

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCA BUSULINI

Sopra una geometria generale del piano

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 33 (1963), p. 305-331

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__305_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SOPRA UNA GEOMETRIA GENERALE DEL PIANO

*Nota *) di FRANCA BUSULINI (a Padova) **)*

Nello studio della geometria elementare, iniziato con U. MORIN [2, 3], ¹⁾, si è posto il problema di sviluppare una geometria assoluta, compatibile con la realtà empirica, nella quale non siano vere le seguenti tre proprietà:

1^a) invertibilità del segmento e dell'angolo;

2^a) proprietà commutativa dell'addizione dei segmenti e degli angoli;

3^a) proprietà che un segmento non possa essere uguale ad una sua parte.

A questo scopo si è studiato preliminarmente, sotto ipotesi sempre più generali, la geometria sopra una retta [3, 1]. In questo primo saggio di una geometria del piano, si limitano queste ipotesi supponendo che:

a) la rigidità sia forte [cfr. 1], di guisa che le lunghezze dei segmenti costituiscano un gruppo (e non un ipergruppo); b) le rette siano totalmente ordinate e quindi tale sia il gruppo G delle lunghezze dei segmenti; c) G goda inoltre delle proprietà ammesse nella Nota, richiamata in appendice con [B*], precedente a questa.

*) Pervenuta in Redazione il 25 febbraio 1963.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

***) Lavoro fatto nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del C.N.R.

¹⁾ Cfr. la Bibliografia in appendice.

L'esposizione è limitata alle proprietà fondamentali, che nonostante apparenti paradossi si armonizzano, rimandando all'impostazione più generale (ordinamenti parziali, rigidità debole; ecc. [1]) quella più completa.

§ 1. PROPRIETÀ GENERALI.

I.1. Assiomi, congruenze.

Ci proponiamo di sviluppare una geometria del piano Π , ammettendo tutti i tradizionali postulati [4, 2], fatta eccezione di:

- a) invertibilità del segmento e dell'angolo;
- b) divisibilità del segmento e dell'angolo; assioma di *Archimede*;
- c) assioma di *Euclide*.

Vogliamo dare un riassunto dei postulati ammessi, presumendo poi note tutte le rispettive definizioni e deduzioni canoniche.

Ax I) Due punti distinti A e B ammettono una ed una sola *retta congiungente* $c = AB$.

Ax II) Una retta è dotata di due *ordinamenti totali* (o *versi*) uno opposto dell'altro, rispetto ai quali è *illimitata* e *densa*.

Ax III) Assioma della partizione di un piano in *semipiani*.

Ax IV) Il piano Π è dotato di un gruppo di mappe biiettive, detto il *gruppo delle congruenze*, tale che:

1) In una congruenza ad una semiretta corrisponde una semiretta (all'origine della prima corrisponde l'origine della seconda) e se in una congruenza una semiretta è unita, sono uniti tutti i suoi punti.

2) Esiste una ed una sola congruenza nella quale due semipiani si corrispondono, in modo che ad una prefissata semiretta del contorno del primo corrisponda una prefissata semiretta del contorno del secondo, [4, 2].

Seguono direttamente le proprietà delle seguenti congruenze particolari, di cui faremo continuo uso:

1°. Dati due punti A, A' di una retta s , esiste una determinata congruenza τ , detta *traslazione di direttrice* s , che ad

un semipiano di contorno s fa corrispondere il medesimo semipiano e in modo che ad una semiretta della s di origine A corrisponda una semiretta concorde di origine A' .

Una traslazione è dunque individuata da una coppia di punti corrispondenti della direttrice.

2°. Data una retta s esiste una determinata congruenza σ_s , detta *simmetria assiale*, che ha uniti tutti i punti della s e scambia fra loro i semipiani di contorno s .

La retta s dicesi *asse* della simmetria σ_s ; che è *involutoria*.

3°. Dato un punto O , si consideri una retta s per O e le due sue semirette opposte OA , OA' .

Esiste allora una determinata congruenza σ_o , detta *simmetria centrale*, che scambia fra loro i semipiani di contorno s e nella quale le semirette opposte OA , OA' , si corrispondono.

Il punto O dicesi *centro* della simmetria σ_o .

