Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Domenico Boccioni

Indipendenza delle condizioni di doppia e di tripla distributività

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 33 (1963), p. 33-47

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__33_0>

INDIPENDENZA DELLE CONDIZIONI DI DOPPIA E DI TRIPLA DISTRIBUTIVITÀ

Nota *) *di* DOMENICO BOCCIONI (*a Padova*)

Le $2\nu^3$ (rispettivam. le $3\nu^3$) eguaglianze che si ottengono da due (risp. da tre) eguaglianze fissate a piacere fra le seguenti quattro:

$$x(y + z) = (xy) + (xz)\,, \qquad (x + y)z = (xz) + (yz)\,,$$

$$x + (yz) = (x + y)(x + z)\,, \qquad (xy) + z = (x + z)(y + z)\,,$$

in corrispondenza a tutte le ν^3 terne (x, y, z) di elementi di un insieme B, avente numero cardinale non necessariamente finito $\nu \geqslant 2$, vengono dette condizioni di doppia (risp. di tripla) distributività di B.

Nella presente nota viene dimostrato che sia le $2\nu^3$ condizioni di doppia distributività di B, sia le $3\nu^3$ condizioni di tripla distributività di B sono indipendenti se, e soltanto se, $\nu \geqslant 3$ (indipendenti nel senso che, fissatane una qualsiasi esistono sempre un'addizione e una moltiplicazione, definite in B, per le quali la condizione fissata non è soddisfatta, mentre sono invece soddisfatte tutte le rimanenti).

Se $\nu = 2$, vengono poi determinati tutti i sottinsiemi costituiti da condizioni indipendenti ed equivalenti alle condizioni

---

*) Pervenuta in Redazione il 20 giugno 1962.
Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

di doppia (risp. di tripla) distributività di B. Ciascuno di questi sottinsiemi è costituito da otto (risp. da dieci) condizioni (n^{i} 7, 8).

Le $2\nu^3$ eguaglianze $x(y+z) = (xy)+(xz)$, $(x+y)z = (xz)+(yz)$ (particolari condizioni di doppia distributività) erano state già studiate in [1][1]), con la denominazione di condizioni di distributività.

Nel seguito vengono studiate dapprima (n^{i} 1-7) le condizioni di tripla distributività, e poi (n.° 8) quelle di doppia distributività.

1. - Denotiamo con

$$M$$

l'insieme delle $4\nu^3$ condizioni di mutua distributività ([2], n.° 1):

$$x(y+z) = (xy) + (xz)\,, \tag{1}$$

$$(x+y)z = (xz) + (yz)\,, \tag{2}$$

$$x + (yz) = (x+y)(x+z)\,, \tag{3}$$

$$(xy) + z = (x+z)(y+z) \tag{4}$$

di un insieme B avente numero cardinale (non necessariamente finito) $\nu \geqslant 2$ $(x, y, z \in B)$.

Denotiamo inoltre con

$$T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4$$

rispettivamente l'insieme delle $3\nu^3$ eguaglianze (2), (3), (4), l'insieme delle $3\nu^3$ eguaglianze (1), (3), (4), l'insieme delle $3\nu^3$ eguaglianze (1), (2), (4), l'insieme delle $3\nu^3$ eguaglianze (1), (2), (3), $(x, y, z \in B)$. Le $3\nu^3$ eguaglianze costituenti T_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ vengono dette *condizioni di tripla distributività* dell'insieme B.

Studieremo nel seguito ciascuno, T_i, dei quattro insiemi di condizioni (di tripla distributività) T_1, T_2, T_3, T_4, determinando

---

[1]) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

(per ogni valore di ν) tutti i suoi sottinsiemi, T'_i, indipendenti ([3], n.° 1) e ad esso equivalenti ([3], n.° 1). A tal fine sarà sufficiente, come vedremo, studiare direttamente uno solo di questi quattro insiemi, ad es. come faremo, l'insieme T_4.

Poichè già sappiamo ([2], n.° 1, teor. 1) che l'insieme M è indipendente se $\nu \geqslant 4$, sappiamo dunque pure che:

I) *Se il numero cardinale ν di un insieme B è $\geqslant 4$, ciascuno dei quattro insiemi di condizioni (di tripla distributività di B) T_1, T_2, T_3, T_4 è indipendente* ([3], n.° 1).

