RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

A proposito degli autoomeomorfismi del cerchio dotati di un punto unito solo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 33 (1963), p. 332-406

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__332_0>

A PROPOSITO DEGLI AUTOOMEOMORFISMI DEL CERCHIO DOTATI DI UN PUNTO UNITO SOLO

Memoria *) *di* GIUSEPPE SCORZA DRAGONI (*a Roma*)

In questa Memoria prendo in esame quegli autoomeomorfismi del cerchio, che (applicano il cerchio su se stesso e che) ammettono un punto unito solo, il punto unito riuscendo per di più interno al cerchio. E passo senz'altro ai risultati conclusivi della ricerca [1]). Fra questi, quello forse più suggestivo, ma meno penetrante, si può formulare affermando che:

In ogni tal autoomeomorfismo del cerchio è sempre presente almeno una curva semplice ed aperta, che unisca il punto unito al contorno del cerchio e che abbia in comune con la propria immagine soltanto il punto unito; oppure almeno una curva semplice e chiusa, che aggiri il punto unito e che si spezzi in due archi privi di punti in comune con le rispettive immagini, se non è addirittura priva essa stessa di punti in comune con la propria immagine.

Nel corso della dimostrazione riconosceremo che nel secondo caso il risultato si può precisare notevolmente. Nel fatto, scelta l'unità di misura per i segmenti, nonchè quella per gli angoli, e prefissato il numero reale e positivo ε, vedremo che a uno dei due archi in cui la curva semplice e chiusa si spezza, si può imporre di avere un diametro minore di ε e di essere visto dal punto

*) Pervenuta in redazione il 4 novembre 1962.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Roma.

[1]) Compiuta nell'ambito dell'attività svolta dai Gruppi matematici del Consiglio nazionale delle ricerche italiano.

unito sotto un angolo minore di ε nella misura. E queste circostanze si possono esprimere dicendo che l'altro arco aggira il punto unito a meno di ε. Naturalmente la curva semplice e chiusa eventuale ed i due eventuali archi semplici ed aperti dipenderanno da ε. Ma si potrà sempre concludere che:

In ogni tal automeomorfismo del cerchio è sempre presente almeno una curva semplice ed aperta, che unisca il punto unito al contorno del cerchio e che abbia in comune con la propria immagine soltanto il punto unito; oppure almeno una curva semplice ed aperta, che sia priva di punti in comune con la propria immagine e che aggiri il punto unito a meno del numero reale e positivo ε, prefissato a piacere.

Quest'ultimo teorema è in armonia con un risultato stabilito recentemente per quegli autoomemorfismi di una corona circolare, che non lasciano alcun punto invariato e che applicano le due circonferenze estreme della corona ciascuna su se stessa; in armonia cioè con la circostanza, che ogni tal autoomeomorfismo della corona circolare ammette sempre, come priva di punti in comune con la propria immagine, almeno una curva semplice ed aperta, che congiunga le due circonferenze estreme della corona, oppure almeno una curva semplice ed aperta, che aggiri il centro della corona a meno di ε, il numero reale e positivo ε potendosi prefissare a piacere (di guisa che ogni tal autoomeomorfismo della corona o ammette almeno una curva semplice ed aperta, che congiunga le due circonferenze estreme della corona e che sia priva di punti in comune con la propria immagine, oppure almeno una curva semplice e chiusa, che aggiri il centro della corona e che si spezzi in due archi privi di punti in comune con le rispettive immagini, se non è addirittura priva essa stessa di punti in comune con la propria immagine) [2].

[2]) G. Scorza Dragoni, *Sugli autoomeomorfismi di una corona circolare privi di punti uniti* (Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova, vol. XXXIII (1963), pagg. 1-32). Veramente l'accezione data ivi alla frase « aggirare un punto a meno di ε » è diversa da quella attuale: fissata l'unità di misura per i segmenti, una curva semplice ed aperta del piano euclideo aggira un punto a meno di ε, se si può completare, mediante l'aggiunta di un arco col diametro minore di ε, in una

I risultati attuali si potrebbero raggiungere sviluppando ulteriormente il processo dimostrativo usato nel caso della corona circolare e fondato su altre mie ricerche. Peraltro preferisco riprendere la questione *ex novo* e redigere questa Memoria in forma presso che autonoma. Naturalmente così sarò costretto a riprodurre più o meno alla lettera moltissimi passi di lavori precedenti. Ma avrò anche il destro per eliminare qualche sovrastruttura superflua. E l'esposizione ci guadagnerà in chiarezza ed in semplicità.

§ 1. Premesse e richiami.

1. - In questo primo paragrafo ricorderemo, insieme con le definizioni necessarie per intenderli, alcuni risultati fondamentali e preliminari sulle *traslazioni piane generalizzate*, cioè sulle applicazioni topologiche del piano reale euclideo ambiente su se stesso conservanti l'indicatrice e prive di punti uniti.

Si tratta di teoremi che risalgono di massima a Brouwer [3]), almeno nella sostanza [4]); e che verranno esposti in un ordine nel quale sarebbe possibile dedurli logicamente [5]).

2. - Lo spazio ambiente, al quale apparterranno tutti i punti, tutte le curve, le linee e le superficie che avremo occasione di con-

---

curva semplice e chiusa aggirante il punto. Peraltro, a conti fatti, nel caso della corona, il teorema, vero in una accezione, è vero anche nell'altra.

[3]) L. E. J. Brouwer, *Beweis des ebenen Translationssatzes* (Mathematische Annalen, vol. 72 (1912), pagg. 37-54), § 1.

[4]) Qualche diversa indicazione sarà data qua e là.

[5]) Per le dimostrazioni, qualora manchino espliciti riferimenti, si può vedere: G. Scorza Dragoni, *Criteri per l'esistenza di punti uniti in trasformazioni topologiche del cerchio e loro applicazioni* (Annali di matematica pura ed applicata, serie 4, vol. XXV (1946), pagg. 43-65); S. Ghezzo, *Sulla teoria delle traiettorie di una traslazione piana generalizzata* (Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova, vol. XVI (1947), pagg. 73-85); G. Trevisan, *Sui campi adiacenti ad una traiettoria di una traslazione piana generalizzata* (Rendiconti dell'Accademia nazionale dei Lincei, serie 8, vol. III (1947), pagg. 199-203).

siderare, sia dunque il piano reale euclideo. E sia t una traslazione piana generalizzata.

Un insieme E di punti del piano è *libero* nella t, o rispetto alla t, se non ha punti in comune con la propria immagine, $t(E)$, nella t [6]). Naturalmente la definizione avrebbe senso, anche se t fosse una qualunque trasformazione del piano.

Un ***arco di traslazione***, relativo a t, oppure di t, è una curva semplice ed aperta, che abbia in comune con la propria immagine nella t soltanto un punto, estremo sia per la curva oggettiva, sia per la curva immagine. Ovvio, dopo di ciò, cosa si debba intendere per *segmenti di traslazione*, relativi a t.

Se α è un arco di traslazione (nella t), α ha in comune soltanto un punto anche con $t^{-1}(\alpha)$; e questo punto comune, A, risulta di estremo tanto per α quanto per $t^{-1}(\alpha)$, mentre $t(A)$ è l'estremo comune ad α e $t(\alpha)$. Il punto A, poi, è l'*origine* di α, e $t(A)$ il *termine*, con riferimento a t, naturalmente.

Su α, il verso che porta dall'origine al termine sarà assunto come *positivo*; e quello che porta dal termine all'origine come *negativo*. E quando useremo, a proposito di α, frasi implicanti un ordinamento dei suoi punti, ci riferiremo sempre a quello indotto dal verso positivo di α.

Come abbiamo avvertito, si tratta di concetti che hanno senso soltanto se sono riferiti a t. Se si scambiano gli uffici di t e t^{-1}, l'arco α è sempre un arco di traslazione; ma la sua origine diventa il suo termine, ed il suo termine diventa la sua origine; il suo verso positivo diventa quello negativo, ed il suo verso negativo diventa quello positivo. In linea di massima, nel seguito non insisteremo più su osservazioni del genere.

3. - Se α è di nuovo un arco di traslazione (della t), le immagini di α nelle diverse potenze di t porgono, per t, la *traiettoria*, $\pi(\alpha)$,

$$\pi(\alpha) = \dots + t^{-1}(\alpha) + \alpha + t(\alpha) + \dots ,$$

---

[6]) Secondo la solita convenzione, se E è un insieme di punti del piano ed m un numero intero relativo, $t^m(E)$ denoterà l'immagine di E nella potenza t^m di t; analogamente in seguito, in casi analoghi.

generata da a (nella t); di guisa che $\pi(a)$ appare come generata da α anche nella t^{-1}.

4. - A proposito degli archi di traslazione e delle rispettive traiettorie, è noto che:

Una curva semplice ed aperta, la quale abbia almeno uno dei due estremi immagine dell'altro nella t e la quale non contenga nel proprio interno [7]) *il trasformato di nessuno dei propri punti interni, è addirittura un arco di traslazione della t*;

e che:

Le traiettorie di una traslazione piana generalizzata sono linee semplici ed aperte; vale a dire, sono immagini biunivoche e continue delle rette reali euclidee.

Da questa proposizione e dal fatto che:

Ogni punto del piano è interno a infiniti archi di traslazione della t,

e quindi che:

Ogni punto del piano appartiene ad infinite traiettorie della t,

si deduce poi subito che:

Insieme con t, son traslazioni piane generalizzate anche t^2, t^{-2}, t^3, t^{-3}, ... e non soltanto t^{-1};

epperò che ogni potenza di t individua il proprio esponente; e, in particolare, che t^0 è l'unica potenza di t uguale all'identità.

Ed ormai è ovvio altresì che, su ogni traiettoria (della t), ogni punto della traiettoria individua, insieme con la propria immagine (nella t), un arco di traslazione (della t), atto a generare la traiettoria (nella t); e che l'arco staccato su una traiettoria (della t) da due punti della traiettoria contiene nel proprio interno un arco di traslazione (di t), se, e soltanto se, contiene nel proprio interno l'immagine (nella t) di uno dei propri estremi.

5. - Il *lemma fondamentale sulle traiettorie delle traslazioni piane generalizzate* ha un'importanza grandissima in questo ordine di idee. Secondo questo lemma:

---

[7]) Come al solito, l'interno di un insieme di punti è l'insieme dei suoi punti interni. Nel caso di un arco semplice, diconsi anche interni

La curva semplice ed aperta c incontra, anzi taglia [8]), *la propria immagine nella traslazione piana generalizzata t, se gli estremi di c staccano, su qualche traiettoria di t, un arco, il quale contenga nel proprio interno archi di traslazione della t e costituisca, insieme con c, una curva semplice e chiusa*;
o, se si preferisce:

La curva semplice ed aperta c taglia la propria immagine nella traslazione piana generalizzata t, se esiste un tal arco di traslazione, α, di t, che c incontri tanto $t^{-1}(\alpha) + t^{-2}(\alpha) + \ldots$, quanto $t(\alpha) + t^2(\alpha) + \ldots$, senza aver punti in comune con α, eccezion fatta, al massimo, per uno solo dei due estremi di α.

L'equivalenza di questi due enunciati è presso che immediata. Il penultimo si deduce subito dall'ultimo. Ed anche la deduzione dell'ultimo dal penultimo è molto facile. Comunque la svilupperemo esplicitamente, perchè avremo l'occasione di formulare un altro lemma, che ci sarà utile anche in seguito.

Precisamente, incominciamo con l'osservare che:

Se la curva semplice ed aperta c incontra tanto la curva semplice ed aperta μ, quanto la curva semplice ed aperta ν, essa contiene un sottoarco, eventualmente degenere, che ha un estremo su μ ed uno su ν, ed ha soltanto un punto su μ e soltanto un punto su ν.

Allo scopo, sia M un punto comune a c e μ, ed N un punto comune a c e ν. Si percorra c, a partire da M, verso N, fino al primo punto, N', comune a c e ν: a partire da N' si torni indietro, sempre su c, fino ad arrestarsi appena si incontra μ, nel punto M'. I punti M' ed N' individuano su c il sottoarco richiesto. Si noti che può risultare benissimo, per esempio, $M = M' = N = N'$ (inutile insistere su eventuali precisazioni di linguaggio in questo come negli altri casi di degenerazione). E si noti che M' ed N'

---

all'arco i punti dell'arco diversi dai suoi estremi. In conformità di ciò, l'interno di un arco semplice è l'insieme dei punti dell'arco diversi dagli estremi dell'arco.

[8]) Ai termini di taglio e di contatto di due curve semplici (aperte o chiuse) darò il significato attribuito nella mia Memoria *Intorno ad alcuni teoremi sulle traslazioni piane* (Memorie dell'Accademia d'Italia, vol. IV (1933), pagg. 159-212), n[i] 3-6; peraltro esso è quello dettato dall'intuizione.

sono certamente distinti, al pari di M ed N, se le curve μ e ν sono disgiunte.

Ciò premesso, per dedurre la seconda formulazione del lemma fondamentale sulle traiettorie dalla prima, si può procedere come segue. Si scelgano il numero intero e negativo m ed il numero intero e positivo n in tal guisa, che c incontri tanto $t^m(\alpha)$ quanto $t^n(\alpha)$. Indi si determinino su c i punti M' ed N' in tal modo, che l'arco c', staccato da M' ed N' su c, abbia in comune soltanto M' con la curva semplice ed aperta $t^{-1}(\alpha) + ... + t^m(\alpha)$ e soltanto N' con la curva semplice ed aperta $t(\alpha) + ... + t^n(\alpha)$. Allora M' ed N' sono distinti e non possono essere simultaneamente uguali uno all'origine e l'altro al termine di α. Ne segue subito che M' ed N' staccano sulla traiettoria generata da α un arco, che contiene nell'interno $t(M')$. E la conclusione ormai è facile.

Nella sua seconda formulazione, il lemma fondamentale sulle traiettorie si può enunciare anche in guisa da consentire ad α e c dei contatti lungo continui contenuti nell'interno di α, a patto di rinunciare a pretendere che c e $t(c)$ si taglino, e di accontentarsi di affermare che c e $t(c)$ si incontrano. Ma qui ci limiteremo alla notizia [9]).

6. - Dai teoremi precedenti, ed in ispecial modo dal lemma fondamentale sulle traiettorie, si deduce notoriamente che:

Se P è un punto della traiettoria π, interno al sottoarco ν di π, il punto P ha una distanza positiva dall'insieme $\pi - \nu$;
vale a dire, che π non può mai riavvicinarsi indefinitamente ad una posizione per la quale sia già passata; e quindi che:

Le traiettorie delle traslazioni piane generalizzate sono immagini biunivoche e bicontinue delle rette reali euclidee.

Dagli stessi teoremi si deduce altresì che:

Se P è un punto del piano ambiente, le successioni $t(P)$, $t^2(P)$, $t^3(P)$, ... e $t^{-1}(P)$, $t^{-2}(P)$, $t^{-3}(P)$, ... divergono entrambe.

---

[9]) E rimanderemo, per maggiori dettagli, a G. Scorza Dragoni, *Una dimostrazione dell'ultimo teorema geometrico di Poincaré* (Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova, vol. XXV (1956), pagg. 1-104), § 2.

E di qui segue che:

Ogni traiettoria di una traslazione piana generalizzata è divisa da ogni suo punto in due semilinee entrambe illimitate, in quanto sottoinsiemi del piano;

e pertanto che:

Se la curva semplice ed aperta c ha soltanto gli estremi, P e Q, sulla solita traiettoria π, la curva semplice e chiusa costituita da c e dal sottoarco di π cogli estremi in P e Q non separa nessun punto di π dall'infinito.

7. - Nello stesso ordine di idee del primo e del secondo teorema del n° 4 rientrano poi, tanto la circostanza che:

Una curva semplice ed aperta che sia libera nella t, è libera anche in tutte le potenze della t diverse dall'identità [10];

quanto quella che:

Un insieme internamente connesso, E, di punti del piano, è libero nelle potenze della t, diverse dalla t medesima e dalla sua inversa, nonchè dall'identità, se l'interno di E non contiene nessun punto interno a $t(E)$ e nessuno interno a $t^{-1}(E)$ [11];

e nello stesso ordine di idee del secondo teorema del n° 5 rientra la circostanza che:

Nel piano, un sottoinsieme internamente connesso di punti, libero nella solita t, non può aver simultaneamente punti in comune tanto con $t^{-1}(\alpha) + t^{-2}(\alpha) + \ldots$, quanto con $t(\alpha) + t^{2}(\alpha) + \ldots$, senza contener nell'interno punti dell'arco α, supposto di traslazione per la t [12].

A chiarimento di questi ultimi due enunciati, ricordiamo che un insieme E di punti del piano è *internamente connesso*, se due punti di E si possono sempre congiungere, qualunque essi siano,

[10]) Per questo risultato, si vegga E. SPERNER, *Ueber die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene* (Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg, vol. 10 (1934), pagg. 1-48), pag. 13, teorema 7.

[11]) Il teorema è stato dato da H. Terasaka, in ipotesi leggermente diverse. La dimostrazione del teorema di Terasaka indicata da Sperner, loc. cit. [10]), teorema 8 di pag. 13, conserva intatta la sua validità nel caso attuale.

[12]) In proposito si vegga loc. cit. [9]), teorema 3) di pag. 8.

con archi semplici che abbiano i rispettivi interni contenuti nell'interno di E.

8. - Ricordiamo ora che una curva semplice ed aperta, λ, con gli estremi in A e B, è, per la solita t, uno *pseudoarco di traslazione*, con l'*origine* in A e col *termine* in B, se λ e $t(\lambda)$ hanno dei punti in comune, ma λ non contiene nè $t(A)$ nè $t^{-1}(A)$ e non contiene, nel proprio interno, nessuno dei trasformati dei suoi punti interni [13]).

Dalla definizione istessa, segue subito che allora gli unici punti comuni a λ e $t(\lambda)$ potranno essere soltanto B e $t(B)$. Come conseguenza della definizione posta e dei risultati precedenti, si dimostra poi notoriamente che [14]):

Se λ è, per t, uno pseudoarco di traslazione, con l'origine in A ed il termine in B, l'arco λ o contiene $t^{-1}(B)$, ovvero contiene $t(B)$, i due casi escludendosi a vicenda, sicchè l'intersezione di λ e $t(\lambda)$ si riduce rispettivamente a B, ovvero a $t(B)$;

e che:

Nel primo caso, $t^{-1}(B)$ è interno a λ, e il sottoarco di λ con gli estremi in $t^{-1}(B)$ e B è l'unico arco di traslazione della t contenuto in λ; nel secondo caso, $t(B)$ è interno a λ, e il sottoarco di λ con gli estremi in B e $t(B)$ è l'unico arco di traslazione della t contenuto in λ;

peraltro il secondo caso non è concettualmente diverso dal primo, ma è per t^{-1} quello che il primo è per t.

9. - Sia di nuovo π una traiettoria della t. Allora, in conformità del primo teorema del n° 6, l'insieme di quei punti che son d'accumulazione per π, e che non appartengono a π, è chiuso,

---

[13]) Mi uniformo alla terminologia che ho adottata nella Memoria *Sulle traslazioni piane generalizzate* (Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg, vol. 21 (1957), pagg. 13-43), se ne vegga la nota [10]), a pie' di pag. 16.

[14]) Per una deduzione dei prossimi due teoremi dal lemma fondamentale sulle traiettorie si possono vedere i n[i] 15 e 16 della mia Memoria citata in [8]); per un'altra deduzione degli stessi teoremi si può vedere B. v. KERÉKJÁRTÓ, *The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré* (Acta litterarum ac scientiarum dell'Uni-

anche se non è vuoto, pertanto esso divide il piano in uno o più insiemi aperti, connessi e non vuoti, disgiunti a due a due (quando sono almeno due), cioè in uno o più campi, disgiunti a due a due (quando sono almeno due). E π appartiene tutta ad uno di questi campi. Anzi:

La traiettoria π divide il campo che la contiene in altri due campi, i quali hanno entrambi π come linea di frontiera,

e si chiamano i *campi adiacenti* a π; e dovrebbe esser superfluo rilevare che essi sono disgiunti.

Tutte queste circostanze e la prima proposizione del n° 6 ci autorizzano poi a parlare, in senso ovvio, delle *bande* di π.

10. - Forme le solite notazioni, la traiettoria π non esaurisce sempre la frontiera dei propri campi adiacenti; ciò non ostante:

I punti che non appartengono alla traiettoria π e che possono esser congiunti con π mediante curve semplici ed aperte aventi su π soltanto un estremo, si distribuiscono appunto nei due campi adiacenti alla traiettoria, esaurendoli;

e dopo di ciò basta ricordare la prima proposizione del n° 6, per comprendere che:

Ciascuno dei punti dei campi adiacenti a π può esser congiunto con tutti i punti di π mediante curve semplici ed aperte aventi su π soltanto uno dei rispettivi estremi.

La definizione istessa di traiettoria implica che:

Le traiettorie della traslazione piana generalizzata t, in quanto insiemi, sono invarianti nella t;

e di qui, e dal fatto che le traslazioni piane generalizzate conservano l'indicatrice, si trae che:

Invarianti nella t son anche i singoli campi adiacenti alle diverse traiettorie della t,

invarianti sempre in quanto insiemi, naturalmente.

11. - Dalle proposizioni stabilite nel numero precedente si deduce abbastanza facilmente che:

---

versità di Szeged, vol. 4 (1928), pagg. 86-102), pag. 91. Gli pseudoarchi di traslazione erano stati già considerati anche da Brouwer, loc. cit. [3]), pag. 47.

Se Π e Π' sono i due campi adiacenti alla traiettoria π generata dall'arco α, di traslazione per la solita t, se E ed E' ed F sono tre insiemi di punti, rispettivamente contenuti in Π ed in Π' e nell'interno di α, l'insieme $E + F + E'$ è libero nella t, qualora tali siano E ed E'.

Nel fatto, la cosa segue dalle ultime due proposizioni del n° 10, dalla circostanza che una traiettoria non ha punti in comune con nessuno dei propri campi adiacenti, e da quella che nelle ipotesi attuali anche l'insieme F è ovviamente libero nella t.