La σ_o essendo *involutoria*, la retta $t = BB'$ che congiunge due punti, non appartenenti ad s e corrispondenti nella σ_o , è unita.

La t incide s in un punto che, in quanto intersezione di due rette unite, è unito. Dunque t passa per O .

Il punto O , interno al segmento BB' , dicesi suo *centro*. È immediato che: *un segmento BB' può avere un solo centro*.

Mediante le proprietà di partizione si dimostra che: un fascio di raggi è dotato di due *versi di rotazione*, uno opposto dell'altro, e che, considerati due fasci distinti del piano Π , si possono confrontare i loro versi. Quindi si può affermare che: *il piano stesso è dotato di due versi di rotazione, uno opposto dell'altro* [2, I].

Una congruenza del piano Π si dice *diretta* o *inversa*, a seconda che essa conservi o scambi i versi di rotazione. Ad es., la *traslazione* e la *simmetria centrale* sono congruenze *dirette* ed invece la *simmetria assiale* è una congruenza *inversa*.

Due figure F , F' che si corrispondano in una congruenza si dicono *congruenti*. Più in particolare esse diconsi *direttamente* o *inversamente congruenti* se la congruenza in questione è rispettivamente diretta o inversa e si scrive

$$(1) \quad F \cong F' \quad \text{o} \quad F \overline{\cong} F' .$$

Per due segmenti le proprietà di essere direttamente o inversamente congruenti sono equivalenti.

1.2. Lunghezze dei segmenti con segno.

Def. 1. – Un segmento orientato AB al quale si associ:

- 1) il vers AB si dice *positivo* e si indica con AB^+ ;
- 2) il vers BA si dice *negativo* e si indica con AB^- .

Un segmento positivo o negativo si dirà un *segmento con segno*. I segmenti AB^+ , e AB^- si dicono uno *opposto* dell'altro. Nella classe dei segmenti con segno si include anche il segmento *nullo* AA , che si indicherà ancora con 0 ; considerato *privo di segno*.

Def. 2. – I segmenti AB^+ e BA^+ , oppure AB^- e BA^- , si dicono uno *invertito* dell'altro.

Due segmenti con segno che si corrispondono in una congruenza si dicono *congruenti*. Questa relazione di congruenza è evidentemente una *relazione di equivalenza*. Le rispettive classi di equivalenza si chiameranno *lunghezze dei segmenti con segno* AB^+ , AB^- , ... e verranno indicate con $\overline{AB^+}$, $\overline{AB^-}$, ...

Posto $\overline{AB^+} = \mathbf{a}$, conveniamo di porre $\overline{AB^-} = -\mathbf{a}$ e $\overline{BA^+} = \bar{\mathbf{a}}$.

Dunque: *segmenti opposti hanno lunghezze opposte e*

$$(2) \quad \omega: \quad \mathbf{a} \rightarrow \bar{\mathbf{a}}$$

è una mappa biettiva involutoria dell'insieme $\mathfrak{S} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots\}$ delle lunghezze, per cui il sistema degli elementi positivi è invariante.

Def. 3. – *Della somma di segmenti e delle loro lunghezze:*

Allo scopo di definire l'addizione dei segmenti immaginiamo trasportati tutti i segmenti con segno sopra una medesima *retta orientata* s , in modo che il verso di quelli positivi sia quello della s stessa e quello dei negativi sia l'opposto. Per comodità di scrittura rappresenteremo i segmenti dati e i rispettivi trasportati su s con i medesimi simboli.

La somma di due segmenti risulterà inoltre una classe di

segmenti con segno congruenti che, con il solito abuso, si indicherà con un suo rappresentante.

Conveniamo ora che:

1) dati due segmenti AB^+ , CD^+ si trasportino su s in modo che $B = C$ e si ponga

$$(3) \quad AB^+ + CD^+ = AD^+;$$

2) dati AB^+ , CD^- si trasportino su s in modo che $B = D$ e si ponga

$$(4) \quad AB^+ + CD^- = \begin{cases} 0 & \text{se } AB^+ = CD^+, \\ AU^+ & \text{» vers } AC \text{ è } +, \\ AC^- & \text{» vers } AC \text{ è } -; \end{cases}$$

3) dati AB^- , CD^+ si trasportino su s in modo che $A = C$ e si ponga

$$(5) \quad AB^- + CD^+ = \begin{cases} 0 & \text{se } AB^+ = CD^+, \\ BD^+ & \text{» vers } BD \text{ è } +, \\ BD^- & \text{» vers } BD \text{ è } -; \end{cases}$$

4) dati AB^- , CD^- si trasportino su s in modo che $B = C$ e si ponga

$$(6) \quad CD^- + AB^- = AD^-.$$

OSSERVAZIONE. — Nel seguito considereremo sempre segmenti con segno, ma faremo spesso l'abuso di indicare un segmento positivo AB^+ con AB .

