2}\varrho_1\frac{d\varrho_1}{dt}-\frac{p_\varrho}{\varrho}\varrho_1\boldsymbol{v}_1\cdot$$
$$\cdot\,\mathrm{grad}\,(\varrho+\varrho_1)-\frac{p_\varrho}{\varrho}\varrho_1^2\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)=-\varrho\frac{d}{dt}\left(\frac{p_\varrho}{\varrho^2}\frac{\varrho_1^2}{2}\right)+$$
$$+\varrho\frac{\varrho_1^2}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{p_\varrho}{\varrho^2}\right)-\frac{p_\varrho}{\varrho}\varrho_1\boldsymbol{v}_1\cdot\mathrm{grad}\,(\varrho+\varrho_1)-\frac{p_\varrho}{\varrho}\varrho_1^2\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)\,.$$

Da cui facilmente si ha la relazione:

$$(26)\qquad p_\varrho\varrho_1\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_1\leqslant-\varrho\frac{d}{dt}\left(\frac{p_\varrho}{\varrho^2}\frac{\varrho_1^2}{2}\right)+N(v_1^2+\varrho_1^2)\,.$$

Per la (8) moltiplicata per $\dfrac{p_\alpha}{\varrho}\alpha_1$ e la (10) per $\dfrac{p_\alpha}{\varrho}\varrho_1$, si ha:

$$(27)\qquad p_\alpha\alpha_1\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_1=-\varrho\frac{p_\alpha}{\varrho^2}\alpha_1\frac{d\varrho_1}{dt}-\varrho\frac{p_\alpha}{\varrho^2}\varrho_1\frac{d\alpha_1}{dt}-\frac{p_\alpha}{\varrho}\alpha_1\boldsymbol{v}_1\cdot$$
$$\cdot\,\mathrm{grad}\,(\varrho+\varrho_1)-\frac{p_\alpha}{\varrho}\alpha_1\varrho_1\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)-\frac{p_\alpha}{\varrho}\varrho_1\boldsymbol{v}_1\cdot\mathrm{grad}\,(\alpha+\alpha_1)+$$

$$+ \frac{p_\alpha}{\varrho} \varrho_1\beta_1 = - \varrho \frac{d}{dt}\left(\frac{p_\alpha}{\varrho^2} \alpha_1\varrho_1\right) + \varrho\, \alpha_1\varrho_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{p_\alpha}{\varrho^2}\right) - \frac{p_\alpha}{\varrho} \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 \cdot$$

$$\cdot \operatorname{grad}(\varrho + \varrho_1) - \frac{p_\alpha}{\varrho} \alpha_1\varrho_1 \operatorname{div}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) -$$

$$- \frac{p_\alpha}{\varrho} \varrho_1\boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad}(\alpha + \alpha_1) + \frac{p_\alpha}{\varrho} \varrho_1\beta_1 \,.$$

Da cui:

$$p_\alpha\alpha_1 \operatorname{div} \boldsymbol{v}_1 \leqslant - \varrho \frac{d}{dt}\left(\frac{p_\alpha}{\varrho^2} \alpha_1\varrho_1\right) + N(v_1^2 + \varrho_1^2 + \alpha_1^2 + s_1^2) \,. \tag{28}$$

Per la (8) moltiplicata per $\frac{p_s}{\varrho} s_1$ e la (11) per $\frac{p_s}{\varrho} \varrho_1$, si ha:

$$p_s s_1 \operatorname{div} \boldsymbol{v}_1 = - \varrho \frac{p_s}{\varrho^2} s_1 \frac{d\varrho_1}{dt} - \varrho \frac{p_s}{\varrho^2} \varrho_1 \frac{ds_1}{dt} - \frac{p_s}{\varrho} s_1\boldsymbol{v}_1 \cdot \tag{29}$$

$$\cdot \operatorname{grad}(\varrho + \varrho_1) - \frac{p_s}{\varrho} s_1\varrho_1 \operatorname{div}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) -$$

$$- \frac{p_s}{\varrho} \varrho_1\boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad}(s + s_1) - \frac{p_s}{\varrho} \varrho_1\varphi_1 = - \varrho \frac{d}{dt}\left(\frac{p_s}{\varrho^2} \varrho_1 s_1\right) +$$

$$+ \varrho\varrho_1 s_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{p_s}{\varrho^2}\right) - \frac{p_s}{\varrho} s_1\boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad}(\varrho + \varrho_1) -$$

$$- \frac{p_s}{\varrho} s_1\varrho_1 \operatorname{div}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) - \frac{p_s}{\varrho} \varrho_1\boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad}(s + s_1) - \frac{p_s}{\varrho} \varrho_1\varphi_1 \,.$$