Inoltre dall'ultima proposizione del n° 6 e dalla prima del n° 10 si trae senz'altro che:

Se la curva semplice ed aperta c ha soltanto gli estremi, P e Q, sulla traiettoria π, la curva semplice e chiusa costituita da c e dal sottoarco staccato su π da P e Q separa dall'infinito soltanto punti che appartengono ad uno medesimo dei due campi adiacenti a π, e precisamente a quello che contiene l'interno di c;

mentre è immediato dedurre, dai primi due teoremi del n° 5, che:

Se la curva semplice ed aperta c non taglia $t(c)$, ha almeno un estremo sull'arco α, di traslazione per la t, ed ha al massimo gli estremi su $t^{-1}(\alpha) + \alpha + t(\alpha)$, i punti comuni a c ed alla traiettoria π generata da α nella t si riducono a quelli comuni a c ed alla curva $t^{-1}(\alpha) + \alpha + t(\alpha)$.

La curva c, nelle ipotesi dell'ultimo teorema, ha al massimo gli estremi su π; epperò rientra nell'ambito del penultimo se ha per di più entrambi gli estremi su π.

12. - La prima proposizione del n° 5 permette di dimostrare altresì, e senza difficoltà, che:

Se β è, per la solita t, l'arco di traslazione contenuto nello pseudo-arco di traslazione λ, tutti i punti di $\lambda - \beta$ appartengono ad uno medesimo dei due campi adiacenti alla traiettoria generata da β nella t[15]);

e dopo di ciò, per stabilire che:

Nelle stesse ipotesi, l'insieme λ è libero in tutte le potenze della t

---

[15]) Per una deduzione del teorema del testo da quella tal prima proposizione del n° 5, si può vedere il n° 25 della Memoria citata in [8]).

diverse dalla t medesima e dalla sua inversa, nonchè dall'identità, basta osservare che questa circostanza si presenta per β e per $\lambda - \beta$, a norma della seconda proposizione del nº 4 e della prima del nº 7; e che le immagini di $\lambda - \beta$ nelle diverse potenze della t non hanno punti in comune con la traiettoria generata da β nella t, appunto perchè esse sono contenute in uno dei campi adiacenti alla traiettoria.

§ 2. Continuano le premesse, ed i richiami.

13. - Sia di nuovo α un arco di traslazione della solita traslazione piana generalizzata t. Sia A l'origine di α; e sia π la traiettoria generata da α nella t.

La curva semplice ed aperta ν abbia soltanto gli estremi, P e Q, su $t^{-1}(\alpha) + \alpha + t(\alpha)$; e questi appartengano addirittura ad α. E P preceda Q su α, nel verso positivo di α.

La curva ν non contenga poi nel proprio interno nessuno dei trasformati dei suoi punti interni.

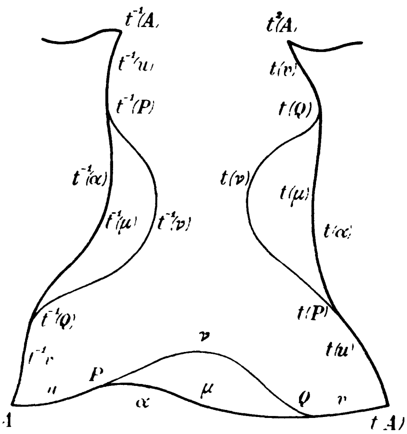

Fig. 1

Sia u il sottoarco staccato su α da A e P, sia μ quello staccato da P e Q e v quello staccato da Q e $t(A)$.

Gli archi u e v possono anche degenerare in punti. Ma $u + \nu + v$ è sempre una curva semplice ed aperta, con gli stessi estremi di α; e $\mu + \nu$ è una curva semplice e chiusa. Inoltre risulta ovviamente $u + \nu + v = (\alpha - \mu) + \nu$.

Posto $j = \mu + \nu$, sia J l'insieme dei punti di j e dei punti del piano separati mediante j dall'infinito. Sia cioè J l'insieme chiuso e limitato, delimitato da j; o, se si preferisce, l'insieme chiuso e limitato, racchiuso da j.

Nelle ipotesi attuali, i punti interni a ν appartengono ad uno medesimo dei due campi adiacenti a π;
e la cosa segue dall'unica proposizione del n° 9, dalla prima del n° 10 e dall'ultima del n° 11. Inoltre:

Nelle stesse ipotesi, tutti i punti interni a J appartengono a quel campo adiacente a π, che contiene i punti interni a ν;
come si riconosce subito, non appena si ricordi la seconda proposizione del n° 11.

La penultima delle proposizioni precedenti e le ipotesi porgono abbastanza facilmente che gli eventuali punti comuni a ν e $t(\nu)$ vanno ricercati fra gli estremi di ν e $t(\nu)$. Pertanto, per concludere che:

Nelle ipotesi attuali, ν e $t(\nu)$ non hanno punti in comune, oppure hanno in comune soltanto un punto, estremo tanto per ν, quanto per $t(\nu)$,
basta ricordare la prima proposizione del n° 4, la quale ci assicura appunto che nelle nostre condizioni, o ν è libera nella t, oppure è un arco di traslazione della t. E volendo si potrebbe aggiungere, che nel secondo caso P coincide con A e Q coincide con $t(A)$.

14. - Manteniamo le ipotesi del numero precedente, nonchè le notazioni, e dimostriamo che:

Nelle condizioni attuali, l'interno di J non contiene nessun punto interno a $t^{-1}(J)$, e nessun punto interno a $t(J)$.

Infatti, nelle ipotesi attuali, $t^{-1}(P)$ è esterno ad α; epperò è esterno a J, a norma dell'ultima proposizione del n° 6 e della prima del n° 13. Indi, attese le ipotesi, e le proposizioni del numero precedente, nessuno dei punti di $t^{-1}(\mu)$ e nessuno dei punti di $t^{-1}(\nu)$ può essere interno a J. Epperò nessuno dei punti interni a $t^{-1}(J)$ può essere interno a J. Allo stesso modo si procede per quello che ha tratto a $t(J)$, partendo dall'osservazione che nelle ipotesi attuali $t(Q)$ è esterno ad α.

E dopo di ciò basta ricordare la seconda proposizione del n° 7, per concludere che:

Nelle solite ipotesi, J è libero in tutte le potenze di t diverse dalla t stessa e dalla sua inversa, nonchè dall'identità.

Nelle considerazioni precedenti è implicito che gli unici punti eventualmente comuni a j e $t(j)$ sono quelli comuni a ν e $t(\nu)$. Pertanto:

Se ν e $t(\nu)$ sono prive di punti in comune, J è libero anche nella t e nella sua inversa,

ferme naturalmente restando sempre le altre solite ipotesi.

15. - Manteniamo sempre le ipotesi e le notazioni del n° 13. E dimostriamo adesso che:

In queste condizioni, la curva semplice ed aperta $u + \nu + v$ è un arco di traslazioni di t, al pari di α, ed ha la stessa origine e lo stesso termine di α.

Nel fatto, la curva semplice ed aperta $u + \nu + v$ ha gli stessi estremi α; indi, per concludere, basta dimostrare che essa non contiene nel proprio interno nessuno dei punti interni alla propria immagine nella t (n° 4, prima proposizione). E la cosa è presso che ovvia. Un punto interno ad $u + \nu + v$ o è interno ad α, o è interno a ν. Nel primo caso, il suo trasformato è interno a $t(\alpha)$; ed in quanto tale non può appartenere ad α, atteso che α è di traslazione, e non può essere interno a ν, atteso che l'interno di ν appartiene a uno dei campi adiacenti a π. Nel secondo caso, il suo trasformato è interno a $t(\nu)$; ed in quanto tale non può appartenere ad α, atteso che l'interno di $t(\nu)$ appartiene ad uno dei campi adiacenti a π, e non può essere interno a ν, atteso che gli interni di ν e $t(\nu)$ sono disgiunti. Donde la conclusione.

16. - Ferme le solite ipotesi e le solite notazioni, conveniamo di indicare con β la curva semplice ed aperta $u + \nu + v$.

Allora, la curva semplice ed aperta μ ha soltanto gli estremi su β. E la cosa è ovvia. Ma è anche immediato, o quasi, che nessuno dei punti interni a μ può appartenere a $t^{-1}(\beta)$ o a $t(\beta)$. Nel fatto, un punto interno a μ non può appartenere nè a $t^{-1}(\alpha)$, nè a $t(\alpha)$, perchè μ è una porzione di α; e non può essere interno nè a $t^{-1}(\nu)$, nè a $t(\nu)$, perchè gli interni di $t^{-1}(\nu)$ e $t(\nu)$ appartengono a quello stesso campo adiacente a π che contiene l'interno di ν.

Nelle considerazioni svolte è per di più implicito che μ non contiene nell'interno nessuno dei trasformati dei suoi punti interni. Quindi:

La curva semplice ed aperta μ si trova, rispetto a β, nelle stesse condizioni in cui la curva semplice ed aperta ν si trovava rispetto ad α;

mentre la curva ν assume l'ufficio che prima era della curva μ. E si noti che la $\beta = u + \nu + v = (\alpha - \mu) + \nu$ implica appunto la $\alpha = (\beta - \nu) + \mu = u + \mu + v$.

17. - Riprendiamo l'analisi esposta, cambiando leggermente le condizioni. Allo scopo, α sia sempre un arco di traslazione nella t. Ed A sia sempre l'origine di α; e π sia sempre la traiettoria generata da α.

La curva semplice ed aperta ν abbia soltanto gli estremi, P e Q, sulla curva semplice ed aperta $t^{-1}(\alpha) + \alpha + t(\alpha)$, come nel caso precedente; e P e Q appartengano di nuovo ad α; e P preceda sempre Q, su α.

La curva ν e la curva $t(\nu)$ abbiano in comune il punto Q; e la loro intersezione si riduca ad un arco, non degenere, con un estremo nel punto Q. Di guisa che ν e $t(\nu)$ non si tagliano.

Si dica sempre u il sottoarco staccato da A e P su α, μ quello staccato da P e Q e v quello staccato da Q e $t(A)$. Gli archi u e v possono degenerare anche stavolta. Ma la curva $u + \nu + v$ è di nuovo semplice ed aperta ed ha di nuovo gli stessi estremi di α; e $\mu + \nu$ è di nuovo una curva semplice e chiusa. Risulta sempre $u + \nu + v = (\alpha - \mu) + \nu$.

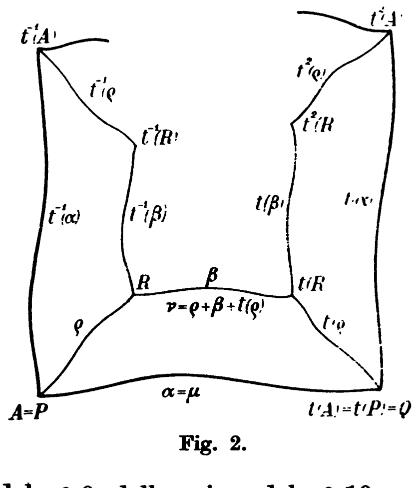

Fig. 2.

Posto anche stavolta $j = \mu + \nu$, indichiamo di nuovo con J l'insieme chiuso e limitato racchiuso da j.

Allora, sempre a norma dell'unica proposizione del n° 9, della prima del n° 10 e dell'ultima del n° 11:

Anche nelle ipotesi attuali, i punti interni a ν appartengono ad uno medesimo dei due campi adiacenti a π;

inoltre:

Anche nelle condizioni attuali, tutti i punti interni a J appartengono a quel campo adiacente a π, che contiene tutti i punti interni a ν,

come si deduce sempre dalla seconda proposizione del n° 11; mentre la prima proposizione di questo n° 17 porge che:

Nelle ipotesi attuali, il punto Q coincide con $t(P)$,

di guisa che, nelle condizioni attuali, P e Q coincidono rispettivamente con A e $t(A)$, u e v degenerano, e μ coincide con α.

18. - Ferme le ipotesi e le notazioni del numero precedente, un ragionamento analogo a quello svolto per dimostrare il primo teorema del n° 14 permette di stabilire che:

Anche nelle condizioni attuali, l'interno di J non contiene nessun punto interno a $t^{-1}(J)$, e nessun punto interno a $t(J)$;

ed il trasporto del ragionamento è così facile, che non è davvero il caso di insistervi ulteriormente.

E dopo di ciò basta ricorrere di nuovo alla seconda proposizione del n° 7, per concludere che:

Anche nelle condizioni attuali, l'insieme J è libero in tutte le potenze di t diverse dalla t stessa e dalla sua inversa, nonchè dall'identità.

19. - Ferme le ipotesi e le notazioni fissate nel n° 17, diciamo ϱ l'arco che fornisce l'intersezione di $t^{-1}(\nu)$ e ν, di guisa che $t(\varrho)$ fornisce quella di ν e $t(\nu)$. Allora ϱ ha un estremo nel punto P, e $t(\varrho)$ un estremo nel punto Q $(= t(P))$. Inoltre ϱ appartiene a $t^{-1}(J)$ e $t(\varrho)$ appartiene a $t(J)$; indi ϱ e $t(\varrho)$ non si incontrano, a norma dell'ultimo teorema del numero precedente; epperò gli altri estremi di ϱ e $t(\varrho)$ sono interni a ν. E se R è quello di ϱ, quello di $t(\varrho)$ è dato da $t(R)$ ed è interno all'arco staccato su ν da $Q(=$ $= t(P))$ ed R.

Indichiamo con β il sottoarco di ν con gli estremi in R e $t(R)$. Allora è ovvio che:

La curva semplice ed aperta β è un arco di traslazione della t.

20. - Ferme le ipotesi e le notazioni, la curva $\varrho + \alpha + t(\varrho)$ è semplice ed aperta. Nel fatto, i punti di ϱ diversi da P e quelli di $t(\varrho)$ diversi da $Q(=t(P))$ sono interni a uno dei campi adiacenti a π, mentre α appartiene a π; inoltre ϱ e $t(\varrho)$ non si incontrano.

La curva $\varrho + \alpha + t(\varrho)$ ha in comune con la propria immagine, $t(\varrho) + t(\alpha) + t^2(\varrho)$, soltanto $t(\varrho)$. Infatti, ϱ e $t^2(\varrho)$ non si incontrano (n° 18, ultima proposizione), al pari di ϱ e $t(\varrho)$; α e $t(\alpha)$ hanno in comune soltanto $Q(=t(P))$; i punti di ϱ, $t(\varrho)$ e $t^2(\varrho)$ diversi da P, $t(P)$ e $t^2(P)$ sono interni a uno dei campi adiacenti a π, mentre α e $t(\alpha)$ appartengono a π.

Inoltre β è interno a uno dei campi adiacenti a π; epperò lo stesso accade per $t^{-1}(\beta)$ e $t(\beta)$. Indi le curve α e $t^{-1}(\beta) + \beta + t(\beta)$ sono disgiunte.

E ancora. L'intersezione di ϱ e $t^{-1}(\beta) + \beta + t(\beta)$ si riduce ad R, atteso che ϱ e $t(\beta)$ non hanno punti in comune (n° 18, ultima proposizione); e quella di $t(\varrho)$ e $t^{-1}(\beta) + \beta + t(\beta)$ si riduce a $t(R)$, atteso che in virtù dell'ultima proposizione del n° 18 non si incontrano nemmeno $t(\varrho)$ e $t^{-1}(\beta)$.

In conclusione:

La curva semplice ed aperta $\varrho + \alpha + t(\varrho)$ si trova, rispetto ad β, nelle stesse condizioni in cui la curva semplice ed aperta $\nu(=\varrho + \beta + t(\varrho))$ si trovava rispetto ad α;

e β assume attualmente anche l'ufficio che apparteneva a $\mu(=\alpha)$, ed α quello che apparteneva a β.

21. - Mantenute le solite ipotesi, e le notazioni, poniamo $\lambda = \varrho + \beta$, di guisa che λ è il sottoarco staccato da P e $t(R)$ su ν; e mostriamo che:

La curva semplice ed aperta λ è, per t, uno pseudoarco di traslazione, con l'origine nel punto P, e con tutti i punti diversi da P interni ad uno medesimo dei due campi adiacenti a π.

L'ultima affermazione del teorema è una conseguenza ovvia della prima proposizione del n° 17. Le altre si stabiliscono osservando che λ non può contenere nè $t^{-1}(P)$, nè $t(P)$, perchè tutti i punti di λ diversi da P sono interni a uno dei campi adiacenti a π, mentre $t^{-1}(P)$ e $t(P)$ appartengono a π (e sono diversi da P); che λ e $t(\lambda)$ hanno in comune $t(R)$; e, finalmente, che λ non contiene nell'interno nessuno dei trasformati dei propri punti interni, perchè ν e $t(\nu)$ hanno in comune soltanto $t(\varrho)$, mentre λ e $t(\varrho)$ hanno in comune soltanto $t(R)$.

22. - Supponiamo, viceversa, che λ^* sia, nella t, uno pseudoarco di traslazione: che l'origine, P, di λ^* coincida con l'origine, A, dell'arco α, di traslazione nella t; che λ^* abbia soltanto l'origine su $t^{-1}(\alpha) + \alpha + t(\alpha)$. E diciamo di nuovo π la traiettoria generata da α.

Nelle ipotesi attuali, tutti i punti di λ^* diversi dalla sua origine sono interni ad uno medesimo dei campi adiacenti a π; la cosa è notoria, e si deduce facilmente dalla prima proposizione del n° 10 e dall'ultima del n° 11.

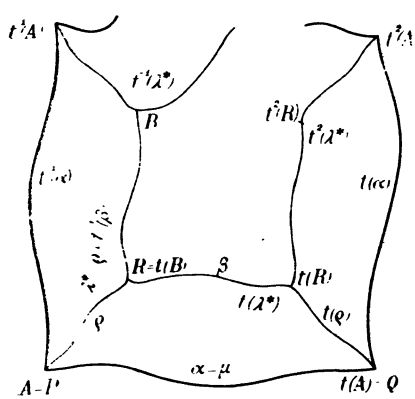

Fig. 3

Se il termine, B, di λ^* è interno a $t^{-1}(\lambda^*)$, poniamo $R = t(B)$; indichiamo con ϱ il sottoarco staccato da P ed R su λ^*; denotiamo con β quello individuato da R e $t(R)$ su $t(\lambda^*)$; e poniamo $\nu = \varrho + \beta + t(\varrho)$.

Invece, se B è interno a $t(\lambda^*)$, poniamo $R = t^{-1}(B)$; indichiamo con ϱ il sottoarco staccato da P ed R su λ^*; denotiamo con β quello individuato da R e $t(R)$ su λ^*; e poniamo di nuovo $\nu = \varrho + \beta + t(\varrho)$.

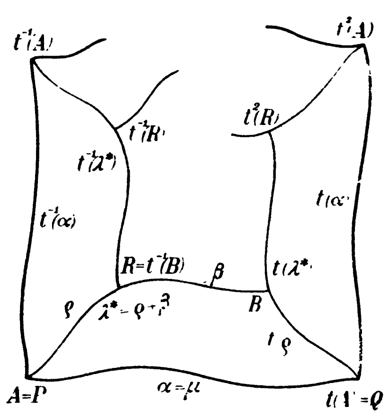

Fig. 4

Tanto nel primo caso, quanto nel secondo, è facile dedurre che ν è una curva semplice ed aperta (basta ricorrere alle definizioni ed alla prima proposizione del n° 12); che ν ha soltanto gli estremi su $t^{-1}(\alpha)+\alpha+t(\alpha)$, e che questi estremi appartengono addirittura ad α (basta ricorrere alle ipotesi ed alla proposizione precedente); che ν e $t(\nu)$ hanno in comune l'estremo $t(P)$ e che la loro intersezione è fornita da $t(\varrho)$, che ha nel punto $t(P)$ un estremo (basta ricorrere alle definizioni ed alla seconda proposizione del nº 12).

In conclusione, basta denotare l'arco α anche con la lettera μ, per riconoscere che:

Nelle ipotesi attuali, l'arco di traslazione α e le curve μ e ν si ritrovano nelle condizioni contemplate nei numeri immediatamente precedenti;

cioè in quelle contemplate nei n_r 17-21 (e si rammenti che anche allora, a conti fatti, μ finiva con coincidere con α). Epperò, in particolare:

Nelle ipotesi attuali, i punti interni all'insieme chiuso e limitato racchiuso dalla curva $\mu + \nu$, semplice e chiusa, sono interni a quello stesso campo adiacente a π che contiene i punti interni a ν,

la presenza di un tal campo essendo peraltro garantita dalla prima proposizione di questo numero, oltre che dalla prima del nº 17; inoltre:

Nelle ipotesi attuali, l'insieme chiuso e limitato racchiuso da $\mu + \nu$ non contiene, nell'interno, nessuno dei punti interni alle sue immagini nella t e nella t^{-1}; ed è privo di punti in comune con le sue immagini nelle altre potenze non identiche di t,

vale a dire è privo di punti in comune con le sue immagini in t^2, t^{-2}, t^3, ... ; mentre le considerazioni del nº 21 assicurano che:

Nelle ipotesi attuali, anche l'arco $\varrho + \beta$ è uno pseudoarco di traslazione per la t;

e volendo si potrebbe osservare che nel secondo dei due casi contemplati in questo numero $\varrho + \beta$ coincideva addirittura con λ^*.

§ 3. Traslazioni piane generalizzate e suddivisioni simpliciali.

23. - In questo paragrafo, e nel successivo, esporrò uno studio su insiemi, liberi rispetto ad una traslazione piana generalizzata, e via via più ampi, costruiti utilizzando come « Bausteine » le facce, cioè i triangoli [16]), di una suddivisione simpliciale, fissata convenientemente, nel piano, una volta data la traslazione. E per non appesantire inutilmente il dettato, sorvolerò sui continui legami di questo studio con quello delineato in una mia Memoria precedente [17]) ed approfondito nell'altra *Sulle traslazioni piane generalizzate* [18]). Avvertirò soltanto che in quest'ultima lo studio era condotto con riferimento a certi complessi non simpliciali, in vista di una successiva applicazione peculiare, sviluppata nella Memoria ricordata in [9]); e che in questo paragrafo si tratta, in sostanza, di restituire allo studio quella snellezza che gli è propria quando lo si riferisce a complessi simpliciali e lo si libera dalle sovrastrutture imposte da quella peculiare applicazione.

24. - Fissata una traslazione piana generalizzata t, mostriamo come sia sempre possibile definire una tal suddivisione simpliciale, K, del piano, che:

la stella corrente di K sia libera rispetto alla t,

la stella corrente di K essendo intesa qui come la somma di tutte le facce di K con un vertice nel rispettivo centro della stella, fornito naturalmente dal vertice corrente di K.