Restano dunque da esaminare soltanto i due casi $\nu = 2$, $\nu = 3$. Vedremo che le condizioni di tripla distributività di B sono ancora indipendenti se $\nu = 3$, mentre non lo sono più se $\nu = 2$.

Salvo avviso in contrario, conserviamo nel seguito tutte le definizioni e le notazioni adottate in [1] e in [2].

2. – Premettiamo alcuni lemmi.

LEMMA 1: *Se due bisistemi sono α-opposti* ([1], p. 6), *allora* ([2], p. 42):

1) *se la terna (x, y, z) è (1)-distributiva in uno di essi, la terna (x, z, y) è (1)-distributiva nell'altro;*

2) *se la terna (x, y, z) è (2)-distributiva in uno di essi, la terna (y, x, z) è (2)-distributiva nell'altro;*

3) *se la terna (x, y, z) è (3)-distributiva in uno di essi, la terna (y, z, x) è (4)-distributiva nell'altro;*

4) *se la terna (x, y, z) è (4)-distributiva in uno di essi, la terna (z, x, y) è (3)-distributiva nell'altro.*

Infatti, detto B il comune sostegno e denotata con $x\alpha y$ la somma nell'un bisistema e con $x\bar{\alpha}y$ nell'altro, si ha appunto $(x, y, z \in B)$: 1) v. [1], p. 6; 2) $(y\bar{\alpha}x)z = (x\alpha y)z = (xz)\alpha(yz) = (yz)\bar{\alpha}(xz)$; 3) $(yz)\bar{\alpha}x = x\alpha(yz) = (x\alpha y)(x\alpha z) = (y\bar{\alpha}x)(z\bar{\alpha}x)$; 4) $z\bar{\alpha}(xy) = (xy)\alpha z = (x\alpha z)(y\alpha z) = (z\bar{\alpha}x)(z\bar{\alpha}y)$. Vale poi evidentemente il seguente

LEMMA 2: *Se due bisistemi sono duali* ([1], p. 3), *e se la terna (x, y, z) è risp.* (1)-, (2)-, (3)-, (4)-*distributiva in uno di essi, la stessa terna (x, y, z) è risp.* (3)-, (4)-, (1)-, (2)-*distributiva nell'altro* ([2], p. 42).

Se due bisistemi sono μ-opposti ([1], p. 6), i loro duali sono evidentemente α-opposti. Perciò dai due lemmi precedenti si ottiene immediatamente il seguente altro.

LEMMA 3: *Se due bisistemi sono μ-opposti* ([1], p. 6), *allora* ([2], p. 42):

1) *se la terna* (x, y, z) *è* (1)-*distributiva in uno di essi, la terna* (y, z, x) *è* (2)-*distributiva nell'altro*;

2) *se la terna* (x, y, z) *è* (2)-*distributiva in uno di essi, la terna* (z, x, y) *è* (1)-*distributiva nell'altro*;

3) *se la terna* (x, y, z) *è* (3)-*distributiva in uno di essi, la terna* (x, z, y) *è* (3)-*distributiva nell'altro*;

4) *se la terna* (x, y, z) *è* (4)-*distributiva in uno di essi, la terna* (y, x, z) *è* (4)-*distributiva nell'altro.*

3. – Consideriamo dapprima il caso $\nu = 3$. Faremo vedere che, in questo caso, l'insieme T_4 delle $3\nu^3$ condizioni (1), (2), (3) (di tripla distributività dell'insieme $B = \{a, b, c\}$) è indipendente ([3], n.° 1). A tal fine, dimostriamo anzitutto che:

II) *Ciascuna delle cinque terne* (a, a, a), (a, a, b), (b, a, a), (a, b, a), (a, b, c) *è* (1)-*isolata* ([2], p. 42) *in un bisistema* (2, 3)-*distributivo* ([2], p. 42), *di sostegno* $\{a, b, c\}$, *i cui gruppoidi additivo e moltiplicato non sono opposti* ([1], n.° 3).

Infatti: 1) Per le due terne (a, a, a) e (b, a, a), si veda la dimostrazione della I) in [2], n.° 3 (punti primo e terzo).

2°) Per la terna (a, a, b), si veda [1], p. 27: si riconosce facilmente (cfr. [1], p. 8, ult. capov.) che il bisistema definito dalle (18) è appunto (3)-distributivo.