Da cui:

$$p_s s_1 \operatorname{div} \boldsymbol{v}_1 \leqslant - \varrho \frac{d}{dt}\left(\frac{p_s}{\varrho^2} \varrho_1 s_1\right) + N(v_1^2 + \varrho_1^2 + \alpha_1^2 + s_1^2) \,. \tag{30}$$

Quindi per le (21), (22), (24), (26), (28), (30), si ha:

$$- \boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad} p_1 \leqslant - \varrho \frac{d}{dt}\left(\frac{p_\varrho}{\varrho^2} \frac{\varrho_1^2}{2} + \frac{p_\alpha}{\varrho^2} \varrho_1\alpha_1 + \frac{p_s}{\varrho^2} \varrho_1 s_1\right) + \tag{31}$$

$$+ N(v_1^2 + \varrho_1^2 + \alpha_1^2 + s_1^2) - \operatorname{div}[(p_\varrho\varrho_1 + p_\alpha\alpha_1 + p_s s_1)\boldsymbol{v}_1] \,.$$

Per le (17), (18) e (31), la (14) diventa allora:

$$(32)\quad \frac{d}{dt}\int_{\mathfrak{V}}\frac{1}{2}\varrho v_1^2 d\mathfrak{V} \leqslant -\int_{\mathfrak{V}}\varrho\frac{d}{dt}\left(\frac{p_\varrho}{\varrho^2}\frac{\varrho_1^2}{2}+\frac{p_\alpha}{\varrho^2}\varrho_1\alpha_1+\frac{p_s}{\varrho^2}\varrho_1 s_1\right)d\mathfrak{V}+$$

$$+\int_{\mathfrak{V}}N(v_1^2+\varrho_1^2+\alpha_1^2+s_1^2)d\mathfrak{V}-\int_{\mathfrak{S}}\left[\varrho U\frac{v_1^2}{2}+\right.$$

$$\left.+(p_\varrho\varrho_1+p_\alpha\alpha_1+p_s s_1)\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{n}\right]d\mathfrak{S}\,.$$

Per la (13) il primo integrale del secondo membro di questa ultima diventa:

$$(33)\quad \int_{\mathfrak{V}}\varrho\frac{d}{dt}\left(\frac{p_\varrho}{\varrho^2}\frac{\varrho_1^2}{2}+\frac{p_\alpha}{\varrho^2}\varrho_1\alpha_1+\frac{p_s}{\varrho^2}\varrho_1 s_1\right)d\mathfrak{V}=\frac{d}{dt}\int_{\mathfrak{V}}\left(\frac{p_\varrho}{\varrho}\frac{\varrho_1^2}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{p_\alpha}{\varrho}\varrho_1\alpha_1+\frac{p_s}{\varrho}\varrho_1 s_1\right)d\mathfrak{V}+$$

$$+\int_{\mathfrak{S}}U\left(\frac{p_\varrho}{\varrho}\frac{\varrho_1^2}{2}+\frac{p_\alpha}{\varrho}\varrho_1\alpha_1+\frac{p_s}{\varrho}\varrho_1 s_1\right)d\mathfrak{S}\,.$$

Per cui la (32), posto $p_\varrho = c^2$, conduce a:

$$(34)\quad \frac{d}{dt}\int_{\mathfrak{V}}\frac{1}{2}\varrho\left[v_1^2+\frac{c^2}{\varrho^2}\varrho_1^2+\frac{2p_\alpha}{\varrho^2}\varrho_1\alpha_1+\frac{2p_s}{\varrho^2}\varrho_1 s_1\right]d\mathfrak{S}\leqslant$$

$$\leqslant N\int_{\mathfrak{V}}(v_1^2+\varrho_1^2+\alpha_1^2+s_1^2)d\mathfrak{V}-$$

$$-\int_{\mathfrak{S}}\left\{\frac{1}{2}\varrho U\left[v_1^2+\frac{c^2}{\varrho^2}\varrho_1^2+\frac{2p_\alpha}{\varrho^2}\varrho_1\alpha_1+\frac{2p_s}{\varrho^2}\varrho_1 s_1\right]+\right.$$

$$\left.+(c^2\varrho_1+p_\alpha\alpha_1+p_s s_1)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\right\}d\mathfrak{S}\,.$$