Allo scopo, consideriamo una suddivisione simpliciale del piano in tanti triangoli equilateri.

Tutte quelle facce della suddivisione che hanno un vertice in un vertice della suddivisione, arbitrario sì, ma fissato, costituiscono, insieme con i loro lati ed i loro vertici, un primo complesso simpliciale, L_1 [19]). Quelle che non compaiono in L_1, ma hanno un vertice in L_1, ne costituiscono, insieme con i loro lati ed i loro vertici, un secondo, L_2. In guisa analoga si ottiene L_3, a partire da $L_1 + L_2$, ecc., ecc.

---

[16]) Triangoli, nel senso di superficie triangolari.

[17]) G. SCORZA-DRAGONI, *Una dimostrazione del teorema di Brouwer sulle traslazioni piane generalizzate* (Annali di matematica pura ed applicata, serie 4, vol. XXXIX (1955), pagg. 1-10), n[i] 3-4.

[18]) citata nella nota [13]).

[19]) Spesso identificherò un complesso con l'insieme dei punti delle sue celle. La cosa non darà luogo ad equivoci, e snellirà il discorso.

Consideriamo ora la suddivisione baricentrica di L_1; e poi quella della suddivisione baricentrica di L_1; e così via, fino ad ottenere una suddivisione simpliciale, H_1, di L_1 siffatta, che le sue stelle siano libere rispetto alla t. La cosa è possibile, perchè la distanza del punto corrente di L_1 dalla propria immagine nella t ha un minimo positivo, mentre il massimo dei diametri delle stelle di H_1 e delle loro immagini nella t si può supporre piccolo a piacere.

Consideriamo ora la suddivisione baricentrica di L_2: e poi quella della suddivisione baricentrica di L_2; e così via, fino ad ottenere una suddivisione simpliciale, H_2, di L_2 siffatta, che le stelle di H_2 siano libere, e siano libere anche tutte quelle somme, che risultino connesse, di una stella di H_1 e di una stella di H_2. Se un lato di un triangolo di H_1 risulta suddiviso in H_2, dal baricentro di quel triangolo si proiettino i vertici di quel triangolo; analogamente, se un lato di un triangolo di H_2 risulta suddiviso in H_1. Si ottiene così una suddivisione simpliciale di $L_1 + L_2$; e le stelle di questa suddivisione sono libere nella t.

Dopo di che si passa ad L_3, e si opera in guisa analoga. E in questo passo (e nei successivi) la suddivisione già trovata per L_1 non viene più toccata. Indi si passa ad L_4, e si opera nella stessa maniera; e in questo passo (e nei successivi) non viene più toccata la suddivisione di L_2.

Ma allora è chiaro che così proseguendo si perviene appunto allo scopo desiderato.

Per esprimere che la stella corrente di una suddivisione simpliciale K del piano è libera rispetto a t, diremo che K è una suddivisione simpliciale *privilegiata* rispetto a t, o ricorreremo a locuzioni ovviamente equivalenti. E dopo di ciò, è chiaro che:

Un punto e la sua immagine nella t non possono mai appartenere ad una medesima stella di una medesima suddivisione simpliciale privilegiata rispetto a t;

atteso appunto che tutte le stelle di una tal suddivisione son libere nella t.

Nelle considerazioni svolte è implicita un'altra circostanza. Precisamente:

Assegnata t, si può costruire una successione, K_1, K_2, K_3, ..., *di suddivisioni privilegiate nei riguardi di t e siffatte, che l'estremo superiore dei diametri delle stelle di K_r non sia soltanto finito per ogni valore del numero naturale r, ma tenda anche a zero quando r diverge.*

Una suddivisione privilegiata per t, è privilegiata anche per t^{-1}. Cosa ovvia.

25. - Data t, e fissata K, privilegiata nei riguardi di t, un arco che sia di traslazione per t e che si presenti come somma di tanti lati di K sarà un arco *elementare* di traslazione, con riferimento a t e K, naturalmente. Ovvio il trasporto della terminologia ai segmenti.

Ebbene, si ponga che α_0 sia un tal arco elementare di traslazione, con l'origine in A_0 ed il termine in $t(A_0)$. Allora è manifesto che:

Nelle ipotesi attuali, tutti i punti di α_0 appartengono al complesso dei lati e dei vertici di K;

cioè che:

Nelle ipotesi poste, nessun punto di α_0 può essere interno a qualche faccia di K;

che:

Nelle stesse ipotesi, l'origine A_0 ed il termine $t(A_0)$ di α_0 sono altrettanti vertici di K;

e che:

Nelle solite ipotesi, i lati ed i vertici di K contenuti in α_0 porgono una suddivisione simpliciale di α_0,

precisamente quella, h_0, *subordinata* da K su α_0. E non è nemmeno difficile riconoscere che:

Nelle nostre ipotesi, nessuno dei vertici di h_0 può appartenere a tre lati di h_0;

nel fatto, basta ricordare che α_0 è una curva semplice ed aperta. Inoltre dalla penultima proposizione del numero precedente segue subito che:

Nelle ipotesi poste, i vertici di h_0 diversi da A_0 e $t(A_0)$ sono almeno due;

vale a dire che:

Nelle ipotesi poste, h_0 possiede almeno tre lati;

infatti, nel caso contrario α_0 sarebbe contenuto in una stella di K, cosa assurda.

E dovrebbe essere ormai superfluo osservare esplicitamente che da ogni vertice di h_0 interno ad α_0 partono due lati (e soltanto due lati) di h_0 .

26. - Ferme le ipotesi e le notazioni introdotte nel numero precedente, si dimostra subito che:

Nelle ipotesi attuali, nessuna faccia di K può avere simultaneamente punti in comune con $t^{-1}(\alpha_0) + t^{-2}(\alpha_0) + \dots$ e con $t(\alpha_0) + t^2(\alpha_0) + \dots$;

infatti la cosa segue immediatamente dall'ultima proposizione del n° 7, non appena si rammenti che nessun punto di α_0 può essere interno a una faccia di K.

Per quello, invece, che ha tratto alle stelle di K, si riconosce subito che:

Nelle solite ipotesi, una stella di K non può avere simultaneamente punti in comune con $t^{-1}(\alpha_0) + t^{-2}(\alpha_0) + \dots$ e con $t(\alpha_0) + t^2(\alpha_0) + \dots$ senza averne anche con α_0;

e la cosa segue dall'ultima proposizione del n° 7, senza bisogno di altre considerazioni.

Consideriamo ora una stella, W, di K, col centro in un vertice, V, interno ad α_0 . Allora W non è altri che il poligono ottenuto riunendo le facce di K con un vertice in V. Indi, attese le considerazioni del numero precedente, h_0 penetra nell'interno di W soltanto coi due lati che partono da V. Vale a dire, W è divisa da α_0 in due poligoni, che non contengono nessun punto di α_0, nei loro rispettivi interni. Pertanto:

Nel caso di questi due poligoni, nessuno di essi può incontrare simultaneamente $t^{-1}(\alpha_0) + t^{-2}(\alpha_0) + \dots$ e $t(\alpha_0) + t^2(\alpha_0) + \dots$,

come si riconosce ricorrendo alla solita ultima proposizione del n° 7.

27. - Ferme le ipotesi e le notazioni del n° 25, se si percorre α_0 nel verso positivo, cioè da A_0 a $t(A_0)$, i vertici ed i lati di h_0 si susseguono in un certo ordine.

Al quale ci riferiremo sempre, anche se non lo avvertiremo esplicitamente, ogni volta che per questi vertici e questi lati useremo appunto locuzioni implicanti un concetto di ordinamento.

La convenzione richiede peraltro che si sia fissata chiaramente t. Quell'ordine si muta nel suo opposto, se si passa da t alla sua inversa.

Tutto ciò in armonia con cose che sono state già dette nel n° 2.

28. - Ferme le solite ipotesi e le solite notazioni, diciamo π_0 la traiettoria generata da α_0 (nella t); e indichiamo con Π_0 uno dei due campi adiacenti a π_0, e con Π'_0 l'altro.

Sia quindi δ una faccia di K, con un lato su α_0, cioè con un lato su h_0.

Il triangolo δ o ha su h_0 soltanto quel lato; ovvero soltanto quel lato ed il vertice opposto; ovvero soltanto quel lato ed un altro lato, i due lati comuni a δ ed h_0 riuscendo consecutivi su h_0.

In ogni caso diremo che δ è una faccia di K *adiacente* ad α_0, oppure ad h_0; e parleremo in ogni caso dei lati comuni a δ e ad h_0, come dei lati di adiacenza.

In ogni caso, lungo il lato o i lati comuni a δ ed h_0, il triangolo δ o sarà *rivolto*, rispetto ad α_0, verso Π_0, cioè dalla stessa banda di Π_0, o sarà *rivolto* verso Π'_0, cioè dalla stessa banda di Π'_0.

Il senso di queste ultime frasi è evidente. E sarebbe facile precisarlo con assoluto rigore. Ma non ci attarderemo su di ciò, per non appesantire inutilmente l'esposizione. Ci limiteremo a chiarire che quando i lati comuni a δ ed h_0 sono due, δ è rivolto verso Π_0, lungo tutti e due i lati, ovvero verso Π'_0, lungo tutti e due i lati; e ad avvertire che quando δ ed h_0 hanno in comune un lato solo ed il vertice opposto, allora non si possono escludere circostanze quali quella schematizzata nella figura accanto, cioè non si può escludere che δ lungo il lato sia rivolto verso uno e nel vertice verso l'altro dei campi adiacenti a π_0.

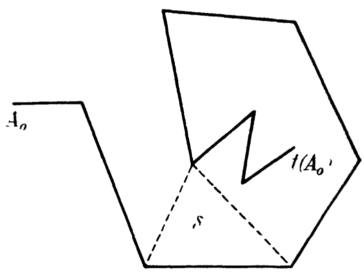

Fig. 5

Se ω è un lato di K sito su α_0, cioè un lato di h_0, una delle facce di K con un lato in ω è rivolta verso Π_0. lungo ω, e l'altra verso Π_0'.

29. - Ferme le solite ipotesi e le solite notazioni, sia V un vertice di h_0, interno ad α_0, e sia W la stella di K col centro in V.

Allora V può appartenere ad una sola faccia di K, adiacente ad h_0 lungo i lati uscenti da V e rivolta, lungo i lati di adiacenza, verso Π_0. Ma può appartenere anche a due facce (e due sole) adiacenti, ciascuna, ad h_0 lungo un lato di h_0 uscente da V e rivolte entrambe verso Π_0 lungo i lati di adiacenza. Ed è chiaro che:

Nel primo caso, quella faccia è contenuta in uno solo dei due poligoni in cui α_0 *divide* W;

ma è vero altresì che:

Nel secondo caso, quelle due facce sono contenute entrambe in uno medesimo dei due poligoni in cui α_0 *divide* W;

e si tratta sempre di una circostanza ovvia, sulla quale qui non è il caso di insistere.

30. - Sia di nuovo ω un lato di h_0. E sia δ la faccia adiacente ad h_0 lungo ω, e rivolta, per esempio, verso Π_0, lungo ω.

Noi diremo che ω è di *prima categoria*, per α_0 e Π_0 (rispetto a t e K), se δ incontra $t^{-1}(\alpha_0)$; che ω è di *seconda categoria*, per α_0 e Π_0 (rispetto a t e K), se δ incontra $t(\alpha_0)$; che ω è *eccezionale*, per α_0 e Π_0 (rispetto a t e K), se δ non incontra nè $t^{-1}(\alpha_0)$, nè $t(\alpha_0)$. E la terminologia si trasporta subito da ω a δ, di guisa che anche δ sarà di *prima* o di *seconda categoria*, o *eccezionale*, per α_0 e Π_0 (rispetto a t e K).

Il primo teorema del n° 26 ci assicura che le circostanze contemplate si escludono a vicenda. Sicchè:

Per α_0 *e* Π_0, *rispetto a* t *e* K, *un lato di prima* (*seconda*) *categoria non può essere nè di seconda* (*prima*) *categoria, nè eccezionale; analogamente per le facce adiacenti.*

Ancora un'osservazione. Se si scambiano gli uffici di t e t^{-1}, gli elementi di prima categoria si scambiano con quelli di seconda; gli elementi eccezionali restano eccezionali.

31. - Ferme le solite ipotesi e le solite notazioni, e sempre con riferimento a t e K, è ovvio che:

Il primo e l'ultimo lato di h_0 son rispettivamente di prima e seconda categoria per α_0 e Π_0,

atteso che essi contengono rispettivamente A_0 e $t(A_0)$. Inoltre l'ultimo teorema del n° 26 e l'ultimo del n° 29 porgono che:

Due lati consecutivi di h_0 non possono essere, per α_0 e Π_0, uno di prima e l'altro di seconda categoria;

epperò che la categoria può cambiare soltanto se si passa per lati eccezionali. Sicchè:

In h_0 vi son sempre, per α_0 e π_0, lati eccezionali; *ed in K, facce eccezionali*;

e si tratta di un risultato di estrema importanza per il seguito.

32. - Nel numero successivo affineremo il risultato raggiunto. Allo scopo, e sempre con riferimento a t e K, incominciamo col dimostrare che:

Se il lato ω di h_0 è di prima (seconda) categoria per α_0 e Π_0, quelli che su h_0 lo precedono (seguono) non possono essere, per α_0 e Π_0, di seconda (prima) categoria.

Consideriamo soltanto il caso che ω sia di prima categoria, nel quale peraltro si traduce quello che ω sia di seconda, se si scambiano gli uffici di t e di t^{-1}. E supponiamo naturalmente che ω non sia il primo lato di h_0, dopo di aver osservato che esso non può essere nemmeno l'ultimo, vista l'unica proposizione del n° 30 e la prima proposizione del n° 31.

Ciò premesso, sia δ la faccia di K adiacente ad α_0 lungo ω, e volta verso Π_0 lungo ω. E sia c una curva semplice ed aperta, con un estremo in un punto P interno ad ω e l'altro in un punto Q comune a δ e $t^{-1}(\alpha_0)$. Anzi i punti interni a c siano interni anche a δ, di guisa che c è libera nella t e non incontra $t(\alpha_0)$; e c abbia in comune con $t^{-1}(\alpha_0)$ soltanto il punto Q, di guisa che c ha soltanto gli estremi su $t^{-1}(\alpha_0) + \alpha_0 + t(\alpha_0)$. Tutte queste ipotesi sono perfettamente lecite (si rammenti anche l'ultimo teorema del n° 5). L'arco c ed il sottoarco di π_0 con gli estremi in P e Q dànno luogo, complessivamente, ad una curva semplice e chiusa, j. E tutti i punti interni all'insieme chiuso e limitato J, racchiuso da j, appartengono a Π_0, attese le ultime due proposizioni del n° 11 ed atteso che i punti di c diversi da P e prossimi a P sono certamente interni a Π_0. Una (eventuale) faccia di K, diversa da δ ed adiacente ad α_0 lungo un lato che preceda ω su h_0, penetra in J, se lungo quel lato è rivolta verso Π_0, e può uscire all'esterno di J, per incontrare eventualmente $t(\alpha_0)$, soltanto a patto di incontrare $t^{-1}(\alpha_0)$. Epperò ogni tal (eventuale) faccia, o è eccezionale, per α_0 e Π_0, o è di prima categoria. Donde la conclusione.

33. - Ferme restando le solite ipotesi e le solite convenzioni, consideriamo su h_0 l'ultimo lato di prima categoria, per α_0 e Π_0, ed il primo di seconda, sempre con riferimento alla t, naturalmente. Quel lato precede questo, a norma del risultato del numero precedente. Quel lato e questo non possono essere consecutivi, a norma della seconda proposizione del n° 31. Sicchè su h_0 vi sono lati che seguono tutti quelli di prima categoria, per α_0 e Π_0, e precedono tutti quelli di seconda. Essi sono ovviamente eccezionali per α_0 e Π_0; epperò li diremo *eccezionali in senso stretto*, o *strettamente eccezionali*, sempre per α_0 e Π_0. Ed *eccezionali in senso stretto*, o *strettamente eccezionali*, per α_0 e Π_0, diremo le facce di K adiacenti ad essi e rivolte lungo di essi verso Π_0 [20]). Il tutto sempre con riferimento a t, nonchè a K. Riassumendo:

Vi son sempre lati di h_0, e (quindi) facce di K, strettamente eccezionali per α_0 e Π_0, quelli e queste essendo anche eccezionali per α_0 e Π_0;

inoltre:

I lati di h_0 strettamente eccezionali per α_0 e Π_0 costituiscono una suddivisione simpliciale di un sottoarco (non degenere) di α_0.

Il sottoarco di α_0 formato dal secondo, dal terzo, ..., dal penultimo lato di h_0 è il sottoarco *essenziale* di α_0 (relativo a t e a K); quello formato dai lati di h_0 strettamente eccezionali per α_0 e Π_0 (con riferimento a t e a K) è il sottoarco *strettamente essenziale*, o *essenziale in senso stretto*, di α_0, relativo (a t, a K ed) a Π_0 [21]). Il primo contiene il secondo.

---

[20]) In circostanze analoghe, nella Memoria *Sulle traslazioni piane generalizzate*, citata in [13]), si parlava di lati e di celle speciali.

[21]) Anche qui modifico la terminologia seguita nella Memoria *Sulle traslazioni piane generalizzate*, già citata.

§ 4. Ancora sulle traslazioni piane generalizzate e le suddivisioni simpliciali.

34. - Sia di nuovo t una traslazione piana generalizzata. E K sia una suddivisione simpliciale del piano, privilegiata nei confronti della t.

Indichiamo di nuovo con α_0 un arco di traslazione della t; con π_0 la traiettoria generata da α_0 nella t; con Π_0 e Π_0' i due campi adiacenti a π_0. L'arco α_0 sia sempre elementare rispetto a K; ed abbia di nuovo l'origine in A_0, epperò il termine in $t(A_0)$.

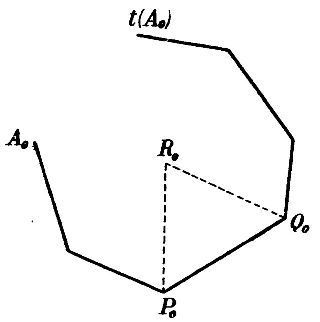

Fig. 6

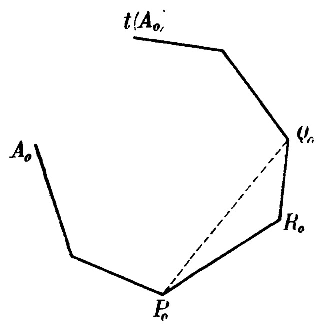

Fig. 7

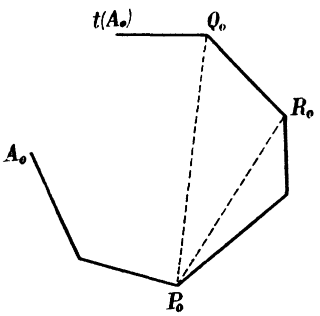

Fig. 8

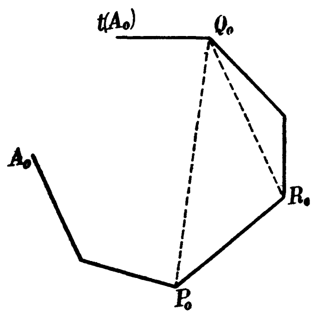

Fig. 9

Sia δ_1 una faccia di K, con i vertici nei punti P_0, Q_0 ed R_0, eccezionale per α_0 e Π_0, nella t. Ed i nomi dei vertici di δ_1 si suppongano scelti in tal guisa, che P_0 sia il primo e Q_0 l'ultimo dei punti comuni ad α_0 e δ_1 incontrati da chi percorra α_0 a partire da A_0, verso $t(A_0)$.

I punti P_0, Q_0 ed R_0 sono tutti e tre diversi da A_0 e $t(A_0)$. Quindi P_0 e Q_0 sono interni ad α_0 (ed anzi appartengono al sottoarco essenziale di α_0), mentre R_0 o è intero o è esterno ad α_0 (e nel primo caso appartiene anch'esso al sottoarco essenziale di α_0). Insomma, i casi possibili sono quelli schematizzati nelle figg. 6, 7, 8 e 9, rispettivamente primo, secondo, terzo e quarto caso. E vedremo che la schematizzazione è più fedele alla realtà dei fatti di quanto forse non appaia fin da questo momento. Precisamente, vedremo che nel terzo e nel quarto caso le circo-

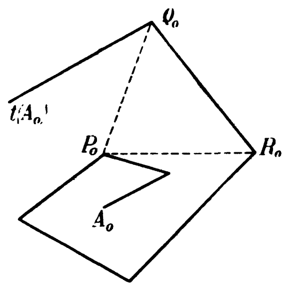

Fig. 10

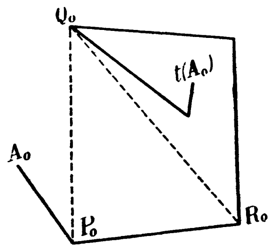

Fig. 11

stanze schematizzate nelle figg. 10 e 11 stavolta non si possono presentare.

In tutti i casi indichiamo con u_0 il sottoarco di α_0 individuato da A_0 e P_0, con μ_0 quello individuato da P_0 e Q_0, e con v_0 quello individuato da Q_0 e $t(A_0)$. Allora μ_0 è, in α_0, la minima sottopoligonale che contenga l'intersezione di α_0 e δ_1.

Nel primo caso poniamo poi $\nu_1 = P_0R_0 + R_0Q_0$; e negli altri $\nu_1 = P_0Q_0$. Allora ν_1 è quella, delle due poligonali individuate da P_0 e Q_0 sul contorno di δ_1, che ha soltanto gli estremi su α_0, mentre l'altra ha in comune con α_0 almeno tutto un lato di δ_1.

In tutti i casi indichiamo con d_1 il poligono racchiuso dalla poligonale semplice e chiusa $\mu_0 + \nu_1$. Di guisa che d_1 si presenta sempre come una somma di facce di K; e nel primo, e nel secondo caso coincide addirittura con δ_1.