3°) La terna (a, b, a) è (1)-isolata nel bisistema (2, 3)-distributivo definito dalle due seguenti tabelle:

$$(5)\qquad \begin{array}{c|ccc} + & a & b & c \\ \hline a & b & b & b \\ b & c & b & b \\ c & b & b & b \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & b & b & c \\ b & b & b & b \\ c & b & b & b \end{array}$$

4°) La terna (a, b, c) è (1)-isolata nel bisistema (2, 3)-distributivo definito dalle due seguenti tabelle:

(6)

$+$	a	b	c
a	b	b	b
b	b	b	c
c	b	b	b

$\cdot$	a	b	c
a	b	b	a
b	b	b	b
c	b	b	b

Le affermazioni relative ai bisistemi (5) e (6) si verificano facilmente (cfr. [1], p. 8, ult. capov.).

III) *Ciascuna delle cinque terne* (a, a, a), (a, b, a), (a, a, b), (b, a, a), (b, c, a) *è* (2)-*isolata* ([2], p. 42) *in un bisistema* (1, 3)-*distributivo* ([2], p. 42) *di sostegno* $\{a, b, c\}$.

Infatti, in virtù del lemma 3 (n.° 2), tali cinque bisistemi sono i μ-opposti dei cinque bisistemi la cui esistenza è affermata dalla precedente II), (cfr. [1], p. 6, nota ²)).

IV) *Ciascuna terna di elementi dell'insieme* $B = \{a, b, c\}$ *è* (1)-*isolata* ([2], p. 42) *in un bisistema* (2, 3)-*distributivo* ([2], p. 42) *di sostegno* B.

V) *Ciascuna terna di elementi dell'insieme* $B = \{a, b, c\}$ *è* (2)-*isolata* ([2], p. 42) *in un bisistema* (1, 3)-*distributivo* ([2], p. 42) *di sostegno* B.

Dimostrazione delle IV), V): Queste due proposizioni sono conseguenze immediate risp. delle II), III), in virtù delle osservazioni del n.° 2 di [1].

4. – Continuando lo studio del caso $\nu = 3$, dimostriamo ora che:

VI) *Ciascuna delle cinque terne* (a, a, a), (a, a, b), (b, a, a), (a, b, a), (a, b, c) *è* (3)-*isolata* ([2], p. 42) *in un bisistema* (1, 2)-*distributivo* ([2], p. 42) *di sostegno* $\{a, b, c\}$.

Infatti: 1°) Per le due terne (a, a, a) e (b, a, a), si vedano i punti primo e terzo della dimostrazione della I) in [2], n.° 3; due bisistemi duali dei due ivi considerati sono quelli occorrenti virtù del lemma 2 del n.° 2).

2°) La terna (a, a, b) è (3)-isolata nel bisistema (

stributivo definito dalle due seguenti tabelle:

(7)
$$
\begin{array}{c|ccc}
+ & a & b & c \\
\hline
a & c & b & c \\
b & c & c & c \\
c & c & c & c
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|ccc}
\cdot & a & b & c \\
\hline
a & a & b & c \\
b & c & c & c \\
c & c & c & c
\end{array}
$$

come facilmente si verifica (cfr. [1], p. 8, ult. capov.).

3º) La terna (a, b, a) è (3)-isolata nel bisistema (1, 2)-distributivo, di sostegno $\{a, b, c\}$, μ-opposto di quello definito dalle precedenti tabelle (7), e ciò in virtù del lemma 3 del n.º 2.

4º) La terna (a, b, c) è (3)-isolata nel bisistema (1, 2)-distribuito definito dalle due seguenti tabelle:

(8)
$$
\begin{array}{c|ccc}
+ & a & b & c \\
\hline
a & a & a & c \\
b & a & b & c \\
c & c & c & c
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|ccc}
\cdot & a & b & c \\
\hline
a & a & a & c \\
b & a & a & a \\
c & c & c & c
\end{array}
$$