Possiamo ora trasformare opportunamente anche le (15) e (16). Tenendo infatti conto che i termini nell'integrale di volume del secondo membro sono maggiorabili con termini quadratici in $v_1, \varrho_1, \alpha_1, s_1$, si ha:

$$(35)\quad \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2}\varrho\alpha_1^2 d\mathcal{V} \leqslant N\int_{\mathcal{V}}(v_1^2+\varrho_1^2+\alpha_1^2+s_1^2)d\mathcal{V} - \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}}\varrho U\alpha_1^2 d\mathcal{S}\,,$$

$$(36)\quad \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2}\varrho s_1^2 d\mathcal{V} \leqslant N\int_{\mathcal{V}}(v_1^2+\varrho_1^2+\alpha_1^2+s_1^2)d\mathcal{V} - \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}}\varrho U s_1^2 d\mathcal{S}\,.$$

Con un procedimento dovuto a J. Serrin [8]), si moltiplicano le (35) e (36) per due fattori positivi θ ed η da determinarsi opportunamente e si sommano alla (34) (N indica sempre un opportuno limite superiore):

$$(37)\quad \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2}\varrho\left[v_1^2+\frac{c^2}{\varrho^2}\varrho_1^2+\frac{2p_\alpha}{\varrho^2}\varrho_1\alpha_1+\frac{2p_s}{\varrho^2}\varrho_1 s_1+\theta\alpha_1^2+\eta s_1^2\right]d\mathcal{V} \leqslant$$

$$\leqslant N\int_{\mathcal{V}}(v_1^2+\varrho_1^2+\alpha_1^2+s_1^2)d\mathcal{V} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}}\left[\varrho U\left(v_1^2+\frac{c^2}{\varrho^2}\varrho_1^2+\frac{2p_\alpha}{\varrho^2}\varrho_1\alpha_1+\frac{2p_s}{\varrho^2}\varrho_1 s_1+\theta\alpha_1^2+\eta s_1^2\right)+\right.$$

$$\left.+\,2(c^2\varrho_1+p_\alpha\alpha_1+p_s s_1)\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{n}\right]d\mathcal{S}\,.$$

Posto:

$$(38)\qquad J = v_1^2+\frac{c^2}{\varrho^2}\varrho_1^2+\frac{2p_\alpha}{\varrho^2}\varrho_1\alpha_1+\frac{2p_s}{\varrho^2}\varrho_1 s_1+\theta\alpha_1^2+\eta s_1^2\,,$$

$$(39)\qquad K = \varrho UJ + 2(c^2\varrho_1+p_\alpha\alpha_1+p_s s_1)\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{n}\,;$$

facendo per θ ed η le seguenti posizioni:

$$(40)\qquad \theta \geqslant \underset{t\leqslant\tau}{\mathrm{Max}}\left(\frac{c^2}{2\varrho^2}+\frac{4p_\alpha^2}{\varrho^2c^2}\right);$$

$$(41)\qquad \eta \geqslant \underset{t\leqslant\tau}{\mathrm{Max}}\left(\frac{c^2}{2\varrho^2}+\frac{4p_s}{\varrho^2c^2}\right);$$

---

[8]) J. Serrin: nota citata pag. 282.

si ha:

$$J \geqslant v_1^2 + \frac{c^2}{2\varrho^2}(\varrho_1^2 + \alpha_1^2 + s_1^2) + \left(\frac{c\varrho_1}{2\varrho} + \frac{2p_\alpha}{\varrho c}\alpha_1\right)^2 + \left(\frac{c\varrho_1}{2\varrho} + \frac{2p_s}{\varrho c}s_1\right)^2 \geqslant v_1^2 + \frac{c^2}{2\varrho^2}(\varrho_1^2 + \alpha_1^2 + s_1^2)\,. \tag{42}$$