Il triangolo δ_1 è libero nella t, incontra α_0 e non incontra nè $t^{-1}(\alpha_0)$. nè $t(\alpha_0)$; indi, esso non ha punti in comune con $t^{-2}(\alpha_0) + + t^{-3}(\alpha_0) + \ldots$ e $t^2(\alpha_0) + t^3(\alpha_0) + \ldots$, a norma dell'ultima proposizione del n° 7. Ma i punti di δ_1 abbastanza prossimi ai lati di δ_1 siti su α_0 appartengono a Π_0; pertanto:

Quei punti di δ_1 che non sono interni ad α_0 appartengono a Π_0;
cioè, se si preferisce:

Quei punti di δ_1 che non appartengono al sottoarco essenziale di α_0 sono interni a Π_0.

Questa proposizione ci permette di escludere le circostanze contemplate nelle figg. 10 e 11. E ci permette di dire, volendo, che δ_1 è rivolto verso Π_0 anche nel punto P_0, quando si presenta il terzo caso, ed anche nel punto Q_0, quando si presenta il quarto caso. Sicchè, nel caso di una faccia eccezionale si può dire che essa è *rivolta* verso Π_0 (o verso Π'_0), senza specificazioni ulteriori di lati o di vertici.

I punti interni a ν_1 appartengono a δ_1 e sono esterni ad α_0; indi:

I punti interni a ν_1 sono interni a Π_0;
epperò basta ricordare la seconda proposizione del n° 13, per concludere senz'altro che:

Anche nei riguardi del poligono d_1, quei punti del poligono che sono interni al poligono appartengono a Π_0;
o, se si preferisce, che:

Anche nei riguardi del poligono d_1, quei punti del poligono che non appartengono al sottoarco essenziale di α_0 sono interni a Π_0;
sicchè:

Il poligono d_1 contiene il triangolo δ_1, anche quando non coincide con δ_1,
cioè anche nel terzo e nel quarto caso. La penultima proposizione permette altresì di dedurre che:

Tutti i lati di h_0 contenuti in μ_0 sono eccezionali per α_0 e Π_0, sempre con riferimento a t e K naturalmente;
nel fatto, una faccia di K, adiacente ad α_0 lungo un tal lato di h_0, e rivolta verso Π_0 lungo il lato o i lati di adiacenza ad α_0, è contenuta nel poligono d_1, atteso che d_1 è una somma di facce di K ed attesa quella penultima proposizione; epperò essa è priva

di punti in comune sia con $t^{-1}(\alpha_0)$, sia con $t(\alpha_0)$, sempre per quella penultima proposizione; donde il risultato.

35. - La curva semplice ed aperta α_1, ottenuta sostituendo μ_0, in α_0, con ν_1, cioè ponendo

$$\alpha_1 = u_0 + \nu_1 + v_0 ,$$

è un arco di traslazione nella t, elementare rispetto a K. La prima affermazione segue dal teorema del n° 15; e dopo di ciò la seconda è ovvia. E la terza proposizione del numero precedente diventa:

I punti di α_1 esterni ad α_0 appartengono a Π_0.

Diremo che α_1 si ottiene da α_0 mediante l'*aggiunzione* della faccia δ_1, eccezionale per α_0 e Π_0. E diremo altresì che μ_0 è la poligonale *soppressa*, nell'aggiunzione, e ν_1 quella *aggiunta* [22]).

Indichiamo con h_1 la suddivisione simpliciale di α_1 subordinata da K. Allora, nella stessa definizione di α_1 è implicito che:

Quei lati di h_1 che non compaiono fra i lati di h_0 son lati di δ_1;

mentre dalla definizione di α_1 e dall'ultimo teorema del numero precedente si deduce subito che:

In h_1 si ritrovano tutti quei lati di h_0 che erano di prima o di seconda categoria per α_0 e Π_0;

anzi, per quello che ha tratto al primo e all'ultimo lato di h_0, si può precisare che:

Il primo e l'ultimo lato di h_0 coincidono col primo e con l'ultimo lato di h_1, rispettivamente;

mentre è implicito, nelle considerazioni del n° 15, nonchè nelle osservazioni precedenti, che:

Gli archi α_0 ed α_1 hanno la stessa origine, A_0, e lo stesso termine, $t(A_0)$.

Ricordiamo, poi, che la poligonale soppressa μ_0 coincide con quella individuata su α_0 dal primo, P_0, e dall'ultimo, Q_0, dei punti comuni ad α_0 e δ_1 incontrati da chi percorra α_0 a partire da A_0, verso $t(A_0)$; e che la poligonale aggiunta ν_1 coincide con

[22]) Nella solita Memoria *Sulle traslazioni piane generalizzate* si parlava di poligonali sostituite invece che di poligonali soppresse.

quella poligonale individuata da P_0 e Q_0 sul contorno di δ_1, che ha soltanto gli estremi su α_0.

36. - Indichiamo con π_1 la traiettoria generata da α_1 nella traslazione piana generalizzata t.

Dalla prima proposizione del n° 13, o, se si preferisce, dalla terza del n° 34, si deduce subito che:

La traiettoria π_1 appartiene completamente a $\Pi_0 + \pi_0$;
mentre dalle prime due proposizioni del n° 13 e dal teorema del n° 16 si deduce facilmente che:

I punti interni a μ_0 appartengono tutti ad un medesimo campo adiacente a π_1;
e che:

I punti interni a d_1, epperò anche i punti interni a δ_1, appartengono a quello stesso campo adiacente a π_1 che contiene i punti interni a μ_0;
e per quello che ha tratto a δ_1 si terrà conto anche della penultima proposizione del n° 34.

Nel seguito indicheremo con Π_1' quel campo adiacente a π_1 che contiene i punti interni a μ_0 e quelli interni a d_1; e con Π_1 l'altro. Allora nelle considerazioni precedenti non è soltanto implicito che:

Il campo Π_1' contiene tutti i punti interni a μ_0 e quelli interni a δ_1;
cioè che:

Il campo Π_1' contiene tutti i punti di α_0 esterni ad α_1 e tutti i punti interni a δ_1;
o, se si preferisce, che:

L'insieme $\Pi_1' + \alpha_1$ contiene tanto α_0 quanto δ_1;
ma è implicito altresì che:

Quei punti di δ_1 che non appartengono al sottoarco essenziale di α_1 sono interni a Π_1';
che:

La traiettoria π_0 è contenuta in $\Pi_1' + \pi_1$, epperò non ha nessun punto in Π_1;
e che:

Gli archi α_0 ed α_1 hanno, il primo su π_1 ed il secondo su π_0, soltanto i punti della loro intersezione $u_0 + v_0$.

Ricordiamo pure, circostanza fondamentale, che:

Nelle condizioni attuali, il campo Π_0 contiene il campo Π_1, ed il campo Π'_1 contiene il campo Π'_0;

e per la dimostrazione procediamo come segue. I punti di Π_1 possono essere uniti ad un punto, M, interno a ν_1, e quindi contenuto in π_1 ed esterno ad α_0 (e pertanto interno a Π_0), mediante curve semplici ed aperte che abbiano soltanto il punto M su π_1 e tutti gli altri entro Π_1; la cosa è possibile in virtù della seconda proposizione del n° 10, come si riconosce facilmente. Queste curve aperte non incontrano π_0, che appartiene a $\Pi'_1 + \pi_1$ e non contiene punti interni a Π_1; pertanto esse sono contenute in Π_0, atteso che contengono il punto M, interno a Π_0, ed attesa la prima e la seconda proposizione del n° 10. Ne segue appunto che Π_1 appartiene a Π_0. Un ragionamento analogo, col punto M interno a μ_0, prova la seconda parte del teorema.

37. - Ferme le solite ipotesi e le solite convenzioni, l'ultima proposizione del numero precedente assicura che:

Una faccia di K, adiacente ad α_0 ed α_1 lungo un lato comune ad h_0 ed h_1, è rivolta, lungo questo lato comune, verso Π_0 e Π_1, ovvero verso Π'_0 e Π'_1.

Dimostriamo adesso che:

Un lato comune ad h_0 ed h_1, eccezionale per α_1 e Π_1, è eccezionale anche per α_0 e Π_0.

Sia infatti ω quel lato comune ad h_0 ed h_1; e sia δ la faccia di K adiacente ad α_0 ed α_1 lungo ω, e lungo ω rivolta verso Π_0 e (quindi) verso Π_1. Il triangolo δ non incontra $t(\alpha_1)$ e $t^{-1}(\alpha_1)$. E bisogna dimostrare che esso non incontra nemmeno $t(\alpha_0)$ e $t^{-1}(\alpha_0)$. Ma ciò, nelle ipotesi attuali, è immediato. Infatti, un punto di $t(\alpha_0)$ o è un punto di $t(\alpha_1)$ od appartiene a Π'_1, a norma della quinta proposizione del numero precedente (e della invarianza dei campi adiacenti ad una traiettoria); ma Π'_1 non ha punti in comune con δ, a norma del primo teorema del n° 34 (applicato a δ ed α_1), in quanto δ è eccezionale per α_1 e Π_1; epperò, un eventuale punto comune a δ e $t(\alpha_0)$ sarebbe comune anche a δ e $t(\alpha_1)$; cosa impossibile. Analogamente per quello che ha tratto a δ e $t^{-1}(\alpha_0)$. Donde la conclusione.

Ed ora passiamo a dimostrare che:

Ogni (eventuale) lato comune ad h_0 e ad una faccia di K eccezionale per α_1 e Π_1, appartiene anche ad h_1.

Nel fatto, un lato comune ad α_0 e ad una faccia di K, la quale sia eccezionale per α_1 e Π_1, appartiene a $\Pi_1 + \alpha_1$, a norma della prima proposizione del n° 34, in quanto lato di quella faccia; ed in quanto lato di h_0 non può avere punti in comune con Π_1, che appartiene a Π_0, giusta l'ultima proposizione del n° 36. E di qui il risultato.

Il quale, unito alla proposizione precedente, porge senz'altro che:

Una faccia di K, eccezionale per α_1 e Π_1, è eccezionale anche per α_0 e Π_0, non appena abbia almeno un lato su α_0;

e ci consente perciò di precisare la terza proposizione del n° 35, nel senso che:

Tutti quei lati di h_0 che non sono eccezionali per α_0 e Π_0 compaiono anche in h_1, e vi compaiono come lati non eccezionali per α_1 e Π_1.

Volendo si potrebbe affermare qualcosa di più: un lato di h_0 di prima (seconda) categoria per α_0 e Π_0 è di prima (seconda) categoria anche per α_1 e Π_1. Ma nel seguito questo risultato non ci occorre; epperò ci limiteremo alla notizia [23]).

§ 5. Sempre sulle traslazioni piane generalizzate e le suddivisioni simpliciali.

38. - Ferme naturalmente restando le solite ipotesi e le solite convenzioni, e ferme restando specialmente le ipotesi del n° 34, sia adesso Δ_m,

$$(1) \qquad \Delta_m = (\delta_1, \dots, \delta_m) \quad (m \text{ numero naturale}),$$

una m-pla ordinata di facce, $\delta_1, \dots, \delta_m$, di K.

[23]) La dimostrazione si può costruire modellandola su quella data per il teorema 45) della solita Memoria *Sulle traslazioni piane generaliz-*

Noi diremo che una tal m-pla ordinata è una *catena eccezionale* per α_0 e Π_0 (rispetto a t e a K, naturalmente), e che m è la sua *lunghezza*, se δ_1 è eccezionale per α_0 e Π_0; se δ_2 è eccezionale per α_1 e Π_1, qualora α_1 sia l'arco elementare di traslazione ottenuto aggiungendo δ_1 ad α_0, e Π_1 sia quel campo adiacente alla traiettoria π_1, generata da α_1, che a norma della terza proposizione del n° 36 non contiene nessun punto di δ_1; se δ_3 è eccezionale per α_2 e Π_2, qualora α_2 sia...; e, finalmente, se δ_m è eccezionale per α_{m-1} e Π_{m-1}, qualora α_{m-1} sia l'arco elementare di traslazione ottenuto aggiungendo δ_{m-1} ad α_{m-2}, e Π_{m-1} sia qual campo adiacente alla traiettoria π_{m-1}, generata da α_{m-1}, che non contiene nessun punto di δ_{m-1}.

Dopo di che α_m sarà naturalmente quell'arco elementare di traslazione che si ottiene aggiungendo δ_m ad α_{m-1}; e π_m sarà la traiettoria generata da α_m; e Π_m il campo adiacente ad α_m privo di punti in comune con δ_m.

E $\Pi'_0, \Pi'_1, \ldots, \Pi'_m$ saranno i campi rispettivamente adiacenti a $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_m$ e rispettivamente diversi da $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_m$. E $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{m-1}$ saranno le poligonali rispettivamente soppresse in tutte quelle aggiunzioni; e $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ le poligonali rispettivamente aggiunte.

Naturalmente P_0, Q_0, u_0 e v_0 avranno il solito significato; ed ovviamente analogo al loro sarà quello di P_1, Q_1, u_1 e v_1, ... e finalmente quello di P_{m-1}, Q_{m-1}, u_{m-1} e v_{m-1}. E $d_1, d_2, \ldots, d_m$ saranno i poligoni rispettivamente racchiusi dalle poligonali semplici e chiuse $\mu_0 + \nu_1, \mu_1 + \nu_2, \ldots, \mu_{m-1} + \nu_m$.

Analogamente $h_0, h_1, \ldots$ ed h_m saranno le suddivisioni simpliciali rispettivamente subordinate su $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ ed α_m da K.

Spesso lo stesso simbolo Δ_m che denota la catena (1) sarà utilizzato anche per indicare la somma di $\delta_1, \ldots, \delta_m$, in quanto insiemi di punti. Inoltre i lati ed i vertici di $\delta_1, \ldots, \delta_m$ porgeranno anche i lati ed i vertici di Δ_m, in quanto catena; e si potrà parlare di $\delta_1, \ldots, \delta_m$ anche come delle facce di Δ_m, in quanto catena.

---

zate. Le circostanze sono simili, ma si dovrà stare attenti al diverso significato dei simboli.

39. - Fissiamo subito qualche circostanza di carattere esistenziale. Ed osserviamo intanto come nelle definizioni istesse sia implicito che:

Se la (1) *è una catena eccezionale per* α_0 *e* Π_0, *con la lunghezza data da* m; *e se* $(\delta_{m+1}, \ldots, \delta_{m+n})$ *è, ferme le altre convenzioni, una catena eccezionale per* α_m *e* Π_m, *con la lunghezza data da* n: *la catena* $(\delta_1, \ldots, \delta_{m+n})$ *è eccezionale per* α_0 *e* Π_0 *ed ha la lunghezza data da* $m + n$;

che:

Nelle stesse ipotesi, l'aggiunzione di $(\delta_1, \ldots, \delta_{m+n})$ *ad* α_0 *porta allo stesso risultato dell'aggiunzione di* $(\delta_{m+1}, \ldots, \delta_{m+n})$ *ad* α_m;

e che:

Se le catene $(\delta_1, \ldots, \delta_m)$ *e* $(\delta_1, \ldots, \delta_{m+n})$ *sono eccezionali per* α_0 *e* Π_0 *ed hanno le lunghezze rispettivamente date da* m *ed* $m + n$, n *essendo un numero naturale al pari di* m; *e se* α_m *e* Π_m *hanno il solito significato*; *la catena* $(\delta_{m+1}, \ldots, \delta_{m+n})$ *è eccezionale per* α_m *e* Π_m *ed ha come lunghezza* n.

Limitandosi eventualmente alle catene con la lunghezza unitaria, l'ultima proposizione del n° 31 porge, poi, che:

In K, *la presenza di catene eccezionali per* α_0 *e* Π_0 *è ovvia*;

ma la stessa proposizione assicura anche che:

In K, *la lunghezza di una catena eccezionale per* α_0 *e* Π_0 *si può prefissare ad arbitrio*,

attesa la possibilità di iterare indefinitamente l'aggiunzione di facce eccezionali.

40. - Ferme restando le solite ipotesi, sia adesso Δ una successione di facce di K. E si ponga anzi che sia

$$\Delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots), \tag{2}$$

trasportando alle successioni il simbolismo adottato per le m-ple ordinate.

La successione Δ si considera come *eccezionale*, per α_0 e Π_0 (rispetto a t ed a K), se tali son tutte le sue *ridotte* $(\delta_1, \ldots, \delta_m)$. E naturalmente:

Anche la presenza di siffatte successioni eccezionali è immediata.

Ed in verità, per costruire una tal successione si può procedere come segue. Si identifichi δ_1 con la faccia di K adiacente al primo lato di h_0 eccezionale per α_0 e Π_0, la faccia essendo rivolta verso Π_0. Indi si proceda per induzione. Supposto di aver definito la ridotta $(\delta_1, \ldots, \delta_m)$, si identifichi δ_{m+1} con la faccia adiacente al primo lato di h_m eccezionale per α_m e Π_m, la faccia essendo rivolta verso Π_m. Naturalmente il significato dei simboli è quello ovvio.

Spesso lo stesso simbolo Δ che denota la successione (2) sarà utilizzato anche per indicare la somma di δ_1, δ_2, ... in quanto insiemi di punti. Ed i lati ed i vertici di δ_1, δ_2, ... porgeranno anche i lati ed i vertici di Δ, in quanto successione di triangoli; e in quanto successione di triangoli, Δ avrà le sue facce in δ_1, δ_2, δ_3, ...

41. - Posto che la (1) sia una catena eccezionale per α_0 e Π_0, e ferme restando le altre convenzioni, indichiamo alcune conseguenze immediate di quanto siamo venuti dicendo.

Intanto, nella definizione stessa di faccia eccezionale è implicito che:

Se r è un intero positivo o nullo, minore di m, la poligonale h_r e la faccia δ_{r+1} hanno in comune almeno un lato;

e nella seconda proposizione del n° 34 che:

Nelle stesse ipotesi, l'intersezione di h_r e δ_{r+1} è formata da lati e da vertici di h_r e δ_{r+1} contenuti nel sottoarco essenziale di α_r, epperò interni ad α_r;

mentre la seconda, la quarta e la quinta proposizione del n° 35 porgono che:

Nelle stesse ipotesi, quei lati di h_{r+1}, che non compaiono fra i lati di h_r, compaiono fra i lati di δ_{r+1};

che:

Le poligonali h_0, h_1, ..., h_m hanno lo stesso primo e lo stesso ultimo lato;

e (quindi) che:

Gli archi α_0, α_1, ..., α_m hanno la stessa origine e lo stesso termine.

Di qui, dalle mutue relazioni dei vertici, dei lati e delle facce di una suddivisione simpliciale del piano e dalle definizioni di arco elementare di traslazione e di faccia eccezionale, segue subito che:

Se il numero intero r, *positivo o nullo, ed il numero naturale* s *non superano* m, *l'intersezione di* h_r *e* δ_s, *o è vuota, o è formata da vertici e da lati contenuti nel sottoarco essenziale di* α_r,

epperò contenuti anche nell'interno dell'arco elementare α_r.

42. - Proseguiamo nella nostra deduzione di corollari. E dopo di aver osservato come dall'ultima proposizione del n° 36 segua subito che:

I campi Π_0, Π_1, ..., Π_m *vanno decrescendo, ed i campi* Π'_0 Π'_1, ..., Π'_m *vanno crescendo,*

incominciamo col dimostrare che:

Le traiettorie π_0 *e* π_m *sono rispettivamente contenute negli insiemi* $\Pi'_m + \pi_m$ *e* $\Pi_0 + \pi_0$.

Se $m = 1$, la cosa è vera, a norma della prima e dell'ottava proposizione del n° 36. Indi possiamo procedere per induzione. Ammesso che la cosa sia vera per $m = n$, mostriamo che essa è vera anche per $m = n + 1$. Allora, nel fatto, da

$$\pi_0 \subseteq \Pi'_n + \pi_n\,, \qquad \pi_n \subseteq \Pi_0 + \pi_0\,,$$

da

$$\pi_n \subseteq \Pi'_{n+1} + \pi_{n+1}\,, \qquad \pi_{n+1} \subseteq \Pi_n + \pi_n\,,$$

e da

$$\Pi_n \subseteq \Pi_0\,, \qquad \Pi'_n \subseteq \Pi'_{n+1}\,,$$

segue appunto che π_0 e π_{n+1} appartengono rispettivamente a $\Pi'_{n+1} + \pi_{n+1}$ e $\Pi_0 + \pi_0$.

Allo stesso modo si dimostra, risultato più preciso, che:

Tutti i punti di α_m *esterni ad* α_0 *appartengono a* Π_0; *tutti i punti di* α_0 *esterni ad* α_m *appartengono a* Π'_m.

Se $m = 1$, la cosa, nel fatto, è vera, a norma della prima proposizione del n° 35 e della quinta del n° 36. Indi possiamo procedere di nuovo per induzione, ammettendo che la cosa sia vera per $m = n$, e facendo vedere che essa è vera anche per $m = n + 1$. In queste condizioni, dei punti di α_{n+1}, esterni ad α_0, quelli che appartengono ad α_n sono interni a Π_0, e quelli che non appartengono ad α_n sono interni a Π_{n+1}, epperò a Π_0. Analogamente per i punti di α_0 esterni ad α_{n+1}: quelli che appartengono ad α_n sono interni a Π'_{n+1}, e quelli che non appartengono ad α_n sono interni a Π'_n, epperò a Π'_{n+1}.

43. - Ferme le solite ipotesi e le solite convenzioni, e ragionando sempre per induzione completa, noi adesso mostreremo che:

L'insieme $\delta_1 + ... + \delta_m$ è contenuto tanto nella somma di Π_0 e del sottoarco essenziale di α_0, quanto nella somma di Π'_m e del sottoarco essenziale di α_m.

Se $m = 1$, la cosa è vera, a norma della seconda proposizione del n° 34 e della settima del n° 36. Ammesso che la cosa sia vera per $m = n$, facciamo vedere che la cosa è vera anche per $m = n + 1$. Nel fatto, allora l'insieme $\delta_1 + ... + \delta_n$ è contenuto nella somma di Π_0 e del sottoarco essenziale di α_0 e δ_{n+1} è contenuto nella somma di Π_n, che appartiene a Π_0, e del sottoarco essenziale di α_n. Inoltre,dei punti di questo secondo sottoarco essenziale, quelli esterni ad α_0 sono interni a Π_0; e quelli contenuti in α_0 appartengono anche al sottoarco essenziale di α_0, attesa la quarta proposizione del n° 41. Indi $\delta_1 + ... + \delta_{n+1}$ appartiene appunto alla somma di Π_0 e del sottoarco essenziale di α_0. E, seguitando, il triangolo δ_{n+1} appartiene alla somma di Π'_{n+1} e del sottoarco essenziale di α_{n+1}, mentre l'insieme $\delta_1 + + ... + \delta_n$ appartiene alla somma di Π'_n e del sottoarco essenziale di α_n. Inoltre, dei punti di questo secondo sottoarco essenziale, quelli esterni ad α_{n+1} appartengono a Π'_{n+1}; e quelli contenuti in α_{n+1} appartengono anche al sottoarco essenziale di α_{n+1}, attesa sempre la quarta proposizione del n° 41. Indi $\delta_1 + + ... + \delta_{n+1}$ appartiene appunto alla somma di Π'_{n+1} e del sottoarco essenziale di α_{n+1}. Donde la conclusione.