E invero, qualunque siano $y, z \in \{a, b, c\}$, (3): $a + (bc) = a + a = a$, $(a + b)(a + c) = ac = c$; $a + (bz) = a + a = a$, $(a + b)(a + z) = aa = a$ se $z \neq c$; $a + (az) = (a + a)(a + z)$; $a + (cz) = a + c = c$, $(a + c)(a + z) = c(a + z) = c$; $b + (yz) = yz$, $(b + y)(b + z) = yz$; $c + (yz) = c$, $(c + y)(c + z) = cc = c$; (1): $a(a + z) = (aa) + (az)$; $a(b + z) = az$, $(ab) + (az) = a + (az) = az$ poichè $az \neq b$; $a(c + z) = ac = c$, $(ac) + (az) = c + (az) = c$; $b(y + z) = a$, $(by) + (bz) = a + a = a$; $c(y+z) = c$, $(cy)+(cz) = c+c = c$; (2): $(a+a)z = az$, $(az)+(az) = az$; $(a + b)z = az$, $(az) + (bz) = (az) + a = az$ poiché $az \neq b$; $(a + c)z = cz = c$, $(az) + (cz) = (az) + c = c$; $(b + y)z = yz$, $(bz) + (yz) = a + (yz) = yz$ poiché $yz \neq b$; $(c + y)z = cz = c$, $(cz) + (yz) = c + (yz) = c$.

VII) ***Ciascuna terna di elementi dell'insieme $B = \{a, b, c\}$ è (3)-isolata ([2], p. 42) in un bisistema (1, 2)-distributivo ([2], p. 42) di sostegno B.***

Infatti la VII) discende subito dalla precedente VI) in virtù

delle osservazioni del n.° 2 di [1]. Le IV), V), VII) dimostrano appunto che:

VIII) *L'insieme* T_4, *delle* $3v^3$ *condizioni di tripla distributività* (1), (2), (3) *di un insieme* B *avente numero cardinale* v, *è indipendente* ([3], n.° 1) *se* $v = 3$.

5. – Per comodità espositiva, denoteremo coi simboli

$$1(x, y, z)\,,\quad 2(x, y, z)\,,\quad 3(x, y, z)\,,\quad 4(x, y, z) \tag{9}$$

rispettivamente le eguaglianze (1), (2), (3), (4) del n.° 1, cioè le condizioni di mutua distributività *relative* (cfr. [1], p. 17) alla terna (x, y, z) (di elementi di B).

Passiamo ora a studiare il caso $v = 2$. Denotati con a, b i due elementi dell'insieme B (n.° 1), pensiamo ripartire le 32 $(= 4 \cdot 2^3)$ condizioni di mutua distributività di $B = \{a, b\}$ in sedici classi, ognuna costituita da due condizioni; precisamente poniamo:

$$\left.\begin{aligned} C_{i1} &= \{i(a, a, a),\ i(a, b, b)\}\,,\\ C_{i2} &= \{i(a, a, b),\ i(a, b, a)\}\,,\\ C_{i3} &= \{i(b, b, b),\ i(b, a, a)\}\,,\\ C_{i4} &= \{i(b, b, a),\ i(b, a, b)\}\end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 3),$$

e poniamo inoltre:

$$\left.\begin{aligned} C_{i1} &= \{i(a, a, a),\ i(b, b, a)\}\,,\\ C_{i2} &= \{i(b, a, a),\ i(a, b, a)\}\,,\\ C_{i3} &= \{i(b, b, b),\ i(a, a, b)\}\,,\\ C_{i4} &= \{i(a, b, b),\ i(b, a, b)\}\end{aligned}\right. \qquad (i = 2, 4).$$

IX) *Una delle due condizioni di mutua distributività di* $B = \{a, b\}$ *costituenti la classe* C_{ij} *è soddisfatta in un bisistema di sostegno* B *se, e soltanto se, vi è soddisfatta l'altra* $(i, j = 1, 2, 3, 4)$.

Infatti per $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$ la cosa è già nota ([1], n.$^{\mathrm{i}}$ 6 e 11); per $i = 3, 4$, $j = 1, 2, 3, 4$ la IX) si deduce subito da questo fatto già noto tramite il lemma 2 del n.° 2.

X) *Le due condizioni costituenti la classe* C_{i2} *sono le due uniche condizioni di mutua distributività di* $B = \{a, b\}$ *non soddisfatte in un bisistema di sostegno* B. $(i = 1, 2, 3, 4.)$

Infatti per $i = 1$ un tale bisistema è il (12, 14) ([1], p. 21), per $i = 2$ è l'opposto del (12, 14) ([1], p. 22, lemma 13; [2], p. 43, lemma 2), per $i = 3, 4$ è il duale di uno dei due bisistemi ora nominati (n.° 2, lemma 2).

X') *Le due condizioni costituenti la classe* C_{i4} *sono le due uniche condizioni di mutua distributività di* $B = \{a, b\}$ *non soddisfatte in un bisistema di sostegno* B. ($i = 1, 2, 3, 4$.)