Risulta allora sempre possibile determinare un N' positivo tale che:

$$\frac{N'J}{2} \geqslant N(r_1^2 + \varrho_1^2 + \alpha_1^2 + s_1^2)\,. \tag{43}$$

La (37) può quindi scriversi:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \varrho J d\mathcal{V} \leqslant N' \int_{\mathcal{V}} \varrho J d\mathcal{V} - \int_{S} [\varrho U J + 2(c^2\varrho_1 + p_\alpha\alpha_1 + p_s s_1)\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n}] dS\,. \tag{44}$$

Ma per le condizioni al contorno poste, nelle regioni di S in cui $U < c$ risulta $K > 0$. Infatti si ha $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n} = 0$ e $J \neq 0$ e maggiore di zero solo per $U > 0$. Nelle regioni di S poi in cui $U \geqslant c$, risulta valida una delle due relazioni:

$$K \geqslant \varrho c J + 2v_1(c^2\varrho_1 + p_\alpha\alpha_1 + p_s s_1) = Q_1\,, \tag{45}$$

$$K \geqslant \varrho c J - 2v_1(c^2\varrho_1 + p_\alpha\alpha_1 + p_s s_1) = Q_2\,. \tag{46}$$

Ma per le (40) e (41):

$$\begin{aligned} Q_1 \geqslant \varrho c \Bigg[& v_1^2 + \frac{c^2}{2\varrho^2}(\varrho_1^2 + \alpha_1^2 + s_1^2) + \left(\frac{c\varrho_1}{2\varrho} + \frac{2p_\alpha}{\varrho c}\alpha_1\right)^2 + \\ & + \left(\frac{c\varrho_1}{2\varrho} + \frac{2p_s}{\varrho c}s_1\right)^2 + \frac{2c}{\varrho}v_1\varrho_1 + \frac{2p_\alpha}{\varrho c}\alpha_1 v_1 + \frac{2p_s}{\varrho c}s_1 v_1\Bigg] = \\ = \varrho c \Bigg[& \frac{c^2}{2\varrho^2}(\alpha_1^2 + s_1^2) + \left(\frac{v_1}{\sqrt{2}} + \frac{c\varrho_1}{\sqrt{2}\,\varrho}\right)^2 + \\ & + \left(\frac{v_1}{2} + \frac{c}{2\varrho}\varrho_1 + \frac{2\varrho_\alpha}{\varrho c}\alpha_1\right)^2 + \left(\frac{v_1}{2} + \frac{c\varrho_1}{2\varrho} + \frac{2p_s}{\varrho c}s_1\right)^2\Bigg] \geqslant 0\,. \end{aligned} \tag{47}$$

Ed analogamente:

$$(48) \qquad Q_2 \geqslant \varrho c \left[\frac{c^2}{2\varrho^2} (\alpha_1^2 + s_1^2) + \left(\frac{v_1}{\sqrt{2}} - \frac{c\varrho_1}{\sqrt{2}\,\varrho} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{c\varrho_1}{2\varrho} - \frac{v_1}{2} + \frac{2p_\alpha}{\varrho c} \alpha_1 \right)^2 + \left(\frac{c\varrho_1}{2\varrho} - \frac{v_1}{2} + \frac{2p_s}{\varrho c} s_1 \right)^2 \right] \geqslant 0 \, .$$

Per cui sicuramente anche con $U \geqslant c$ si ha $K \geqslant 0$. Quindi per le condizioni al contorno poste si ha che l'integrale esteso ad S nella (44) risulta positivo e vale perciò anche la relazione:

$$(49) \qquad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \varrho J d\mathcal{V} \leqslant N' \int_{\mathcal{V}} \varrho J d\mathcal{V} \, .$$

Ma allora segue che [9])

$$(50) \qquad \int_{\mathcal{V}} \varrho J d\mathcal{V} = 0 \, ,$$

e per la (42) risulta subito che v_1, ϱ_1, α_1, s_1, sono identicamente nulle per ogni t in tutto $\mathcal{V}(t)$ ed il teorema di unicità è completamente provato.

---

[9]) D. GRAFFI: *Sulla teoria della propagazione del calore per convezione naturale*. Rend. Lincei XII (1930), pag. 135.