Nel teorema dimostrato è implicito che $\delta_1 + ... + \delta_m$ non ha punti nè in Π'_0, nè in Π_m.

44. - La circostanza posta in luce nel numero precedente, permette di stabilire presso che immediatamente alcune proposizioni essenziali per il seguito.

Nelle solite ipotesi, l'insieme $\delta_1 + ... + \delta_m$ associato alla solita catena eccezionale $(\delta_1, ..., \delta_m)$ è libero nella t.

Se $m = 1$, la cosa è vera, atteso che le facce di K sono libere nella t. Ammesso che la cosa sia vera per $m = n$, la cosa si riconosce vera anche per $m = n + 1$, ricordando la prima proposizione del n° 11 e ricordando che l'insieme $\delta_1 + ... + \delta_n$ è contenuto nella somma di Π'_n e del sottoarco essenziale di α_n, mentre il triangolo δ_{n+1} è contenuto nella somma di Π_n e dello stesso sottoarco essenziale.

Se $m > 1$, le facce δ_1, ..., δ_m della solita catena eccezionale $(\delta_1, ..., \delta_m)$ sono a due a due distinte.

Nel fatto, detto n un numero naturale minore di m, basta osservare appunto che i triangoli δ_1, ..., δ_n sono contenuti nella somma di Π'_n e (del sottoarco essenziale) di α_n, mentre i triangoli δ_{n+1}, ..., δ_m sono contenuti nella somma di Π_n e (del sottoarco essenziale) di α_n.

45. - Completiamo questo notevole gruppo di proposizioni dimostrando, ferme le solite ipotesi e le solite convenzioni, che:

Se la catena (1) *è eccezionale per α_0 e Π_0 e se δ_m ha un lato su α_0, questo lato appartiene anche ad α_1, ..., α_{m-1}, anzi questo lato appartiene anche ai sottoarchi essenziali di α_0, α_1, ..., α_{m-1}; e δ_m è eccezionale anche per α_0 e Π_0, α_1 e Π_1, ..., α_{m-1} e Π_{m-1}.*

Se $m = 1$, non vi è nulla da dimostrare. Escluso questo caso, un lato di δ_m situato su α_0 non ha punti in comune con Π_0, e quindi nemmeno con Π_1, ..., Π_{m-1}, attesa la prima proposizione del n° 42. Ma un lato di δ_m, se non ha punti in comune con Π_{m-1}, appartiene al sottoarco essenziale di α_{m-1}, giusta la seconda proposizione del n° 34, e si presenta come lato di h_{m-1}. Inoltre, un lato di h_{m-1}, se non ha punti in comune con Π_{m-2}, appartiene al sottoarco essenziale di α_{m-2}, sempre per la seconda proposizione del n° 34, e si presenta come un lato di h_{m-2}. Sicchè, un lato di δ_m, se appartiene ad α_0, appartiene anche ad α_{m-1} ed α_{m-2}; nel qual caso, il triangolo δ_m non è eccezionale soltanto per α_{m-1} e Π_{m-1}, ma è eccezionale anche per α_{m-2} e Π_{m-2}, a norma della penultima proposizione del n° 37. Dopo di che il processo dimostrativo riprende, fino alla conclusione.

46. - Ferme le solite ipotesi e le solite notazioni, sia Λ una componente *connessa in senso forte* della catena Δ_m [24]). Sia δ_n una faccia (cioè un triangolo) di Λ. E si consideri la catena $(\delta_1, ..., \delta_n)$, eccezionale per α_0 e Π_0, rispetto a t.

Il triangolo δ_n ha almeno un lato su h_{n-1}, atteso che esso è eccezionale per α_{n-1} e Π_{n-1}, rispetto a t. E questo lato (se $n > 1$), o è un lato di δ_{n-1}, o è un lato di h_{n-2}, attesa la terza proposizione del n° 41. Nel secondo caso (se $n > 2$), quel lato, o è un lato di δ_{n-2}, o è un lato di h_{n-3}, attesa la stessa terza proposizione del n° 41. Nel secondo caso (se $n > 3$), quel lato, ecc., ecc. Insomma: o uno dei lati di δ_n appartiene ad h_0; ovvero n è maggiore di 1 e δ_n ha in comune un lato almeno con uno dei triangoli $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_{n-1}$. E Λ contiene questo triangolo, appunto perchè essa è una componente connessa in senso forte di Δ_m. E si può ripetere tutto il ragionamento a partire da questo triangolo. Insomma:

Ogni componente connessa in senso forte di Δ_m contiene un lato di h_0;

e non sarebbe nemmeno difficile riconoscere che si tratta anzi di un lato contenuto nel sottoarco essenziale di α_0, essenziale, naturalmente, con riferimento a K.

Componenti di Δ_m, connesse in senso forte e distinte, hanno al massimo dei vertici in comune. Pertanto:

Il numero delle componenti di Δ_m connesse in senso forte non può superare quello dei lati di h_0;

anzi si mantiene minore di questo numero di due unità almeno.

47. - Naturalmente tutte le proposizioni di questi ultimi numeri dànno altrettante informazioni sulle ridotte di una successione eccezionale; e si prestano a dedurre qualche corollario per una tal successione. Così, fermo il resto:

Se la successione (2) *è eccezionale per α_0 e Π_0, rispetto a t e K, l'insieme $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + ...$ è contenuto nella somma di Π_0 e del sottoarco essenziale di α_0,*

[24]) Cioè una *starke Komponente* della catena Δ_m, in quanto complesso simpliciale. In proposito si può vedere A. Alexandroff ed H. Hopf, *Topologie* (Springer, Berlino, 1935), pagg. 189-190.

come segue subito dal teorema del n° 43. Inoltre:

Nelle stesse ipotesi, l'insieme $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots$ *è per di più libero nella* t;

chè altrimenti non sarebbe libero nemmeno l'insieme $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_m$, almeno per valori abbastanza grandi del numero naturale m; cosa assurda, attesa la prima proposizione del n° 44. E, seguitando:

Nelle solite ipotesi, ogni componente connessa in senso forte della successione (2) *contiene almeno un lato di* h_0;

come segue dalla prima proposizione del n° 46. E di qua si trae anche nel caso delle successioni eccezionali per α_0 e Π_0, rispetto a t e K, che:

Il numero delle loro componenti connesse in senso forte non può superare quello dei lati di h_0;

epperò che:

Almeno una delle componenti connesse in senso forte della (2) *contiene infinite facce della* (2),

naturalmente sempre se la (2) soddisfa alle solite ipotesi di eccezionalità.

§ 6. Ancora sulle traslazioni piane generalizzate.

48. - L'esposizione delle premesse sarebbe ultimata. E potremmo incominciare ad occuparci subito del teorema enunciato nella prefazione. Peraltro basterebbe isolare una parte delle deduzioni che ci condurrebbero a quel teorema, per ottenere, presso che completa, anche una dimostrazione del profondo teorema di Brouwer sulle traslazioni piane generalizzate; precisamente quella esposta nella mia Memoria citata in [17]). Epperò ritengo più opportuno riprodurre anche quest'altra dimostrazione, prima di passare a quella del nuovo teorema: seguire prima il giuoco del ragionamento su un modello più semplice non potrà che giovare alla chiarezza.

49. - Un'immagine topologica di una retta (semiretta) reale euclidea è una linea (semilinea) ***semplice aperta e propria***, qualora essa contenga tutti i suoi punti di accumulazione (ovvia essendo la nozione di ***origine*** della semilinea).

Naturalmente, un punto che descriva una linea (semilinea) semplice aperta e propria in uno qualunque dei due versi della linea (a partire dall'origine della semilinea), diverge.

E se t è una traslazione piana generalizzata, un *campo di traslazione* della t è un campo, libero nella t, delimitato da una linea semplice aperta e propria, libera nella t, e dall'immagine, semplice aperta e propria e libera, della linea.

Ciò premesso, il teorema di Brouwer su quegli autoomeomorfismi del piano reale euclideo, che conservano il senso delle rotazioni e che sono privi di punti invarianti, afferma che:

La totalità dei campi di traslazione di un tal autoomeomorfismo ricopre completamente il piano, qualunque sia l'autoomeomorfismo; cioè che tutti i punti del piano appartengono a campi di traslazione dell'autoomeomorfismo.

50. - Sia adunque t una traslazione piana generalizzata. E sia P un punto del piano.

A norma della terza proposizione del n° 4, il punto P è interno ad infiniti archi di traslazione della t. E fra questi, previa l'eventuale trasformazione di t mediante un conveniente autoomeomorfismo del piano, possiamo supporre che ve ne sia almeno uno rettilineo, diciamolo α_0. Di guisa che α_0 si riduce ad un segmento di traslazione, e precisamente al segmento $A_0t(A_0)$, se A_0 è la sua origine nella t.

Indi consideriamo una suddivisione simpliciale del piano in tanti triangoli equilateri, tutti coi lati uguali ad α_0 in lunghezza, ed α_0 sia anzi uno dei loro lati. E partiamo da una tal suddivisione, per giungere, come nel n° 24, ad una suddivisione simpliciale del piano, diciamola K, privilegiata nei riguardi della t.

Allora α_0 è un segmento di traslazione della t elementare rispetto a K. Epperò in K possiamo considerare due successioni di triangoli, diciamole Δ e Δ',

$$\Delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots)\,, \qquad \Delta' = (\delta_{-1}, \delta_{-2}, \ldots)\,,$$

eccezionali, rispetto a t, la prima per α_0 e Π_0, e la seconda per α_0 e Π'_0, se Π_0 e Π'_0 sono i due campi adiacenti alla solita traiettoria π_0, generata da α_0 nella t. Si rammenti, nel fatto, la proposizione del n° 40.

51. - Ciò premesso, fissiamo la nostra attenzione dapprima sulla successione Δ, eccezionale per α_0 e Π_0, rispetto a t.

E consideriamo in Δ una componente connessa in senso forte, costituita da infiniti triangoli (n° 47, ultima proposizione). E siano appunto

$$(3) \qquad \delta_{m_1},\ \delta_{m_2},\ \delta_{m_3},\ \dots \quad (m_1 < m_2 < m_3 < \dots)$$

le infinite facce di una tal componente. Dalla successione (3) si può estrarre una tal sottosuccessione

$$(4) \qquad \delta_{n_1},\ \delta_{n_2},\ \delta_{n_3},\ \dots \quad (n_1 < n_2 < n_3 < \dots),$$

che il primo dei triangoli (4) abbia un lato in comune col secondo, il secondo col terzo, il terzo col quarto, e così via; e che il primo abbia per di più un lato su α_0. Ed ecco, forse, il modo più rapido per ottenere questo risultato: nelle considerazioni del n° 46 è implicito che ogni triangolo della (3) è contenuto in una totalità finita, estratta dalla (3) e soddisfacente a condizioni analoghe a quelle imposte alla successione (4); i triangoli di Δ adiacenti ad α_0 sono finiti, quindi almeno uno, δ_{n_1}, dei triangoli (3) ha un lato su α_0 ed appartiene a infinite di quelle totalità finite (e supponiamo n_1 minimo, sotto queste condizioni); epperò almeno uno, δ_{n_2}, dei triangoli (3), con $n_2 > n_1$, ha un lato su δ_{n_1} ed appartiene ad infinite di quelle totalità finite (e supponiamo n_2 minimo, sotto queste condizioni); epperò almeno uno, δ_{n_3}, dei triangoli (3), con $n_3 > n_2$, ha un lato su δ_{n_2} ed appartiene ad infinite di quelle totalità finite (e supponiamo n_3 minimo, sotto queste condizioni); ecc., ecc.

Sia ora U_{n_1} il baricentro del lato (o di un lato) comune ad α_0 e δ_{n_1}; e V_{n_1} quello di δ_{n_1}; U_{n_2} quello del lato comune a δ_{n_1} e δ_{n_2}; e V_{n_2} quello di δ_{n_2}; e così via.

La semilinea $U_{n_1}V_{n_1} + V_{n_1}U_{n_2} + U_{n_2}V_{n_2} + \dots$, diciamola p, è semplice ed aperta, perchè i triangoli (4) sono distinti a due a due e privi a due a due di punti interni in comune.

La semilinea p è propria, perchè i triangoli (4), in quanto triangoli di una suddivisione simpliciale del piano, abbandonano definitivamente ogni regione limitata del piano.

La semilinea p è contenuta in Π_0, a meno dell'origine, U_{n_1}, interna ad α_0. Queste circostanze seguono ovviamente dal primo teorema del n° 47 e dalla costruzione.

Inoltre la semilinea p è libera nella t, perchè l'insieme $\delta_1 + + \delta_2 + \delta_3 + \dots$ è libero nella t, a norma della seconda proposizione del n° 47.

52. - Se ripetiamo le stesse considerazioni a partire da Δ', otteniamo una semilinea semplice aperta e propria, p', che soddisfa a proprietà analoghe nei riguardi di α_0 e Π'_0, e che in particolare è contenuta in Π'_0, a meno dell'origine, diciamola U'_{n_1}, interna ad α_0.

Posto $q = U_{n_1} U'_{n_1}$, la linea $p + q + p'$ è semplice aperta e propria, atteso che p e p' stanno una in Π_0 e l'altra in Π'_0, a meno delle rispettive origini, ed attese le altre circostanze. Inoltre essa è libera nella t, come segue subito dalla prima proposizione del n° 11, e dalle circostanze attuali.

Se la linea $p + q + p'$ non passa per il punto P, che era stato assegnato, essa e la sua immagine nella t, oppure essa la sua immagine nella t^{-1}, delimitano un campo, che è di traslazione nella t e che contiene P. Se la linea $p + q + p'$ passa per P, basta modificarla leggermente attorno a P, per giungere alla conclusione desiderata anche in questo caso. E la dimostrazione del teorema di Brouwer è terminata.

§ 7. Considerazioni preliminari sugli autoomeomorfismi del cerchio con un punto unito solo ed interno al cerchio.

53. - Passiamo alle trasformazioni topologiche che applicano un cerchio, $\mathfrak{C}$, su se stesso e che ammettono un solo punto unito, il punto unito risultando interno al cerchio [25]).

---

[25]) Da questo momento in poi il nostro studio avrà legami con quello esposto nella Memoria citata in [2]); legami tanto frequenti, che per non appesantire inutilmente l'esposizione, sarà meglio accontentarsi di nuovo dell'avvertimento generico, e rinunciare alle segnalazioni singole.

Si tratta di far vedere che in una simile trasformazione, o è presente (almeno) una curva semplice ed aperta, che unisce, nel cerchio, il punto unito al contorno, e che ha in comune con la propria immagine soltanto il punto unito; o è presente (almeno) una curva semplice ed aperta, che aggira, nel cerchio, il punto unito, a meno di un numero reale positivo prefissato, e che non incontra la propria immagine, la curva semplice ed aperta potendosi completare in una curva semplice e chiusa, che aggiri il punto unito, mediante l'aggiunta di un conveniente altro arco semplice ed aperto, contenuto in $\mathfrak{C}$ e libero nella t.

E non è restrittivo supporre che il punto unito cada proprio nel centro del cerchio.

54. - Mediante una trasformazione per raggi vettori reciproci, l'autoomeomorfismo di $\mathfrak{C}$ dà luogo ad un autoomeomorfismo, $\mathfrak{t}$, dell'insieme $\mathfrak{E}$ formato dai punti esterni a $\mathfrak{C}$ e dai punti della frontiera di $\mathfrak{C}$ (e di $\mathfrak{E}$), diciamola $\mathfrak{e}$.

La trasformazione topologica $\mathfrak{t}$ applica $\mathfrak{E}$ su se stesso, ed è priva di punti uniti.

E per dimostrare i nostri teoremi basterà far vedere che $\mathfrak{t}$ ammette sempre, come libera, almeno una semilinea semplice aperta e propria, che appartiene ad $\mathfrak{E}$ e che esce da un punto di $\mathfrak{e}$; oppure almeno una curva semplice ed aperta, che appartenga ad $\mathfrak{E}$ e che aggiri il centro di $\mathfrak{e}$ a meno di un numero reale positivo prefissato, la curva semplice ed aperta potendosi completare in una curva semplice e chiusa, che aggiri il centro di $\mathfrak{e}$, mediante l'aggiunta di un conveniente altro arco semplice ed aperto, contenuto in $\mathfrak{E}$ e libero nella $\mathfrak{t}$.

55. - Nel piano ambiente si stabilisca un sistema di coordinate polari. Il polo cada nel centro di $\mathfrak{e}$, l'asse polare potendo invece essere scelto ad arbitrio. Come unità di misura per gli angoli si assuma l'angolo giro; e come unità di misura per le lunghezze si assuma il raggio di $\mathfrak{e}$. La convenzione per la scelta del verso positivo delle rotazioni sarà indicata nel seguito.

Se ξ è uno degli argomenti del punto $\mathfrak{P}$ di $\mathfrak{E}$, ed η il modulo di $\mathfrak{P}$, gli altri argomenti di $\mathfrak{P}$ si ottengono aggiungendo a ξ i numeri interi relativi, mentre il modulo risulta maggiore di 1, quando non gli è uguale.

Pertanto, se $\varphi(\xi, \eta)$ è uno degli argomenti di $t(\mathfrak{P})$, e $\chi(\xi, \eta)$ il modulo dello stesso punto, gli altri argomenti di $t(\mathfrak{P})$ si ottengono aggiungendo a $\varphi(\xi, \eta)$ i numeri interi relativi, mentre il modulo è sempre maggiore di 1, quando non gli è uguale. Inoltre risulta identicamente

$$\chi(\xi, 1) = 1 , \tag{5}$$

atteso che t applica la circonferenza e su se stessa. Attesa la stessa circostanza, e la mancanza di punti uniti nella t, la differenza

$$\varphi(\xi, 1) - \xi \tag{6}$$

non può assumere mai valori interi, positivi, negativi o nulli.

56. - Si fissi ora, nel piano ambiente, un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. E si interpretino ξ ed $\eta - 1$ rispettivamente come ascissa, x, e come ordinata, y, di un punto P del piano.

Al variare di ξ e di η, cioè di x e di y, il punto P descrive il semipiano $\mathfrak{S}$ dei punti che hanno l'ordinata positiva o nulla.

Ed al punto corrente $\mathfrak{P}$ di $\mathfrak{C}$ vengon così rispettivamente associati i punti

$$\ldots, (x-2, y), (x-1, y), (x, y), (x+1, y), (x+2, y), \ldots$$

di $\mathfrak{S}$, e soltanto questi; tutto ciò in un senso ovvio, sul quale qui non è il caso di insistere.

57. - Se x ed y son di nuovo l'ascissa e l'ordinata del punto corrente P di $\mathfrak{S}$, la funzione univoca $f(x, y)$ è determinata a meno di una costante additiva, se le si impone di esser definita in $\mathfrak{S}$, di esservi continua, e di esser sempre uguale, nel punto corrente (x, y), ad uno dei valori rispettivamente assunti da $\varphi(x, y+1)$. La costante additiva di cui si parla è poi intera e relativa; ed è individuata non appena si fissi il valore di $f(x, y)$ in un punto di $\mathfrak{S}$, per esempio nell'origine, O, del sistema cartesiano ortogonale introdotto nel piano. Il valore di $f(0, 0)$ si può scegliere poi ad arbitrio fra quelli possibili per $\varphi(0, 1)$; sicchè, in definitiva, il valore di quella tal costante additiva si può scegliere ad arbitrio nella totalità degli interi relativi.

Fissato il valore di $f(0, 0)$, fissata cioè la funzione $f(x, y)$, si ponga

$$g(x, y) = \chi(x, y + 1) - 1\,,$$

di guisa che anche la funzione $g(x, y)$ è univoca e continua nel semipiano $\mathfrak{S}$.

Al punto corrente (x, y) di $\mathfrak{S}$ si associ, come rispettivo trasformato, il punto $(f(x, y), g(x, y))$ dello stesso semipiano $\mathfrak{S}$. Si definisce così, per $\mathfrak{S}$, un autoomeomorfismo, t, il quale porge, diciamo, una delle *immagini rettificate* di t [26]).

58. - Per la trasformazione topologica t, la (5) si traduce ovviamente nell'identità

$$g(x, 0) = 0\,; \tag{7}$$

inoltre è chiaro che risulta, sempre identicamente,

$$f(x + 1, y) = f(x, y) + 1\,, \qquad g(x + 1, y) = g(x, y)\,, \tag{8}$$

cioè, se si preferisce, che t è *periodica*, nella x, con periodo unitario.

Quest'ultima circostanza si può esprimere anche dicendo che t è permutabile con quell'autoomeomorfismo, ϑ, di $\mathfrak{S}$, che muta il punto corrente (x, y) di $\mathfrak{S}$ rispettivamente nel punto $(x + 1, y)$. E le (8), equivalendo alle

$$t\vartheta = \vartheta t\,, \tag{9}$$

porgono anche

$$t\vartheta^{-1} = \vartheta^{-1}t\,, \tag{10}$$

---

[26]) La terminologia riecheggia quella usata da POINCARÉ nella Memoria *Sur un théorème de géométrie* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXIII (1912), pagg. 375-407), pag. 386.

che equivale alle

$$(11) \qquad f(x-1,\, y) = f(x,\, y) - 1\,, \qquad g(x-1,\, y) = g(x,\, y)\,,$$

e ci dice che t è permutabile anche con ϑ^{-1}, com'era ovvio. Naturalmente, non sarebbe difficile passare direttamente dalle (8) alle (11), senza ricorrere alla (9) ed alla (10).

Naturalmente, dalla (9) si deduce altresì che ogni potenza di t è permutabile con ogni potenza di ϑ.