Infatti tali quattro bisistemi sono le immagini isomorfe (cfr. [1], n.° 2) dei quattro bisistemi la cui esistenza è affermata dalla X), mediante la corrispondenza $a \to b$, $b \to a$.

XI) *Le quattro condizioni costituenti la classe* $C_{1j} \cup C_{4j}$ *sono le uniche quattro condizioni di mutua distributività di* $B = \{a, b\}$ *non soddisfatte in un bisistema di sostegno* B. ($j = 1, 3$.)

Infatti per $j = 1$ un tale bisistema è l'(8, 14) ([1], p. 21), per $j = 3$ è l'immagine isomorfa dell'(8, 14) mediante la corrispondenza $a \to b$, $b \to a$.

XI') *Le quattro condizioni costituenti la classe* $C_{2j} \cup C_{3j}$ *sono le uniche quattro condizioni di mutua distributività di* $B = \{a, b\}$ *non soddisfatte in un bisistema di sostegno* B. ($j = 1, 3$.)

Infatti tali due bisistemi sono i duali (n.° 2, lemma 2) dei due bisistemi la cui esistenza è affermata dalla XI).

6. – Continuando lo studio del caso $\nu = 2$, poniamo (v. n.° 5):

$$C = C_{11} \cup C_{12} \cup C_{13} \cup C_{14} \cup C_{22} \cup C_{24} \cup C_{32} \cup C_{34}\,,$$

e dimostriamo che:

XII) ***Non esiste alcun bisistema di sostegno*** $B = \{a, b\}$ ***in cui siano soddisfatte tutte le condizioni costituenti la classe*** C, ***e nel quale le due condizioni*** $2(a, a, a)$, $3(a, a, a)$ ***siano una soddisfatta e l'altra non soddisfatta.***

Infatti: i) Supponiamo che B^0 sia un bisistema di sostegno $B = \{a, b\}$ in cui $2(a, a, a)$ non sia soddisfatta, cioè in cui risulti

$$(a + a)a \neq (aa) + (aa)\,, \tag{10}$$

e nel quale siano invece soddisfatte $3(a, a, a)$ e le condizioni costituenti C; e dimostriamo l'assurdità di questo ipotesi. Invero, la (10) implica $(a + a, aa) \neq (a, a)$; distinguiamo perciò i tre casi $(a + a, aa) = (a, b)$, (b, a), (b, b).

1) In B^o risulti

$$a + a = a\,, \qquad aa = b\,.$$

Allora $1(a, a, a)$ implica $b + b = b$, quindi risulta $(a + a)a = (aa) + (aa)$, il che, per la (10), è assurdo.

2) In B^o risulti

$$a + a = b\,, \qquad aa = a\,.$$

Allora la (10) implica $ba = a$, e quindi $2(a, b, a)$ comporta $a = (a + b)a = (aa) + (ba) = b$, il che è assurdo.

3) In B^o risulti

$$a + a = b\,, \qquad aa = b\,.$$

Allora la (10) implica $b + b \neq ba$. Distinguiamo perciò i due sottocasi $(b + b, ba) = (a, b)$, (b, a).

3_1) Sia inoltre

$$b + b = a\,, \qquad ba = b\,.$$

Allora $1(a, a, a)$ implica $ab = a$, quindi $2(a, b, a)$ comporta $b = (a + b)a = (aa) + (ba) = a$, il che è assurdo.

3_2) Sia inoltre

$$b + b = b\,, \qquad ba = a\,.$$

Allora $1(a, a, a)$ implica

$$ab = b\,.$$

Distinguiamo i due sottocasi $a + b = a$, b.

$3_{2.1}$) Sia inoltre

$$a + b = a\,.$$

Allora $3(a, a, a)$ implica $bb = a$, quindi $1(b, a, b)$ comporta $a = ba = b(a + b) = (ba) + (bb) = a + a = b$, il che è assurdo.

$3_{2.2}$) Sia inoltre

$$a + b = b\,.$$

Allora $2(a, b, a)$, $3(a, a, a)$ implicano risp. $b + a = a$, $bb = b$, quindi l'addizione di B^o coincide con la sua moltiplicazione, il che è assurdo.

ii) Supponiamo ora che B^o sia un bisistema di sostegno $B = \{a, b\}$ in cui $3(a, a, a)$ non sia soddisfatta, cioè in cui risulti

$$a + (aa) \neq (a + a)(a + a)\,, \tag{11}$$

e nel quale siano invece soddisfatte $2(a, a, a)$ e le condizioni costituenti C; e dimostriamo l'assurdità di questa ipotesi. Invero, la (11) implica $(a + a, aa) \neq (a, a)$; distinguiamo perciò i tre casi $(a + a, aa) = (a, b)$, (b, a), (b, b).