Si verifica facilmente che:

1°. *L'addizione di segmenti con segno gode della proprietà associativa.*

È inoltre evidente che: due coppie di segmenti (con segno) ordinatamente congruenti hanno come somme la medesima classe di segmenti congruenti. Poniamo $\mathbf{a} = \overline{AB^+}$, $\mathbf{b} = \overline{CD^+}$,

$c = \overline{AD}^+$. Allora dalla definizione precedente risulta:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} a + b = c, \\ -a + a = a - a = 0, \\ a + 0 = 0 + a = a, \\ -a + c = b, \quad c - b = a, \\ -b - a = -c; \end{array} \right.$$

ed inoltre:

L'addizione delle lunghezze dei segmenti gode della *proprietà associativa*. Pertanto

2°. $G = (\mathcal{G}, +)$ è un gruppo.

Indichiamo con G^+ il monoide delle lunghezze (positive) dei segmenti positivi. Risulta allora che G è, rispetto a G^+ , un gruppo ordinato; cioè, in accordo con [B*, n. 6],

3°. G è un o-gruppo G (I, II, III).

È inoltre immediato che [3]: la mappa (2) è un *antiautomorfismo*

$$\overline{a + b} = \overline{b} + \overline{a}.$$

Nell'o-gruppo G delle lunghezze si possono considerare infinitesimi attuali destri o sinistri; ecc. ... Ancora in accordo con la [B*] ammetteremo per l'o-gruppo G lo

Ax V) degli infinitesimi attuali:

$$(8) \quad (\varepsilon \ll_a a) \Leftrightarrow (\varepsilon \ll_a a).$$

Ricordiamo le seguenti definizioni e proprietà [B*]:

$$(9) \quad (a, b > 0; \overline{a} \ll \overline{b}, \overline{b} \ll \overline{a}) \Leftrightarrow (a \sim b)^1),$$

¹⁾ Si indica, secondo HILBERT, la negazione di una proprietà *sopralineandola*.

e si dice che a, b hanno il medesimo *ordine di magnitudine*.

$$(10) \quad (a, b > 0; -b + a \ll a) \Leftrightarrow (a \approx b)$$

e si dice che a, b sono *quasi-eguali*.

$$(11) \quad (a > 0, a = \bar{a} + \varepsilon) \Rightarrow (\varepsilon \ll a).$$

$$(12) \quad (a + b > 0, a + b = b + a + \varepsilon) \Rightarrow (\varepsilon \ll a + b).$$

$$(13) \quad (b' = -a + b + a) \Rightarrow \begin{cases} b \ll a \Leftrightarrow b' \ll a, \\ a \ll b \Rightarrow b' \approx b, \\ a \sim b \Rightarrow b' \approx b. \end{cases}$$

1.3. Rette perpendicolari.

Osserviamo che: *due angoli opposti al vertice sono direttamente congruenti*.

Infatti i due angoli opposti al vertice $\sphericalangle AOB$ e $\sphericalangle A'O'B'$ si corrispondono nella simmetria centrale σ_o .

Def. 1. — Se due punti distinti A, A' si corrispondono in una simmetria assiale σ_a , si dice che la retta $a = AA'$ è *perpendicolare* alla retta b e si scrive: $a \perp b$.

La relazione di perpendicolarità fra rette è *simmetrica*; cioè:

$$(14) \quad a \perp b \Leftrightarrow b \perp a.$$

Infatti, posto $O = a \cap b$, indichiamo con B, B' due punti della b simmetrici rispetto ad O e consideriamo la congruenza inversa $\gamma = \sigma_b \sigma_o$. I punti A, A' risultano uniti e i punti B e B' corrispondenti nella γ . Pertanto è $\gamma = \sigma_b \sigma_o = \sigma_a$ e quindi: $b \perp a$; c.v.d.