La circostanza che la differenza (6) non possa assumere mai valori interi relativi, si riflette in quella analoga per la differenza

$$(12) \qquad f(x,\, 0) - x\;;$$

ne segue, attesa la continuità di $f(x, 0) - x$, che la differenza (12) è sempre negativa, ovvero sempre positiva; è sempre minore di 1, ovvero sempre maggiore di 1; e così via, nei riguardi di ogni intero relativo.

La circostanza che t sia priva di punti uniti, implica che anche t è priva di punti uniti.

59. - Per risalire da t a t, cioè da t alla sua *immagine circolare* [27]), basta ripartire i punti di $\mathfrak{S}$ in classi, in tal guisa, che due punti di $\mathfrak{S}$ appartengono alla stessa classe appena hanno ordinate uguali, ed ascisse differenti per numeri interi relativi, e soltanto quando hanno ordinate uguali, ed ascisse differenti per numeri interi relativi; e basta interpretare, come immagine della classe che contiene il punto corrente (x, y), quella che rispettivamente contiene il punto $(f(x, y), g(x, y))$.

60. - Insieme con t, si possono interpretare come immagini rettificate di t anche le trasformazioni

$$(13) \qquad t\vartheta\,, \quad t\vartheta^{-1}\,, \quad t\vartheta^{2}\,, \quad t\vartheta^{-2}\,, \quad \dots\,;$$

---

[27]) Qui si può ripetere quello che si è detto nella nota precedente.

e la cosa è implicita appunto nell'arbitrarietà insita nella funzione $f(x, y)$, che è individuata appunto a meno di una costante additiva, intera e relativa, arbitraria.

Indi tutto quello che siam venuti dicendo per t, sussiste anche per le trasformazioni topologiche (13). In particolare, anche le (13) sono prive di punti uniti.

E per individuare quell'immagine rettificata, t, di t, su cui fissare la nostra attenzione, noi imporremo a t di mutare l'origine, O, del sistema cartesiano ortogonale scelto in un punto, $t(O)$, che abbia un'ascissa positiva e minore di 1.

61. - Fissata in tal guisa t, o, se si preferisce, $f(x, y)$, le circostanze poste in luce verso la fine del n° 58, assicurano che risulta sempre

$$f(x, 0) > x \,, \tag{14}$$

cioè, che, nella t, l'ascissa di ogni punto dell'asse delle ascisse aumenta nel passare dal punto all'immagine; e che accanto alla (14) sussiste anche la

$$f(x, 0) < x + 1 \,, \tag{15}$$

di guisa che, nella t, l'ascissa di ogni punto dell'asse delle ascisse aumenta, sì, nel passare dal punto all'immagine, ma aumenta di una quantità minore di 1.

In particolare, l'ascissa di $t^{-1}(O)$ è negativa e maggiore dell'unità negativa.

62. - Non è restrittivo aggiungere la condizione che il punto $t(O)$ sia contenuto nel segmento con gli estremi in O e $\vartheta(t^{-1}(O))$, o, se si preferisce, nel segmento con gli estremi in O e $t^{-1}(\vartheta(O))$. Una tal condizione è senz'altro soddisfatta, se $\vartheta(t^{-1}(O))$ coincide con $t(O)$ [28]. Che se invece $t(O)$ e $\vartheta(t^{-1}(O))$ sono distinti, una tal condizione implica soltanto una scelta opportuna nel verso po-

[28]) A questo proposito si noti che t e ϑt^{-1} possono coincidere identicamente.

sitivo delle rotazioni in quel tal sistema di coordinate polari.

Nelle nostre ipotesi, la convenzione attuale implica che il punto $t^{-1}(O)$ è contenuto nel segmento con gli estremi in $\vartheta^{-1}(t(O))$ ed O, o, se si preferisce, in $t(\vartheta^{-1}(O))$ ed O. Nel fatto, basta applicare ϑ^{-1} ai punti $t(O)$ e $\vartheta(t^{-1}(O))$, e rammentare che l'ascissa di $t^{-1}(O)$ è negativa.

63. - Nelle considerazioni del numero precedente si è ripresentata la seconda delle trasformazioni (13), cioè la

$$t\vartheta^{-1},$$

insieme con la sua inversa, la ϑt^{-1}, che coincide con

$$t^{-1}\vartheta,$$

così come $t\vartheta^{-1}$ coincideva con $\vartheta^{-1}t$. La considerazione di una tal altra immagine rettificata $t\vartheta^{-1}$ di t, e la considerazione della sua inversa $t^{-1}\vartheta$, si riveleranno sempre più come essenziali. Tanto, che ci farà comodo aver posto

$$w = t^{-1}\vartheta,$$

di guisa che

$$t\vartheta^{-1} = w^{-1},$$

mentre la trasformazione topologica w si presenta come un'immagine rettificata di t^{-1}.

64. - Per legittimare più facilmente l'applicazione della teoria esposta nei paragrafi precedenti, non sarà poi male prolungare t e w e ϑ in tutto il piano, in guisa da convertirle in altrettante traslazioni piane generalizzate.

Allo scopo, basta supporre che nel semipiano dei punti con le ordinate negative o nulle, le trasformazioni prolungate, che saranno indicate anch'esse con t e w e ϑ, non alterino le ordinate dei punti trasformandi e portino le semirette verticali, cioè quelle dirette come l'asse delle ordinate, in semirette verticali.

65. - Dopo i prolungamenti, la traslazione piana generalizzata t è permutabile con ϑ; dopo i prolungamenti risulta sempre

$$w = t^{-1}\vartheta$$

e ϑ è addirittura una traslazione piana ordinaria. D'ora in poi t e w e ϑ staranno sempre ad indicare le trasformazioni prolungate.

Le trasformazioni t e w sono uniformemente continue in ciascuna delle strisce $\mathfrak{S}_m^*$ rispettivamente individuate dalle disuguaglianze

$$-\infty < x < +\infty, \quad -m \leqslant y \leqslant m \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

ed ammettono entrambe, in ciascuna tal striscia $\mathfrak{S}_m^*$, un numero positivo come estremo inferiore delle distanze dei punti della striscia dalle rispettive immagini, il numero positivo dipendendo dalla striscia che si considera. Per ϑ le circostanze analoghe sono banali, e sussistono anzi con riferimento a tutto il piano.

Ma si può dire qualcosa di più. Precisamente, in ciascuna striscia $\mathfrak{S}_m^*$ sono equiuniformemente continui tutti i prodotti di t e t^{-1} per le diverse potenze di ϑ; e per ciascuna striscia $\mathfrak{S}_m^*$ è positivo l'estremo inferiore, ι_m, delle distanze dei punti della striscia dalle rispettive immagini nei prodotti di t e t^{-1} per tutte le potenze di ϑ.

§ 8. Lemmi.

66. - Ferme le ipotesi e le notazioni del paragrafo precedente, passiamo a costruire una suddivisione simpliciale del piano, diciamola K, applicata su se stessa dalla ϑ (nel senso che ogni vertice, ogni lato ed ogni faccia della suddivisione va rispettivamente a finire, nella ϑ, in un tal vertice, in un tal lato, in una tal faccia, e rispettivamente proviene, nella ϑ, da un tal vertice, da un tal lato, da una tal faccia), e privilegiata sia rispetto a t, sia rispetto a w ed a ϑ.

Allo scopo, consideriamo il quadrato definito dalle disuguaglianze

$$0 \leqslant x \leqslant 1\,, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1\,,$$

e proiettiamo dal suo centro i suoi vertici ed i punti $t(O)$ e $w(O)$; otteniamo una suddivisione simpliciale del quadrato, diciamola $L_{1,0}$. Indi consideriamo il quadrato definito dalle disuguaglianze

$$0 \leqslant x \leqslant 1\,, \qquad -1 \leqslant y < 0\,,$$

e proiettiamo dal suo centro i suoi vertici ed i punti $t(O)$ e $w(O)$; otteniamo una suddivisione simpliciale di quest'altro quadrato, diciamola $L_{0,1}$. Dopo di ciò consideriamo i quadrati individuati dalle disuguaglianze

$$0 \leqslant x \leqslant 1\,, \qquad m-1 < y \leqslant m \qquad (m = 2, 3, 4, \ldots),$$

e quelli individuati dalle disuguaglianze

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad -m \leqslant y \leqslant 1-m \qquad (m = 2, 5, 4, \ldots),$$

e dividiamoli in triangoli mediante le rispettive diagonali, in guisa da ottenere le suddivisioni simpliciali $L_{m,0}$ ed $L_{0,m}$, rispettivamente relative ai primi ed agli ultimi.

Indichiamo con L_1^* il complesso delle facce di $L_{1,0}$ ed $L_{0,1}$; con L_2^* quello delle facce di $L_{2,0}$ ed $L_{0,2}$; e così via. E consideriamo come facenti rispettivamente parte di L_1^*, di L_2^*, ecc., ecc. anche i vertici ed i lati dei triangoli di L_1^*, di L_2^*, ecc., ecc.

Indi trasformiamo i vertici, i lati e le facce di L_1^* mediante tutte le potenze di ϑ. A conti fatti otteniamo una suddivisione simpliciale, L_1, della striscia $\mathfrak{S}_1^*$. La suddivisione simpliciale L_1 è applicata su se stessa da ϑ; i punti O, $t(O)$, $w(O)$ e $\vartheta(O)$ compaiono fra i vertici di L_1.

Analogamente trasformiamo i vertici ed i lati ed i triangoli di L_2^* mediante tutte le potenze della ϑ. A conti fatti otteniamo una suddivisione simpliciale, L_2, della somma delle due striscie individuate dalle disuguaglianze

$$-\infty < x < +\infty\,, \qquad -2 \leqslant y \leqslant -1$$

e dalle disuguaglianze

$$-\infty < x < +\infty\,, \qquad 1 \leqslant y \leqslant 2\;;$$

ed L_2 è anch'essa applicata su se stessa dalla traslazione piana ordinaria ϑ.

E così di seguito, per quello che ha tratto ad L_3^*, L_4^*, ecc., ecc., che daranno luogo ad L_3, L_4, ecc., ecc.

Consideriamo ora la suddivisione baricentria di L_1; e poi quella della suddivisione baricentrica di L_1; e così via, fino ad ottenere una suddivisione simpliciale, H_1, di L_1, siffatta, che le sue stelle siano libere rispetto a t ed a w, nonchè a ϑ. La cosa è possibile, perchè t e w, nonchè ϑ, sono uniformemente continue nella striscia $\mathfrak{S}_1^*$, epperò nell'insieme L_1, e perchè le distanze del punto corrente di $\mathfrak{S}_1^*$, epperò dell'insieme L_1, dalle proprie immagini nella t e nella w, nonchè nella ϑ, hanno estremi inferiori positivi, mentre il massimo dei diametri delle stelle di H_1 e delle loro immagini nella t e nella w (nonchè nella ϑ) si può supporre piccolo a piacere. La suddivisione simpliciale H_1 è applicata su se stessa da ϑ.

Consideriamo ora la suddivisione baricentrica di L_2; e poi quella della suddivisione baricentrica di L_2; e così via, fino ad ottenere una suddivisione simpliciale, H_2, di L_2, siffatta, che le sue stelle siano libere rispetto a t ed a w, nonchè a ϑ, e siffatta, che siano libere, rispetto a t ed a w ed a ϑ, anche tutte quelle somme, che risultino connesse, di una stella di H_1 e di una stella di H_2 . La cosa è possibile, perchè t e w, nonchè ϑ sono uniformemente continue nella striscia $\mathfrak{S}_2^*$, epperò nell'insieme L_2, e perchè le distanze del punto corrente di $\mathfrak{S}_2^*$, epperò anche quelle del punto corrente di L_2, dalle proprie immagini nella t e nella w, nonchè nella ϑ, hanno estremi inferiori positivi, mentre il massimo dei diametri delle stelle di H_2 e delle loro immagini nella t e nella w (nonchè nella ϑ) si può supporre piccolo a piacere. La suddivisione simpliciale H_2 è applicata su se stessa da ϑ.

Ottenuta H_2, se un lato di un triangolo di H_1 risulta suddiviso in H_2, proiettiamo i vertici di quel triangolo dal baricentro di quel triangolo. Analogamente, se un lato di un triangolo di H_2 risulta suddiviso in H_1. Si ottiene una suddivisione simpliciale di $L_1 + L_2$, applicata su se stessa da ϑ: e le stelle di questa suddivisione sono libere nella t, nella w e nella ϑ.

Dopo di che si passa ad L_3, e si opera in guisa analoga. E in questo passo (e nei successivi) la suddivisione già trovata per L_1 non viene più toccata. Indi si passa ad L_4, e si opera nella stessa maniera; e in questo passo (e nei successivi) non viene più toccata la suddivisione di L_2.

Ma allora è chiaro che così proseguendo si perviene appunto allo scopo desiderato. Anzi è chiaro che:

La suddivisione simpliciale K cui si perviene, non è soltanto privilegiata rispetto a t ed a w ed a ϑ, non è soltanto applicata su se stessa da ϑ, ma ammette anche i punti O, $t(O)$, $w(O)$ e $\vartheta(O)$ come vertici.

Nelle considerazioni svolte è inoltre implicito che:

Si può costruire una successione, $K_1, K_2, K_3, \ldots$, di suddivisioni quali K, siffatte che l'estremo superiore dei diametri delle stelle di K_r non sia soltanto finito per ogni valore del numero naturale r, ma tenda anche a zero quando r diverge.

Ne viene, in particolare, che:

Alla suddivisione K del penultimo enunciato si può imporre la condizione ulteriore di avere tanto vertici interni al segmento $Ot(O)$, quanto vertici interni al segmento $w(O)\vartheta(O)$, e quindi anche vertici interni al segmento $t^{-1}(O)O$;
e si tratta peraltro di una circostanza più che ovvia di per se stessa.

Nelle considerazioni svolte è implicito altresì, che alla suddivisione K si può imporre una restrizione ulteriore. Precisamente si può richiedere, a quelle stelle di K che sono contenute in $\mathfrak{S}_1^*$, di avere un diametro minore di ι_1; a quelle stelle di K che sono contenute in $\mathfrak{S}_2^*$, senza essere completamente contenute in $\mathfrak{S}_1^*$, di avere un diametro minore di ι_2; e così via. E per riconoscere che:

In queste condizioni, ogni segmento il quale abbia entrambi gli estremi in una medesima stella di K è libero in t ed in t^{-1}, nonchè in tutti i prodotti di t e di t^{-1} per potenze di ϑ, basta ricordare la definizione dei numeri positivi ι_m esposta alla fine del n° 65.

E noi imporremo appunto a K di soddisfare a quella tal restrizione ulteriore.

Facce di K le quali si possano mutare le une nelle altre mediante potenze di ϑ, saranno dette *equivalenti*, rispetto a ϑ.

67. - Indichiamo con $\mathfrak{S}_m$ la striscia delimitata dall'orizzontale dei punti con l'ordinata nulla e da quella dei punti con l'ordinata uguale al numero intero e positivo m, cioè la striscia individuata dalle disuguaglianze

$$-\infty < x < +\infty\,, \qquad 0 \leqslant y \leqslant m \quad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

di guisa che $\mathfrak{S}_m$ appartiene al semipiano $\mathfrak{S}$ dei punti con l'ordinata positiva o nulla, mentre i triangoli di K contenuti in $\mathfrak{S}_m$ esauriscono completamente $\mathfrak{S}_m$.

68. - Fissato m, si considerino appunto le facce di K contenute nella striscia $\mathfrak{S}_m$. E si distribuiscano queste facce in classi di equivalenza, rispetto a ϑ, ponendole in una medesima classe, quando, e soltanto quando, esse sono equivalenti rispetto a ϑ. Classi di equivalenza che abbiano facce in comune coincidono. E la totalità di queste classi di equivalenza è finita, per ogni fissato m, beninteso.

Sia appunto s_m il numero delle classi di equivalenza, relative a ϑ, nelle quali si distribuiscono le facce di K contenute in $\mathfrak{S}_m$. Allora si riconosce abbastanza facilmente che:

Se un sottoinsieme internamente connesso costituito dalle facce di un sottocomplesso di K appartiene ad $\mathfrak{S}$ e possiede più di s_m facce in $\mathfrak{S}_m$, esso ha in comune almeno una faccia con la propria immagine nella ϑ.

Infatti, nel caso contrario, il sottocomplesso e la sua immagine nella ϑ (e nella ϑ^{-1}) non avrebbero in comune punti che fossero interni e all'uno ed all'altro; pertanto, a norma del secondo teorema del n° 7, il sottocomplesso sarebbe libero in ϑ^2, in ϑ^3, ecc., ecc. (ed in ϑ^{-2}, in ϑ^{-3}, ecc., ecc.). Epperò il sottocomplesso non avrebbe facce in comune con nessuna delle sue immagini nelle potenze di ϑ diverse da quella identica. E questo sarebbe incompatibile con l'ipotesi che il sottocomplesso abbia più di s_m facce in $\mathfrak{S}_m$.

69. - Per snellire il più possibile la prossima dimostrazione del nostro teorema, chiuderemo questo paragrafo indicando altri lemmi.

Ed implicitamente fisseremo anche qualche convenzione ulteriore sul simbolismo e sulle ipotesi di lavoro. Si tratta di convenzioni che avranno valore per tutto il seguito.

70. - L'asse delle ascisse, o, meglio, il suo sostegno, è una traiettoria sia nella t, sia nella w, sia nella ϑ.

Ebbene, sull'asse delle ascisse scegliamo il segmento α_0,

$$\alpha_0 = A_0 t(A_0)\,,$$

il segmento β_0,

$$\beta_0 = B_0 w(B_0)\,,$$

ed il segmento γ_0,

$$\gamma_0 = C_0 \vartheta(C_0)\,,$$

di traslazione, rispettivamente, per t, w e ϑ. E scegliamoli anzi in tal guisa, che siano soddisfatte le seguenti circostanze:

I segmenti α_0, β_0 e γ_0 sono elementari relativamente a K;

e:

Il segmento α_0 è contenuto in β_0, il segmento β_0 è contenuto nell'interno di γ_0.

La legittimità di queste ipotesi è sicura. Per esempio, basta identificare A_0 e B_0 col punto O, e scegliere C_0 opportunamente nell'interno di $t^{-1}(O)O$.

Indichiamo con h_0 la suddivisione simpliciale subordinata da K su α_0; con k_0 quella subordinata su β_0; con l_0 quella subordinata su γ_0. Allora nelle circostanze precedenti è implicito che:

Tutti i lati di h_0 compaiono fra i lati di k_0; e tutti i lati di k_0 compaiono fra i lati di l_0;

anzi tutti i lati di k_0 sono contenuti nel sottoarco essenziale di γ_0.

In quanto traiettoria generata da α_0 nella t, indichiamo poi il sostegno dell'asse x con π_0; in quanto traiettoria generata da β_0 nella w, indichiamolo con σ_0; ed in quanto traiettoria generata da γ_0 nella ϑ, indichiamolo con τ_0.

Uno, Π_0, dei due campi adiacenti a π_0 è costituito dai punti con l'ordinata positiva; e l'altro, Π'_0, da quelli con l'ordinata negativa.

Naturalmente Π_0 sarà indicato anche con Σ_0, in quanto campo adiacente a σ_0, e con T_0 in quanto campo adiacente a τ_0. Analogamente per Π'_0, che sarà indicato anche con Σ'_0, in quanto campo adiacente a σ_0, e con T'_0, in quanto campo adiacente a τ_0.

71. - Sia c una curva semplice ed aperta contenuta nel semipiano $\mathfrak{S}$. Uno, P, degli estremi di c appartenga ad α_0, e l'altro, Q, sia interno ad $\mathfrak{S}$, e quindi a $\Pi_0(=\Sigma_0 = T_0)$, al pari di tutti i punti di c diversi da P.

Ebbene, nel numero successivo noi proveremo che:

Se c è per di più libera nella t e nella w, essa è necessariamente libera anche nella ϑ;

e questo, a norma della prima proposizione del n° 7, ci darà senz'altro che:

Nelle ipotesi del teorema precedente, c è libera in tutte le potenze di t, di w e di ϑ diverse dall'identità;

ma nel n° 73 noi proveremo altresì che:

Nelle medesime ipotesi, c è libera in tutti i prodotti di t per le diverse potenze di ϑ;

vale a dire, che c è libera in tutte le immagini rettificate di t.

Indi basta risalire da $\mathfrak{S}$ ad $\mathfrak{E}$, perchè c dia luogo, in $\mathfrak{E}$, ad una curva semplice ed aperta, c, libera nella t, con un estremo su e, e con tutti gli altri punti interni ad $\mathfrak{E}$.

72. - Per concludere nel senso voluto dal primo lemma del n° 71, ammettiamo che c e $\vartheta(c)$ abbiano punti in comune; e facciamo vedere che una simile ipotesi conduce ad un assurdo.

Nelle condizioni attuali, i punti comuni a c e $\vartheta(c)$ sono diversi tanto da P, quanto da $\vartheta(P)$. Pertanto, nelle ipotesi attuali, e con riferimento a ϑ, la curva c contiene uno pseudoarco di traslazione, λ^*, con l'origine nel punto P.

Sia R il termine di λ^*. Il punto R o è interno a $\vartheta(\lambda^*)$ o è interno a $\vartheta^{-1}(\lambda^*)$, com'è ricordato nella seconda proposizione del n° 8. E le due circostanze si escludono a vicenda, com'è ricordato nella prima proposizione dello stesso numero.

Supponiamo che si presenti la prima circostanza. E indichiamo con ϱ quel sottoarco di λ^* che ha gli estremi in P e $\vartheta^{-1}(R)$. Indi poniamo

$$j = \lambda^* + P\vartheta(P) + \vartheta(\varrho) ;$$

e denotiamo con J il sottoinsieme chiuso e limitato del piano, delimitato dalla curva semplice e chiusa j.