1) In B^o risulti

$$a + a = a\,, \quad aa = b\,.$$

Allora la (11) implica $a + b = a$, quindi $3(a, b, a)$ comporta $a = a + (ba) = (a + b)(a + a) = aa = b$, il che è assurdo.

2) In B^o risulti

$$a + a = b\,, \quad aa = a\,.$$

Allora $1(a, a, a)$, $2(a, a, a)$ e la (11) implicano risp.

$$ab = b\,, \quad ba = b\,, \quad bb = a\,,$$

quindi $3(a, b, a)$ comporta $a + b = (a + b)b$, ossia (in entrambi i casi $a + b = a, b$) $a = b$, il che è assurdo.

3) In B^o risulti

$$a + a = b\,, \quad aa = b\,.$$

Allora la (11) implica $a + b \neq bb$. Distinguiamo perciò i due sottocasi $(a + b, bb) = (a, b)$, (b, a).

3_1) Sia inoltre

$$a + b = a\,, \quad bb = b\,.$$

Distinguiamo i due sottocasi $ba = a, b$.

$3_{1.1}$) Sia inoltre

$$ba = a .$$

Allora $3(a, b, a)$ ed $1(a, a, a)$ implicano successivamente $ab = b$, $b + b = b$, e quindi $2(a, a, a)$ comporta $a = ba = (a + a)a = (aa) + (aa) = b + b = b$, il che è assurdo.

$3_{1.2}$) Sia inoltre

$$ba = b .$$

Allora $2(a, b, a)$, $3(a, b, a)$ implicano risp. $b + b = b$, $ab = a$, quindi $1(a, a, a)$ comporta $a = ab = a(a + a) = (aa) + (aa) = b + b = b$, il che è assurdo.

3_2) Sia inoltre

$$a + b = b , \quad bb = a .$$

Allora $3(a, b, a)$ implica $b = a + (ba) = (a + b)(a + a) = bb = a$, il che è assurdo. E con ciò la dimostrazione della XII) è completata.

XII') *Non esiste alcun bisistema di sostegno $B = \{a, b\}$ in cui sono soddisfatte tutte le condizioni costituenti la classe C, e nel quale le due condizioni $2(b, b, b)$, $3(b, b, b)$ siano una soddisfatta e l'altra non soddisfatta.*

Infatti, se un tal bisistema esistesse, la sua immagine isomorfa mediante la corrispondenza $a \longrightarrow b$, $b \longrightarrow a$ (cfr. [1], n.° 2) sarebbe un bisistema la cui esistenza è negata dalla XII).

7. – Possiamo ormai concludere lo studio dell'insieme T_4 (n.° 1) mediante il seguente

TEOREMA: *L'insieme T_4, delle $3v^3$ condizioni di tripla distributività* (1), (2), (3) *di un insieme B avente numero cardinale v, è indipendente* ([3], n.° 1) *se, e soltanto se, $v \geqslant 3$. Se $v = 2$, e $B = \{a, b\}$, tutti i sottonsiemi T_4' di T_4 che sono indipendenti ed equivalenti* ([3], n.° 1) *a T_4 si ottengono nel modo seguente: si scelga in ciascuna delle dieci classi* (v. n.° 5):

$$(12_4) \qquad C_{11},\ C_{12},\ C_{13},\ C_{14},\ C_{22},\ C_{24},\ C_{32},\ C_{34},\ C_{21} \cup C_{31},\ C_{23} \cup C_{33}$$

una qualunque delle condizioni che la costituiscono; le dieci condizioni di tripla distributività così scelte costituiscono appunto un sottinsieme T'_4 (di T_4) indipendente ed equivalente a T_4.

Dimostrazione: Si ottiene facilmente in base alle proposizioni I), VIII) (n.ⁱ 1, 4) ed a quelle dei n.ⁱ 5 e 6.

Consideriamo ora le seguenti tre decuple di classi (v. n.° 5):

$$(12_3) \qquad C_{21},\ C_{22},\ C_{23},\ C_{24},\ C_{12},\ C_{14},\ C_{42},\ C_{44},\ C_{11} \cup C_{41},\ C_{13} \cup C_{43};$$

$$(12_2) \qquad C_{31},\ C_{32},\ C_{33},\ C_{34},\ C_{42},\ C_{44},\ C_{12},\ C_{14},\ C_{41} \cup C_{11},\ C_{43} \cup C_{13};$$

$$(12_1) \qquad C_{41},\ C_{42},\ C_{43},\ C_{44},\ C_{32},\ C_{34},\ C_{22},\ C_{24},\ C_{31} \cup C_{21},\ C_{33} \cup C_{23}.$$

COROLLARIO: *L'insieme T_i* (n.° 1), *delle $3v^3$ condizioni di tripla distributività (diverse dalle condizioni (i)) di un insieme B avente numero cardinale v, è indipendente* ([3], n.° 1) *se, e soltanto se, $v \geqslant 3$. Se $v = 2$, e $B = \{a, b\}$, tutti i sottinsiemi T'_i di T_i che sono indipendenti ed equivalenti* ([3], n.° 1) *a T_i si ottengono nel modo seguente: si scelga in ciascuna delle dieci classi (12_i) una qualunque delle condizioni che la costituiscono; le dieci condizioni di tripla distributività così scelte costituiscono appunto un sottinsieme T'_i (di T_i) indipendente ed equivalente a T_i* · ($i = 3, 2, 1$.)

Dimostrazione: Per quanto riguarda T_3, basta pensare alla corrispondenza biunivoca e involutoria, ω, di M (n.° 1) su sé stesso che ad ogni condizione di mutua distributività di B associa la sua opposta, chiamando *opposte* (l'una dell'altra) le due condizioni

$$1(x, y, z)\,, \qquad 2(z, y, x)$$

ed anche le due condizioni

$$3(x, y, z)\,, \qquad 4(z, y, x)$$

(si ricordino le notazioni (9), n.° 5). La verità del corollario per $i = 3$ discende allora subito dal precedente teorema, osservato che T_3 è l'immagine di T_4 in ω, che (in virtù del lemma 13 di [1] p. 22, e del lemma 2 di [2], p. 43) ω trasforma sottinsiemi (di M) indipendenti ([3], n.° 1) in sottinsiemi indipendenti e coppie di sottinsiemi equivalenti ([3], n.° 1) in coppie di sottinsiemi equivalenti, e infine che, nel caso $\nu = 2$, le classi (12_3) sono, nell'ordine, le immagini in ω delle classi (12_4).

Per quanto poi riguarda T_2 e T_1, basta pensare alla corrispondenza biunivoca e involutoria, δ, di M (n.° 1) su sé stesso che ad ogni condizione di mutua distributività di B associa la sua duale, chiamando *duali* (l'una dell'altra) le due condizioni

$$1(x, y, z), \qquad 3(x, y, z)$$

ed anche le due condizioni

$$2(x, y, z), \qquad 4(x, y, z)$$

(n.° 5). La verità del corollario per $i = 2$ (risp. per $i = 1$) discende allora subito dal precedente teorema (risp. dalla qui sopra dimostrata verità del corollario per $i = 3$), osservato che T_2 è l'immagine di T_4 in δ (risp. che T_1 è l'immagine di T_3 in δ), che (in virtù del lemma 2, n.° 2) δ trasforma sottinsiemi (di M) indipendenti ([3], n.° 1) in sottinsiemi indipendenti e coppie di sottinsiemi equivalenti ([3], n.° 1) in coppie di sottinsiemi equivalenti, e infine che, nel caso $\nu = 2$, le classi (12_2) (risp. (12_1)) sono, nell'ordine, le immagini in δ delle classi (12_4) (risp. (12_3)).

8. – Esaurito così lo studio delle condizioni di tripla distributività di B, cioè dei quattro sottinsiemi T_1, T_2, T_3, T_4 di M (n.° 1, 3° capov.) è naturale rivolgere ora l'attenzione ai seguenti altri sei notevoli sottinsiemi di M.