Nella ϑ, il segmento $P\vartheta(P)$ è un altro arco di traslazione atto a generare la traiettoria τ_0. E tutti i punti di λ^* diversi da P

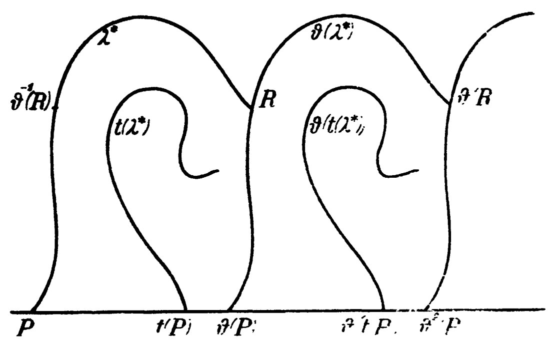

Fig. 12

sono interni a T_0. Epperò, giusta la terza e la quarta proposizione del n° 22, gli interni di J e $\vartheta(J)$ sono contenuti in T_0, cosa ovvia, nelle circostanze attuali, e sono disgiunti.

Consideriamo ora la curva $t(\lambda^*)$. Essa parte dal punto $t(P)$, che è interno al segmento $P\vartheta(P)$, attese le (14) e (15). Essa è contenuta in Π_0, a meno del punto $t(P)$. Essa non può incontrare λ^*, perchè λ^* è libera nella t, in quanto sottoarco di c, che è libera nella t. Essa non può incontrare $\vartheta(\lambda^*)$, che appartiene a $\vartheta(c)$, perchè essa appartiene a $t(c)$, e perchè $t(c)$ non può incontrare $\vartheta(c)$, atteso che c è libera nella $w(= t^{-1}\vartheta)$. Dunque la curva $t(\lambda^*)$

è contenuta nell'interno dell'insieme J, se si eccettua il punto $t(P)$. Indi $\vartheta(t(\lambda^*))$ è contenuta nell'interno dell'insieme $\vartheta(J)$, se si eccettua il punto $\vartheta(t(P))$, che è diverso da $t(P)$. Ma gli interni di J e $\vartheta(J)$ sono disgiunti. Dunque $t(\lambda^*)$ e $\vartheta(t(\lambda^*)$ non hanno punti in comune, cosa assurda, perchè $\vartheta(t(\lambda^*)) = t(\vartheta(\lambda^*))$, e perchè l'intersezione di λ^* e $\vartheta(\lambda^*)$ non è vuota.

Il ragionamento esposto permette di esaurire anche il caso che si presenti la seconda di quelle circostanze: anche il caso,

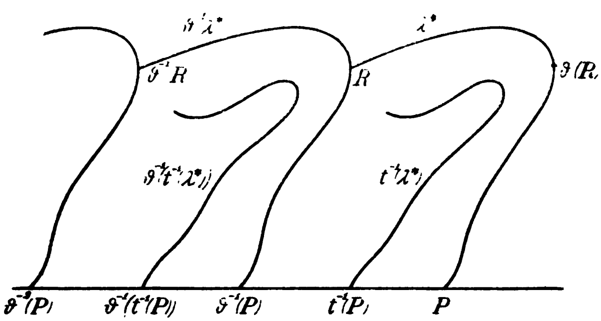

Fig. 13

cioè, che R sia interno a $\vartheta^{-1}(\lambda^*)$, o, se si preferisce, che $\vartheta(R)$ sia interno a λ^*. Ed attese le tante convenzioni fatte su t e su ϑ, è molto più sbrigativo riprendere il ragionamento esposto, anzichè andare a vedere se questo caso si può ricondurre al precedente scambiando gli uffici di t e t^{-1}, e di ϑ e ϑ^{-1}, epperò anche quelli di w e w^{-1}.

Allo scopo, indichiamo stavolta con ϱ il sottoarco individuato su λ^* da P e $\vartheta(R)$. Indi poniamo

$$j = \vartheta^{-1}(\varrho) + \vartheta^{-1}(P)P + \lambda^* ;$$

e denotiamo con J il sottoinsieme chiuso e limitato, racchiuso, nel piano ambiente, dalla curva semplice e chiusa j attuale.

Nella ϑ, il segmento $\vartheta^{-1}(P)P$ è un arco di traslazione, atto a generare la traiettoria τ_0. E tutti i punti di λ^*, diversi da P, sono interni a T_0. Quindi gli interni di J e $\vartheta^{-1}(J)$ sono disgiunti, ed appartengono a T_0, per motivi analoghi a quelli indicati nel caso precedente.

E consideriamo adesso la curva $t^{-1}(\lambda^*)$. Essa parte dal punto $t^{-1}(P)$, interno, a norma delle solite (14) e (15), al segmento $\vartheta^{-1}(P)P$. Essa è contenuta in Π_0, a meno del punto $t^{-1}(P)$. Essa non può incontrare λ^*, che appartiene a c, perchè c è libera nella t^{-1}. Essa non può incontrare $\vartheta^{-1}(\lambda^*)$, che appartiene a $\vartheta^{-1}(c)$, perchè essa appartiene a $t^{-1}(c)$, e perchè $t^{-1}(c)$ non incontra $\vartheta^{-1}(c)$, atteso che c è libera nella $w^{-1}(=\vartheta^{-1}t)$. Dunque la curva $t^{-1}(\lambda^*)$ è contenuta nell'interno di J, se si eccettua il punto $t^{-1}(P)$. Indi $\vartheta^{-1}(t^{-1}(\lambda^*))$ è contenuta nell'interno di $\vartheta^{-1}(J)$, se si eccettua il punto $\vartheta^{-1}(t^{-1}(P))$, che è diverso da $t^{-1}(P)$. Ma gli interni di J e $\vartheta^{-1}(J)$ sono disgiunti. Dunque $t^{-1}(\lambda^*)$ e $\vartheta^{-1}(t^{-1}(\lambda^*))$ non hanno punti in comune. Cosa assurda, perchè $\vartheta^{-1}(t^{-1}(\lambda^*))$ coincide con $t^{-1}(\vartheta^{-1}(\lambda^*))$, e perchè l'intersezione di λ^* e $\vartheta^{-1}(\lambda^*)$ non è vuota. Donde la conclusione desiderata, anche nel caso che si presenti quella seconda circostanza.

73. - Per quello che ha tratto al secondo lemma del n° 71, non vi è nulla da aggiungere a quello che si è già detto: per dimostrarlo basta rifarsi alla circostanza, ivi ricordata, che ogni curva semplice ed aperta, libera in una traslazione piana generalizzata, è libera anche in tutte le potenze della traslazione diverse dall'identità.

Epperò passiamo alla dimostrazione, tuttora in sospeso, dell'ultimo lemma di quel numero.

Ferme le notazioni precedenti, noi sappiamo ormai che c è libera in t, in w ed in ϑ; anzi che c è libera in t, in w ed in ϑ, nonchè in tutte le loro potenze diverse dall'identità.

Ed invece di dimostrare che c è libera nei prodotti di t per le potenze di ϑ, noi potremo dimostrare che:

Essa è libera nei prodotti di t^{-1} per le potenze di ϑ.

Ancora un'osservazione. Nelle condizioni attuali, $t(c)$ e $t(\vartheta(c))$ non hanno punti in comune, atteso che c e $\vartheta(c)$ non ne hanno. Ma $t(\vartheta(c))$ coincide con $\vartheta(t(c))$. Pertanto, nelle condizioni attuali $t(c)$ è libera nella ϑ; ed in quanto tale essa è libera anche in tutte le potenze di ϑ diverse dall'identità. In conclusione, nelle condizioni attuali le curve

$$(16) \qquad t(c)\,,\quad \vartheta(t(c))\,,\quad \vartheta^{-1}(t(c))\,,\quad \vartheta^{2}(t(c))\,,\quad \vartheta^{-2}(t(c))\,, \ldots$$

sono disgiunte a due a due; e la stessa circostanza si presenta anche per le curve

$$(17) \qquad t^{-1}(c),\ \vartheta(t^{-1}(c)),\ \vartheta^{-1}(t^{-1}(c)),\ \vartheta^{2}(t^{-1}(c)),\ \vartheta^{-2}(t^{-1}(c)), \ldots,$$

come si riconosce con lo stesso ragionamento utilizzato per le curve (16), applicandolo a $t^{-1}(c)$ e $t^{-1}(\vartheta(c))$.

Ciò premesso, consideriamo il caso della curva c e delle sue immagini nelle trasformazioni ϑt^{-1}, $\vartheta^{2}t^{-1}$, $\vartheta^{3}t^{-1}$, ecc., ecc., riserbandoci di esaminare dopo quello della curva c e delle sue immagini nelle trasformazioni $\vartheta^{-1}t^{-1}$, $\vartheta^{-2}t^{-1}$, $\vartheta^{-3}t^{-1}$, ecc., ecc.

La curva c è libera nella w, cioè nella ϑt^{-1}; e ϑ è una traslazione piana ordinaria. Pertanto, o c è libera anche in $\vartheta^{2}t^{-1}$, $\vartheta^{3}t^{-1}$, $\vartheta^{4}t^{-1}$, ...; ovvero si può determinare il numero r, intero e maggiore di 1, in tal guisa, che c incontri la propria immagine nella $\vartheta^{r}t^{-1}$ e sia libera nelle $\vartheta^{r+1}t^{-1}$, $\vartheta^{r+2}t^{-1}$, $\vartheta^{r+3}t^{-1}$, ...

Nel primo sottocaso non vi è nulla da dire. Nel secondo, indichiamo stavolta con R il primo punto dell'insieme $\vartheta^{2}(t^{-1}(c)) + \ldots + \vartheta^{r}(t^{-1}(c))$ incontrato da chi percorra c a partire da P verso Q; e con $\varkappa$ il sottoarco individuato da P ed R su c.

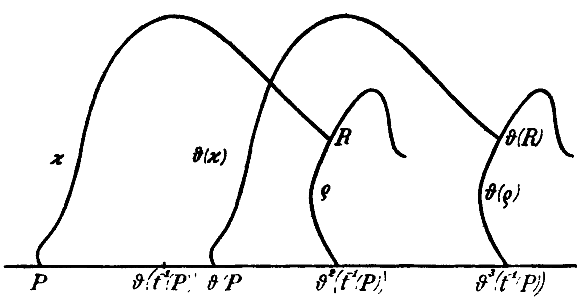

Fig. 14

Poichè le curve (17) sono disgiunte a due a due, il punto R appartiene ad una ed una sola delle curve $\vartheta^{2}(t^{-1}(c)), \ldots, \vartheta^{r}(t^{-1}(c))$.

E sia questa $\vartheta^s(t^{-1}(c))$, di guisa che il numero intero s è maggiore di 1, e l'arco $\varkappa$ non incontra nessuna delle curve $\vartheta^m(t^{-1}(c))$, se il numero intero e positivo m è diverso da s. Nella figura, $s = 2$.

E stavolta indichiamo con ϱ il sottoarco individuato su $\vartheta^s(t^{-1}(c))$ dai punti $\vartheta^s(t^{-1}(P))$ ed R.

La curva semplice ed aperta $\varkappa + \varrho$ è contenuta nell'insieme T_0, a meno degli estremi, P e $\vartheta^s(t^{-1}(P))$, che appartengono a τ_0. Inoltre il punto $\vartheta(P)$ è interno al segmento con gli estremi in P e $\vartheta^s(t^{-1}(P))$, perchè s è maggiore di 1 e l'ascissa di $\vartheta(t^{-1}(P))$ è maggiore di quella di P, attesa la solita (15). Indi la curva $\varkappa + \varrho$ incontra la propria immagine nella ϑ [29]).

Ora questo è assurdo. Nel fatto, le curve $\varkappa$ e $\vartheta(\varkappa)$ non si possono incontrare, perchè c è libera nella ϑ. Le curve ϱ e $\vartheta(\varrho)$ non si possono incontrare, perchè le curve $\vartheta^s(t^{-1}(c))$ e $\vartheta^{s+1}(t^{-1}(c))$ sono disgiunte, come si è già osservato. Le curve $\varkappa$ e $\vartheta(\varrho)$ non si possono incontrare, perchè $\varkappa$ non incontra nessuna delle curve $\vartheta^m(t^{-1}(c))$, se il numero intero e positivo m è diverso da s. E per lo stesso motivo, la curva ϱ non può incontrare $\vartheta(\varkappa)$. Donde la prima parte della conclusione, nel senso che c è libera in ϑt^{-1}, $\vartheta^2 t^{-1}$, $\vartheta^3 t^{-1}$, ...

Per quello che ha tratto alla seconda parte della dimostra-

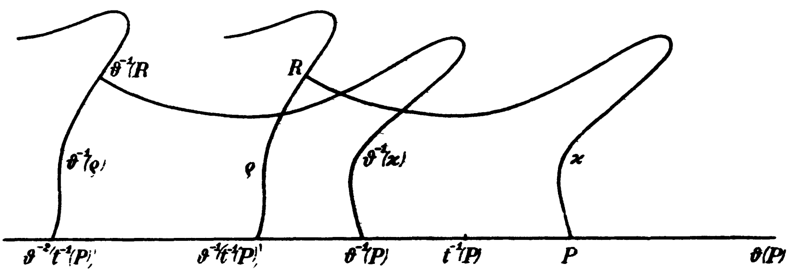

Fig. 15

zione, se c è libera in $\vartheta^{-1}t^{-1}$, $\vartheta^{-2}t^{-1}$, $\vartheta^{-3}t^{-1}$, ... non vi è nulla da dire.

---

[29]) Nelle condizioni attuali la cosa è immediata. E non vi è nessun bisogno di ricorrere al lemma fondamentale sulle traiettorie, sebbene si tratti proprio di questo lemma in un caso particolare.

Nel caso contrario, si determini il numero intero negativo s e si scelga il punto R su c in tal guisa, che il sottoarco $\varkappa$ individuato su c da P ed R abbia in comune R, e soltanto R, con la curva $\vartheta^s(t^{-1}(c))$ e non incontri nessuna delle curve $\vartheta^m(t^{-1}(c))$, se il numero intero e negativo m è diverso da s; tutto questo si può fare certamente, perchè le curve (17) sono disgiunte a due a due e perchè ϑ è una traslazione piana ordinaria. E si indichi con ϱ il sottoarco individuato su $\vartheta^s(t^{-1}(c))$ dai punti $\vartheta^s(t^{-1}(P))$ ed R. Nella figura, $s = -1$.

La curva semplice ed aperta $\varkappa + \varrho$ è contenuta nell'insieme T_0, a meno degli estremi, $\vartheta^s(t^{-1}(P))$ e P, che appartengono a τ_0. L'ascissa del punto $\vartheta^s(t^{-1}(P))$ è minore di quella di $\vartheta^{-1}(P)$, perchè il numero intero s è negativo e perchè l'ascissa di $t^{-1}(P)$ è minore di quella di P, per la solita (14). Inoltre l'ascissa di $\vartheta^{-1}(P)$ è ovviamente minore di quella di P. Indi il punto $\vartheta^{-1}(P)$ è interno al segmento con gli estremi in $\vartheta^s(t^{-1}(P))$ e P. Epperò la curva semplice ed aperta $\varkappa + \varrho$ incontra la propria immagine nella ϑ^{-1}. E questo è assurdo. Infatti, $\varkappa$ e ϱ sono ovviamente libere nella ϑ^{-1}. Inoltre $\varkappa$ non può incontrare $\vartheta^{-1}(\varrho)$, per il modo come è stato scelto R su c. E ϱ non può incontrare $\vartheta^{-1}(\varkappa)$; chè altrimenti $\varkappa$ incontrerebbe $\vartheta(\varrho)$, cosa impossibile, quando $s < -1$, per il modo come è stato scelto R su c, cosa impossibile, quando $s = -1$, perchè c è libera nella t^{-1}.

74. - I lemmi del n° 71 rimangono inalterati, nelle conclusioni, anche se sulla curva semplice ed aperta c si fanno ipotesi meno restrittive. Precisamente:

Fermo il resto, quei lemmi rimangono inalterati, anche se l'ipotesi che i punti di c diversi da P siano interni al semipiano $\mathfrak{S}$ viene sostituita da quella che essi appartengano al semipiano $\mathfrak{S}$, il punto P restando sempre sull'asse delle ascisse.

Nel fatto, le definizioni di t, w e ϑ all'esterno di $\mathfrak{S}$ implicano che nel semipiano dei punti con l'ordinata maggiore di -1, oppure uguale a -1, le trasformazioni t, w e ϑ si trovano nelle stesse condizioni in cui esse si trovavano nel semipiano $\mathfrak{S}$. Naturalmente la (14) e la (15) saranno rispettivamente sostituite dalla $f(x, -1) > x$ e dalla $f(x, -1) < x + 1$; ed al posto della traiettoria fornita dal sostegno dell'asse delle ascisse si dovrà considerare quella fornita dall'orizzontale dei punti con l'ordinata uguale all'unità negativa; ma non si tratta di differenze concettuali.

Se a c aggreghiamo il segmento con un estremo in P e l'altro nel punto $\overline{P}$ che ha la stessa ascissa di P e l'ordinata uguale a -1, e se diciamo $\overline{c}$ la curva semplice ed aperta ottenuta, $\overline{c}$ è libera rispetto a t e w ed ha soltanto $\overline{P}$ sull'orizzontale dei punti con l'ordinata uguale a -1. Indi $\overline{c}$ è libera in t, in w, in ϑ, in tutte le loro potenze diverse dall'identità ed in tutti i prodotti di t per le potenze di ϑ. Donde appunto la conclusione.

La quale ci dice che anche adesso basta risalire da $\mathfrak{S}$ ad $\mathfrak{E}$, perchè c dia luogo, in $\mathfrak{E}$, ad una curva semplice ed aperta, con un estremo su $\mathfrak{e}$, libera nella $\mathfrak{t}$.

75. - I risultati raggiunti si prestano a delle estensioni immediate, nel senso che essi si trasportano subito dalle curve semplici ed aperte alle semilinee semplici aperte e proprie.

Precisamente, sia p una semilinea semplice aperta propria; l'origine P di p appartenga all'asse delle ascisse; e tutti gli altri punti di p appartengano al semipiano $\mathfrak{S}$. Ebbene:

Se p è per di più libera nella t e nella w, essa è libera anche nella ϑ, nonchè in tutte le potenze di t, di w e di ϑ diverse dall'identità; inoltre:

Nelle ipotesi del teorema precedente, p è libera anche in tutti i prodotti di t per le diverse potenze di ϑ;

sicchè basta risalire da $\mathfrak{S}$ ad $\mathfrak{E}$, perchè p dia luogo, in $\mathfrak{E}$, ad una linea semplice ed aperta, libera nella $\mathfrak{t}$, con l'origine su $\mathfrak{e}$, e con tutti gli altri punti in $\mathfrak{E}$.

Per quello che ha tratto alle dimostrazioni, basta applicare i risultati del n° 74 alle curve semplici ed aperte, che appartengono a p e che hanno uno degli estremi nell'origine di p.

Se alle condizioni precedenti si aggiunge quella, che percorrendo p a partire dall'origine si abbandoni definitivamente $\mathfrak{S}_m$, comunque sia stato prefissato il numero naturale m, si può dire qualcosa di più. Precisamente, allora basta risalire da $\mathfrak{S}$ ad $\mathfrak{E}$, per ottenere, in $\mathfrak{E}$, una semilinea semplice aperta e propria, libera nella $\mathfrak{t}$, con l'origine su $\mathfrak{e}$, e con tutti gli altri punti in $\mathfrak{E}$.

Ancora un'osservazione, notissima, ma che ci sarà utile aver ricordato. Consideriamo nel semipiano $\mathfrak{S}$ una linea semplice, aperta, propria e *periodica* nella x con periodo unitario (cioè applicata su se stessa dalla ϑ). Allora è ovvio che basta risalire da $\mathfrak{S}$ ad $\mathfrak{C}$, perchè la linea dia luogo, in $\mathfrak{C}$, ad una curva semplice e chiusa, che aggira il centro di c.

§ 9. Incomincia la dimostrazione del teorema.

76. - Manteniamo, ora e nel seguito, le ipotesi e le notazioni introdotte negli ultimi due paragrafi.

Il complesso K ammette facce eccezionali per α_0 e Π_0, rispetto a t.

E le facce di K, eccezionali, rispetto a t, per α_0 e Π_0, sono ovviamente eccezionali anche per β_0 e Σ_0, rispetto a w.

Ammettendo facce che sono eccezionali tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w, il complesso K ammette anche catene che sono eccezionali tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w.

A proposito di catene siffatte, e delle loro lunghezze, i casi possibili sono due. E precisamente, o:

L'insieme delle loro lunghezze è illimitato:

ovvero:

L'insieme delle loro lunghezze è limitato,

nel qual caso esso ammette anche un massimo, atteso che si tratta di un insieme di numeri naturali.

77. - Ammettiamo dunque, fino ad avviso contrario, che l'insieme di quelle lunghezze sia illimitato. Ed incominciamo col mostrare che:

Nelle ipotesi attuali, il complesso K ammette anche successioni che risultino eccezionali tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w.

Nelle ipotesi attuali, infatti, fra i lati di h_0 almeno uno appartiene ad infinite catene che siano eccezionali tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w. Fra questi lati siffatti, sia ω_0 il primo, a partire da A_0. E sia δ_1 la faccia adiacente ad α_0 lungo ω_0 e rivolta verso Π_0, di guisa che δ_1 è eccezionale tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w.

Indichiamo con α_1 (con β_1) l'arco elementare di traslazione che si ottiene per t (per w) aggiungendo δ_1 ad α_0 (a β_0); con π_1 (con σ_1) la traiettoria generata da α_1 nella t (da β_1 nella w); con Π_1 (con Σ_1) il campo adiacente a π_1 (a σ_1) e privo, giusta la terza proposizione del n° 36, di punti interni a δ_1; con h_1 (con k_1) la suddivisione simpliciale subordinata da K su α_1 (su β_1).

Atteso il significato di δ_1, almeno uno dei lati di h_1 appartiene ad infinite catene che siano eccezionali tanto per α_1 e Π_1, rispetto a t, quanto per β_1 e Σ_1, rispetto a w. Fra questi lati siffatti, sia ω_1 il primo, a partire da A_0. E sia δ_2 la faccia adiacente ad α_1 lungo ω_1 e rivolta verso Π_1, di guisa che δ_1 è diversa da δ_2, a norma dell'ultima proposizione del n° 44, e la catena (δ_1, δ_2) è eccezionale tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w [30]), come segue dalle ipotesi e dal teorema del n° 45.

Indichiamo con α_2 (con β_2) l'arco elementare di traslazione che si ottiene per t (per w) aggiungendo δ_2 ad α_1 (a β_1); con π_2 (con σ_2) la traiettoria generata da α_2 nella t (da β_2 nella w); con Π_2 (con Σ_2) il campo adiacente a π_2 (a σ_2) e privo di punti interni a δ_2; con h_2 (con k_2) la suddivisione simpliciale subordinata da K su α_2 (su β_2).