Consideriamo due delle quattro eguaglianze (1), (2), (3), (4) del n° 1: la r-esima e la s-esima ($r \neq s$). Le $2\nu^3$ eguaglianze che si ottengono dalle due eguaglianze (r) ed (s) al variare di x, y, z in B, verranno dette ***condizioni di doppia distributività*** di B, ed il loro insieme verrà denotato con M_{rs} ($= M_{sr}$). Otteniamo così i sei sottinsiemi di M:

$$M_{12}, \; M_{13}, \; M_{14}, \; M_{23}, \; M_{24}, \; M_{34},$$

il primo dei quali è già stato studiato compiutamente in [1].

Il problema di determinare tutti i sottinsiemi, M'_{rs}, di M_{rs} indipendenti ed equivalenti ([3], n.º 1) ad M_{rs} è stato già implicitamente risolto nei numeri precedenti, quasi del tutto. Completeremo ora la risoluzione ed enunceremo il risultato relativo.

Precisamente, poiché dal teorema e corollario del n.º 7 e dalla IX) del n.º 5 risulta evidentemente (essendo ogni M_{rs} contenuto in un T_i) che M_{rs} è indipendente se e solo se $\nu \geqslant 3$, rimane da studiare soltanto (e parzialmente) il caso $\nu = 2$.

La classe C_{ij} (n.º 5) si dirà *(i)-isolata* in un bisistema B^o di sostegno $B = \{a, b\}$, se le due condizioni che la costituiscono non sono soddisfatte in B^o, mentre vi sono invece soddisfatte le sei condizioni costituenti le tre classi C_{ik} con $k \neq j$. $(i, j = 1, 2, 3, 4.)$

XIII) *Se* $h \neq i$, *la classe* C_{ij} (n.º 5) *è* (i)*-isolata in un bisistema* (h)*-distributivo* ([2], n.º 2) *di sostegno* $B = \{a, b\}$. $(h, i, j = 1, 2, 3, 4.)$

Infatti C_{23} è (2)-isolata nel bisistema (3)-distributivo (3, 11) ([1], n.º 10); quindi C_{13} è (1)-isolata nel bisistema (4)-distributivo opposto del (3, 11). Considerando dapprima i bisistemi duali dei precedenti due, e poi le immagini isomorfe mediante la corrispondenza $a \longrightarrow b$, $b \longrightarrow a$ dei quattro bisistemi così introdotti, si riconosce intanto che la XIII) è vera per $(h, i, j) = (3, 2, 3)$, $(4, 1, 3)$, $(1, 4, 3)$, $(2, 3, 3)$, $(3, 2, 1)$, $(4, 1, 1)$, $(1, 4, 1)$, $(2, 3, 1)$. Ma la XIII) è appunto vera anche per i restanti valori di h, i, j, come è provato dalle X), X'), XI), XI'), (n.º 5).

Teorema: ***L'insieme*** M_{rs} ***delle*** $2\nu^3$ ***condizioni di doppia distributività*** (r) ***ed*** (s) (n.º 1) ***di un insieme*** B ***avente numero cardinale*** ν, ***è indipendente*** ([3], n.º 1) ***se, e soltanto se,*** $\nu \geqslant 3$. ***Se*** $\nu = 2$, ***e*** $B = \{a, b\}$, ***tutti i sottinsiemi*** M'_{rs} ***di*** M_{rs} ***che sono indipendenti ed equivalenti*** ([3], n.º 1) ***ad*** M_{rs} ***si ottengono nel modo seguente: si scelga in ciascuna delle otto classi*** (v. n.º 5):

$$C_{r1},\ C_{r2},\ C_{r3},\ C_{r4},\ C_{s1},\ C_{s2},\ C_{s3},\ C_{s4}$$

una qualunque delle due condizioni che la costituiscono; le otto condizioni di doppia distributività così scelte costituiscono appunto

un sottinsieme M'_{rs} *(di* M_{rs}*) indipendente ed equivalente ad* M_{rs}. ($r \neq s$; $r, s = 1, 2, 3, 4$.)

Dimostrazione: Per $\nu \geqslant 3$, si è già detto più sopra. Per $\nu = 2$, il teorema si ottiene facilmente dalla precedente XIII) e dalla IX) del n.º 5.

Naturalmente, per $r = 1$, ed $s = 2$, si ritrovano i risultati del § 3 di [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] BOCCIONI D.: *Indipendenza delle condizioni di distributività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 1-30.

[2] BOCCIONI D.: *Indipendenza delle condizioni di mutua distributività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 40-49.

[3] BOCCIONI D.: *Condizioni di ditributività ed associatività unilaterali*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 30 (1960), pp. 178-193.