Atteso il significato di δ_1 e δ_2, almeno uno dei lati di h_2 appartiene ad infinite catene che siano eccezionali tanto per α_2 e Π_2, rispetto a t, quanto per β_2 e Σ_2, rispetto a w. Fra questi lati siffatti, sia ω_2 il primo, a partire da A_0. E sia δ_3 la faccia adiacente ad α_2 lungo ω_2, e rivolta verso Π_2, di guisa che δ_1, δ_2 e δ_3 sono distinte a due a due, a norma dell'ultima proposizione del n° 44, e la catena $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ è eccezionale tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w (n° 45).

---

[30]) I teoremi che saranno dimostrati nei n[i] 80 ed 81 illuminerebbero maggiormente la situazione attuale, ma non sarebbero essenziali per la deduzione.

Indichiamo con α_3 (con β_3) l'arco elementare di traslazione che si ottiene per t (per w) aggiungendo, ecc., ecc.

E basta proseguire indefinitamente nella costruzione descritta, per giungere appunto ad una successione di facce di K, diciamola Δ,

$$\Delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots)\,, \tag{18}$$

eccezionale tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w.

78. - La successione (18), in quanto eccezionale per α_0 e Π_0, rispetto a t (nonchè per β_0 e Σ_0, rispetto a w), ammette, a norma di quanto si è detto nel n° 47, delle componenti connesse in senso forte costituite da infinite facce. E se

$$\delta_{m_1},\ \delta_{m_2},\ \delta_{m_3},\ \dots \qquad (m_1 < m_2 < m_3 < \dots) \tag{19}$$

sono le infinite facce di una tal componente, dalla successione (19) si può estrarre una tal sottosuccessione

$$\delta_{n_1},\ \delta_{n_2},\ \delta_{n_3},\ \dots \qquad (n_1 < n_2 < n_3 < \dots), \tag{20}$$

che il primo dei triangoli (20) abbia un lato comune col secondo, il secondo col terzo, il terzo col quarto, e così via; e che il primo abbia per di più un lato su α_0 (e quindi su β_0); la cosa si riconosce ragionando sulla (19) come nel n° 51 si è ragionato sulla (3).

Sia ora U_{n_1} il baricentro del lato (o di un lato) comune ad α_0 e δ_{n_1}; e V_{n_1} quello di δ_{n_1}; U_{n_2} quello del lato comune a δ_{n_1} e δ_{n_2}; e V_{n_2} quello di δ_{n_2}; e così via.

E si denoti con p la semilinea $U_{n_1}V_{n_1} + V_{n_1}U_{n_2} + U_{n_2}V_{n_2} + \dots$, di guisa che, in armonia con quanto si è osservato alla fine del n° 51, la semilinea p è semplice, aperta, propria, e libera sia nella t sia nella w.

La semilinea p appartiene per di più ad $\mathfrak{S}$, e la sua origine è sita sull'asse delle ascisse. Pertanto essa è libera anche nella ϑ, nonchè in tutte le potenze di t, di w e di ϑ ed in tutti i prodotti di t per le potenze di ϑ. E basta passare da $\mathfrak{S}$ ad $\mathfrak{C}$, perchè p dia luogo, in $\mathfrak{E}$, ad una semilinea semplice ed aperta, $\mathfrak{p}$, libera nella $\mathfrak{t}$ (e con un punto solo su $\mathfrak{e}$). Tutto ciò in armonia con quanto si è detto nel n° 75.

Noi ora mostreremo che $\mathfrak{p}$ è propria, facendo vedere appunto che quando si percorre p a partire dalla sua origine, si abbandona definitivamente $\mathfrak{S}_m$, comunque sia stato prefissato il numero naturale m.

Nel fatto, se così non fosse, $\mathfrak{S}_m$ conterrebbe infiniti dei triangoli (20). Epperò il complesso internamente connesso dei triangoli (20) avrebbe delle facce in comune con la propria immagine nella ϑ (n° 68). E p, passando per tutti i baricentri dei triangoli (20), non potrebbe essere libera nella ϑ.

E nel primo caso, nel caso cioè che l'estremo superiore delle lunghezze di quelle tali poligonali sia infinito, i nostri teoremi sono dimostrati.

§ 10. Si compie la dimostrazione del teorema.

79. - Ferme le solite ipotesi e le solite notazioni, resta da considerare il caso che le lunghezze delle catene di K, eccezionali tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w, descrivano un insieme numerico limitato.

Ed a questo proposito, noi ora fisseremo qualche altra convenzione, che sarà mantenuta in tutto il seguito.

Precisamente, ora e nel seguito, la n-pla ordinata Δ_n di facce $\delta_1, \dots, \delta_n$ del solito complesso K,

$$\Delta_n = (\delta_1, \dots, \delta_n)\,, \tag{21}$$

sarà sempre una catena eccezionale tanto per α_0 e Π_0, rispetto a t, quanto per β_0 e Σ_0, rispetto a w, e massima nella sua lunghezza.

Dopo di ciò, α_1 indicherà quell'arco di traslazione di t, che si ottiene aggiungendo δ_1 ad α_0; π_1 sarà la traiettoria generata da α_1 nella t; Π_1 indicherà quel campo adiacente a π_1, che a norma della terza proposizione del n° 36 non contiene nessun punto di δ_1, e Π_1' l'altro campo adiacente a π_1. Indi α_2 sarà quell'arco di traslazione di t, che si ottiene aggiungendo δ_2 ad α_1; π_2 indicherà la traiettoria generata da α_2 nella t; Π_2 sarà quel campo adiacente a π_2, che a norma della stessa terza proposizione del n° 36 non contiene nessun punto di δ_2, e Π_2' l'altro campo adiacente a π_2. E così via, fino ad α_n, che indicherà quell'arco di traslazione di t, che si ottiene aggiungendo δ_n ad α_{n-1}; fino a π_n, che sarà la traiettoria generata da α_n nella t; e fino a Π_n, che indicherà il campo adiacente a π_n privo di punti in comune con δ_n, ed a Π_n', che sarà l'altro campo adiacente a π_n.

Allo stesso modo, β_1 indicherà quell'arco di traslazione di w, che si ottiene aggiungendo δ_1 a β_0; σ_1 sarà la traiettoria generata da β_1 nella w; Σ_1 indicherà quel campo adiacente a σ_1, che non contiene nessun punto di δ_1, e Σ_1' l'altro campo adiacente a σ_1. E naturalmente β_2 sarà quell'arco di traslazione di w, che si ottiene aggiungendo δ_2 a β_1; σ_2 indicherà la traiettoria generata da β_2 nella w; Σ_2 sarà quel campo adiacente a σ_2, che non contiene nessun punto di δ_2, e Σ_2' l'altro campo adiacente a σ_2. E così via, fino a β_n, σ_n, Σ_n e Σ_n', il cui significato ormai è ovvio.

E ancora: $h_1, h_2, \ldots, h_n$ rappresenteranno le suddivisioni simpliciali rispettivamente subordinate da K su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, così come h_0 rappresentava e rappresenterà quella subordinata su α_0; e $k_1, k_2, \ldots, k_n$ quelle rispettivamente subordinate da K su $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, così come k_0 rappresentava e rappresenterà quella subordinata su β_0.

80. - Ferme le notazioni introdotte, e ricordato che a norma del secondo teorema del n° 42:

Tutte le poligonali $h_0, h_1, \ldots h_n$ sono contenute in $\Pi_0 + \pi_0$, cioè in $\mathfrak{S}$,

passiamo a stabilire due lemmi di notevole importanza per gli scopi attuali. Precisamente passiamo a dimostrare che:

Nelle ipotesi poste, i lati della spezzata h_r $(r = 0, 1, \ldots, n)$ sono lati anche per la spezzata k_r,

cioè che α_r appartiene a β_r; ed a dimostrare che:

Nelle stesse ipotesi, quegli eventuali lati di k_r $(r = 0, 1, \ldots, n)$ che non compaiono fra i lati di h_r, appartengono ai segmenti B_0A_0 e $t(A_0)w(B_0)$;

di guisa che β_r si ottiene aggregando questi segmenti ad α_r; coincide con α_r, se, e soltanto se, questi segmenti degenerano entrambi: ed appartiene a $\beta_0 + \alpha_r$.

Se $r = 0$, i nostri lemmi sono soddisfatti per costruzione (nº 70); sicchè possiamo dimostrarli induttivamente.

Ammettiamo dunque che le circostanze indicate nei lemmi si presentino per α_r, β_r, h_r e k_r, r essendo qui un intero positivo o nullo, minore di n; e facciamo vedere che allora esse si presentano anche per α_{r+1}, β_{r+1}, h_{r+1} e k_{r+1}.

Nel fatto, δ_{r+1} appartiene alla somma di Π_0 e del sottoarco essenziale di α_0 (nº 43); il sottoarco essenziale di α_0 è contenuto nell'interno di α_0; ed i segmenti B_0A_0 e $t(A_0)w(B_0)$ non hanno punti interni ad α_0; indi l'intersezione di δ_{r+1} ed h_r coincide con quella di δ_{r+1} e k_r, attesa l'ipotesi induttiva. L'ipotesi induttiva e le circostanze ricordate nelle ultime righe del nº 35 assicurano allora che la poligonale soppressa nell'aggiunzione di δ_{r+1} ad α_r coincide con quella soppressa nell'aggiunzione di δ_{r+1} a β_r, e che una circostanza analoga si presenta anche per le poligonali aggiunte. E di qui è facile concludere nel senso voluto, attesa l'ipotesi induttiva.

81. - Sia ora ω un lato di h_n, epperò anche di k_n. E siano δ e δ^* le due facce di K adiacenti ad α_n lungo ω. Esse sono adiacenti anche a β_n, lungo ω. Ebbene, noi proveremo che:

Quella rivolta verso Π_n, lungo ω, è rivolta anche verso Σ_n, lungo ω.

Si ponga, per esempio, che δ sia quella rivolta verso Π_n, lungo ω, l'ipotesi implicando soltanto una scelta opportuna nei simboli.

In quanto rivolta verso Π_n, lungo ω, la faccia δ contiene nell'interno punti di Π_n, epperò di Π_0, che contiene Π_n (nº 42, prima proposizione).

Se ω appartiene per di più ad h_0, la circostanza posta in luce implica che l'interno di δ appartiene a Π_0. Indi δ^* ha l'interno in Π_0', epperò in $\Sigma_0'(=\Pi_0')$, e quindi in Σ_n', che contiene Σ_0' (nº 42, prima proposizione). Pertanto δ^* è rivolta verso Σ_n' lungo ogni lato in comune con k_n. Quindi δ è rivolta verso Σ_n, lungo ω.

Se ω non appartiene ad h_0, scegliamo il numero intero r, positivo o nullo, e minore di n, in guisa che ω non appartenga ad h_r, ma appartenga ad h_{r+1}. Allora ω è un lato di δ_{r+1} (n° 41. terza proposizione). Inoltre δ è diversa da δ_{r+1}, atteso che l'interno di δ_{r+1} è contenuto in Π'_{r+1} (n° 43), epperò in Π'_n (n° 42, prima proposizione), e che δ è rivolta verso Π_n, lungo ω. Ma l'interno di δ_{r+1} è contenuto in Σ'_{r+1} (n° 43), epperò in Σ'_n (n° 42, prima proposizione). E la conclusione ormai è facile.

82. - A questo punto è facile stabilire un altro risultato di notevole importanza per gli sviluppi successivi; precisamente, è facile stabilire che:

Nelle ipotesi attuali, nessun lato di h_n, eccezionale per α_n, Π_n e t, può essere eccezionale per β_n, Σ_n e w.

Sia infatti ω un tal lato eccezionale di h_n. E sia δ la faccia di K adiacente ad α_n lungo ω e rivolta verso Π_n lungo ω. Allora δ è eccezionale per α_n, Π_n e t. Inoltre, in quanto faccia adiacente a β_n lungo ω (che è anche un lato di k_n), essa è rivolta verso Σ_n, giusta la proposizione del numero precedente. Sicchè, se essa fosse eccezionale anche per β_n, Σ_n e w, la catena $(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n, \delta)$ sarebbe eccezionale tanto per α_0, Π_0 e t, quanto per β_0, Σ_0 e w. ed avrebbe come lunghezza $n + 1$. Cosa assurda, atteso il significato attuale del numero n. Donde la conclusione.

Dopo di ciò, per avere che:

I lati di h_n strettamente eccezionali per α_n, Π_n e t, o risultano tutti di prima categoria, in quanto lati di k_n, o risultano tutti di seconda categoria, per β_n, Σ_n e w,

basta ricordare che la categoria può cambiare soltanto passando attraverso lati eccezionali (n° 31, seconda proposizione).

83. - Supponiamo dunque che tutti i lati di h_n strettamente eccezionali per α_n, Π_n e t, siano della prima categoria, in quanto lati di k_n, e con riferimento a β_n, Σ_n e w.

In questo caso indichiamo con ω'_{n+1} l'ultimo dei lati di h_n strettamente eccezionali per α_n, Π_n e t; e con ω'' il primo di quelli di seconda categoria; di guisa che ω'_{n+1} precede ω'' su h_n ed ha in comune con ω'' un estremo (e soltanto un estremo), diciamolo

S'. Indichiamo poi, con δ'_{n+1} la faccia di K adiacente ad α_n, lungo ω'_{n+1}, e rivolta verso Π_n, lungo ω'_{n+1}; e con δ'' quella adiacente ad α_n, lungo ω'', e rivolta verso Π_n, lungo ω''.

Allora δ'_{n+1} e δ'' appartengono ad una medesima stella di K, quella col centro nel punto S'. Inoltre δ'_{n+1} contiene almeno un punto di $w^{-1}(\beta_n)$; e δ'' contiene almeno un punto di $t(\alpha_n)$.

Ebbene, indichiamo con Q_n un punto comune a δ'_{n+1} e $w^{-1}(\beta_n)$; e con R_n un punto comune a δ'' e $t(\alpha_n)$.

E mostriamo il punto Q_n è interno a $w^{-1}(\alpha_n)$; o, se si preferisce, che il punto $w(Q_n)$ è interno ad α_n.

Nel fatto, δ'_{n+1} è contenuta (n° 43) nella somma di Π_0 e del sottoarco essenziale di α_0, perchè la catena $(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n, \delta'_{n+1})$ è eccezionale per α_0, Π_0 e t. Indi Q_n, in quanto punto comune a $w^{-1}(\beta_n)$ e δ'_{n+1}, o è un punto comune a $w^{-1}(\beta_n)$ ed a Π_0, o è un punto comune a $w^{-1}(\beta_n)$ ed al sottoarco essenziale di α_0. Nel primo caso, $w(Q_n)$ è un punto comune a β_n e $\Pi_0(=\Sigma_0)$. E questo ci assicura appunto che allora $w(Q_n)$ è interno ad α_n, perchè β_n coincide con $B_0A_0 + \alpha_n + t(A_0)w(B_0)$, attesa la terza proposizione del n° 80, e perchè i segmenti B_0A_0 e $t(A_0)w(B_0)$ appartengono a π_0 (mentre α_n ha gli estremi in A_0 e $t(A_0)$). Nel secondo caso, $w(Q_n)$ sarebbe un punto comune a β_n ed all'immagine, nella w, del sottoarco essenziale di α_0. E questo ci assicura che il secondo caso non si può presentare, perchè quei punti di β_n che non appartengono a $\Pi_0(=\Sigma_0)$ appartengono a β_0, giusta la terza proposizione del n° 42; perchè β_0 e $w(\beta_0)$ hanno in comune soltanto l'estremo $w(B_0)$; e, finalmente, perchè l'immagine, nella w, del sottoarco essenziale di α_0 è contenuta nell'interno di $w(\beta_0)$, così come il sottoarco essenziale di α_0 è contenuto nell'interno di α_0, epperò nell'interno di β_0.

I punti Q_n ed R_n appartengono alla stella di K col centro in S'. Pertanto basta supporre che l'estremo superiore, ι, dei diametri delle stelle di K fosse minore di 1, per essere sicuri che i punti Q_n e $\vartheta^{-1}(R_n)$ sono distinti.

I punti Q_n e $\vartheta^{-1}(R_n)$ appartengono entrambi a $w^{-1}(\alpha_n)$. Sicchè, supposto $\iota < 1$, essi individuano, su $w^{-1}(\alpha_n)$, una curva semplice ed aperta, diciamola c^*.

Il punto Q_n è interno a $w^{-1}(\alpha_n)$. Poniamo indi $P_n = w^{-1}(A_0)$, ovvero $P_n = w^{-1}(t(A_0))$, secondo che $\vartheta^{-1}(R_n)$ appartiene al sottoarco individuato su α_n da $w^{-1}(A_0)$ e Q_n, ovvero a quello individuato da Q_n e $w^{-1}(t(A_0))$.

Allora $\vartheta^{-1}(R_n)$ appartiene al sottoarco, c_n, individuato su $w^{-1}(\alpha_n)$ da P_n e Q_n. E basta applicare a $w(c_n)$ la proposizione del n° 74 (cioè i lemmi del n° 71, nelle condizioni più ampie del n° 74), per concludere che c^* è libera in tutte le potenze di t e di ϑ diverse dall'identità, nonchè in tutti i prodotti di t per potenze di ϑ.

Entrambi gli estremi del segmento Q_nR_n, degenere o non, appartengono alla stella di K col centro in S'. Pertanto anche il segmento Q_nR_n è libero in tutte le potenze di t e di ϑ diverse dall'identità, nonchè in tutti i prodotti di t per potenze di ϑ.

Spostiamoci sul segmento Q_nR_n, partendo da Q_n, fino ad incontrare il primo punto, R'_n, comune al segmento ed alla curva $\vartheta(c^*)$, e senza escludere che R'_n possa coincidere con Q_n. Indi torniamo indietro, sul segmento R'_nQ_n, fino ad incontrare il primo punto, Q'_n, comune ad R'_nQ_n e c^*, e senza escludere che Q'_n possa coincidere con R'_n.

La distanza fra i punti Q'_n ed R'_n è minore di ι, epperò di 1. Quindi Q'_n e $\vartheta^{-1}(R'_n)$ sono distinti. E individuano su c^* una curva semplice ed aperta, c'_n, che è libera in tutte le potenze di t e di ϑ diverse dall'identità, nonchè in tutti i prodotti di t per potenze di ϑ.

Ed anche il segmento, degenere o non, $Q'R'_n$, diciamolo c''_n, è libero in tutte le potenze di t e di ϑ diverse dall'identità, nonchè in tutti i prodotti di t per potenze di ϑ.

La curva semplice ed aperta $c'_n + c''_n$ è un arco di traslazione nella ϑ. Si consideri infatti la striscia, eventualmente degenere, riempita dalle orizzontali passanti per i punti di c'_n (e per quelli delle immagini di c'_n nelle diverse potenze di ϑ). In questa striscia, c'_n separa ovviamente $\vartheta^{-1}(c'_n)$ da $\vartheta(c'_n)$; epperò separa $\vartheta^{-1}(c'_n)$ anche dal segmento $Q'_nR'_n$. Donde la conclusione, ormai facile.

La traiettoria generata da $c'_n + c''_n$ nella ϑ è una linea semplice, aperta, propria, periodica nella x, con periodo unitario.

Se si risale da $\mathfrak{S}$ ad $\mathfrak{C}$, e se c'_n non degenera, le curve c'_n e c''_n dànno luogo a due curve semplici ed aperte, c'_n e c''_n, contenute in $\mathfrak{C}$ e libere nella t. La curva $\mathrm{c}'_n + \mathrm{c}''_n$ è semplice e chiusa, ed aggira il centro di e. Inoltre la lunghezza di c''_n era minore di ι;

sicchè basta supporre che il numero reale positivo ι fosse abbastanza piccolo, per essere sicuri che c'_n aggira il centro di e a meno del numero reale positivo ε prefissato. Che se poi c''_n degenera, la curva c'_n è semplice e chiusa, è libera nella t ed aggira il centro di e; ed i nostri teoremi sono validi a più forte ragione.

84. - Rimane da considerare l'altro caso, quello che tutti i lati di h_n, strettamente eccezionali per α_n, Π_n e t, siano della seconda categoria, in quanto lati di k_n, e con riferimento a β_n, Σ_n e w.

In questo caso, indichiamo con ω' l'ultimo lato di h_n della prima categoria per α_n, Π_n e t; e con ω''_{n+1} il primo lato strettamente eccezionale per α_n, Π_n e t; di guisa che ω' precede ω''_{n+1} su h_n, ed ha in comune con ω''_{n+1} un estremo, e soltanto un estremo, diciamolo S''. Indichiamo con δ' la faccia adiacente ad α_n, lungo ω', e rivolta verso Π_n, lungo ω'; e con δ''_{n+1} quella adiacente ad α_n, lungo ω''_{n+1}, e rivolta verso Π_n, lungo ω''_{n+1}.

Allora δ' e δ''_{n+1} appartengono ad una medesima stella di K, quella col centro in S''. Inoltre δ' contiene almeno un punto, R_n, di $t^{-1}(\alpha_n)$; e δ''_{n+1} contiene almeno un punto, Q_n, di $w(\beta_n)$.

Il punto Q_n è interno a $w(\alpha_n)$. Infatti δ''_{n+1} è contenuta nella somma di Π_0 e del sottoarco essenziale di α_0, come si riconosce con ragionamenti analoghi a quelli svolti nel caso precedente a proposito di una circostanza analoga. E di qui si trae appunto, sempre in maniera analoga, che un punto comune a δ''_{n+1} e $w(\beta_n)$, cioè a δ''_{n+1} e $w(B_0)w(A_0) + w(\alpha_n) + \vartheta(A_0)w^2(B_0)$, è necessariamente interno a $w(\alpha_n)$.

Dopo di ciò si riconosce che la lunghezza del segmento Q_nR_n non supera l'estremo superiore, ι, dei diametri delle stelle di K; epperò, che i punti Q_n e $\vartheta(R_n)$ sono distinti, se $\iota < 1$. E l'analogia dei ragionamenti attuali con quelli del caso precedente si può spingere fino alla conclusione, considerando, su $w(\alpha_n)$, le analoghe delle curve c_n e c^* del caso precedente. E la dimostrazione dei nostri teoremi è terminata.