Si osservi che:

$$\sigma_o = \sigma_a \sigma_b = \sigma_b \sigma_a; \text{ ecc. ...}$$

Si verifica facilmente che: per ogni punto del piano passa una ed una sola retta, perpendicolare ad una retta data.

È pure immediato che:

Una congruenza γ trasforma:

1) una simmetria assiale in una simmetria assiale:

$$\sigma_{\gamma'} = \gamma^{-1}\sigma_{\gamma};$$

2) una simmetria centrale in una simmetria centrale:

$$\sigma_{\gamma'} = \gamma^{-1}\sigma_{\gamma}.$$

Con riferimento alle due rette perpendicolari $a = AA'$, $b = BB'$ che intervengono nella dimostrazione della (14), indichiamo con ρ_0 la rotazione di centro O che sovrappone il raggio OA , al raggio OB . È ora facile dimostrare che:

Due rette perpendicolari $a = AA'$, $b = BB'$ dividono il piano in quattro angoli invertibili e fra loro congruenti. Essi diconsi angoli retti.

Infatti:

$$\rho_0(\widehat{AOB}) = \widehat{BOA'}, \quad \sigma_b(\widehat{BOA'}) = \widehat{BOA};$$

inoltre:

$$\sigma_b\rho_0(\widehat{AOB}) = \widehat{BOA}; \quad \text{c.v.d.}$$

1.4. Ampiezze degli angoli con segno.

Mediante le proprietà di partizione si definisce dapprima l'angolo convesso, come intersezione di due semipiani con i contorni incidenti, poi l'angolo concavo come esplementare del convesso ed infine l'angolo nullo, l'angolo piatto e l'angolo giro.

Def. 1. - Un angolo orientato $\sphericalangle a b$ al quale si associa

- 1) il vers $a b$ si dice *positivo* e si indica con $\sphericalangle ab^+$;
- 2) il vers $b a$ si dice *negativo* e si indica con $\sphericalangle ab^-$.

Un angolo positivo o negativo si dirà un *angolo con segno*. Gli angoli ab^+ e ab^- si dicono uno *opposto* dell'altro. Nella classe

degli angoli con segno si include l'angolo *nullo* $a a$, che si indicherà con 0 e si considera privo di segno. Invece l'angolo *giro* sarà dotato di segno: $a a^+$ oppure $a a^-$.

Per definire l'addizione degli angoli e delle loro ampiezze si trasportano tutti gli angoli con segno sopra un medesimo fascio orientato (O), in modo che il verso di quelli positivi sia quello del fascio (O) e quello dei negativi sia l'opposto. Si proceda poi come per la definizione della somma dei segmenti con segno (n. 1.2), introducendo, nel modo tradizionale, anche angoli maggiori di un angolo giro.

Indicheremo con R , π , g le ampiezze degli angoli rispettivamente *retto*, *piatto* e *giro*.

Le ampiezze degli angoli vengono a costituire un o-gruppo $\mathcal{A}\{\alpha, \beta, \dots\}$, che gode naturalmente delle propp. I, II, III (3° [1.2]). Per esso ammetteremo anche l'*assioma degli infinitesimi attuali*, analogamente a (8).

Si osservi inoltre che R , π , g hanno il medesimo ordine massimo di magnitudine [B^* , n. 7].

Se $\alpha \ll R$ diremo semplicemente che α è *infinitesimo* e scriveremo: $\alpha \approx 0$. Dunque:

$$\alpha \ll R \Leftrightarrow \alpha \approx 0.$$

Se $\alpha \approx R$, cioè $-R + \alpha \approx 0$, diremo che l'angolo di ampiezza α è *quasi-retto*. Analogamente per $\alpha \approx \pi$; ecc. ...

§ 2. TEOREMI FONDAMENTALI.

2.1. L'assioma degli infinitesimi.

Consideriamo nel senso abituale *poligoni orientati convessi*. In particolare, in un triangolo ABC indicheremo con a , b , c le lunghezze dei lati BC , CA , AB , con α , β , γ le ampiezze degli

angoli $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBA$, $\sphericalangle ACB$, con $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ quelle dei rispettivi angoli esterni concordi (fig. 1).

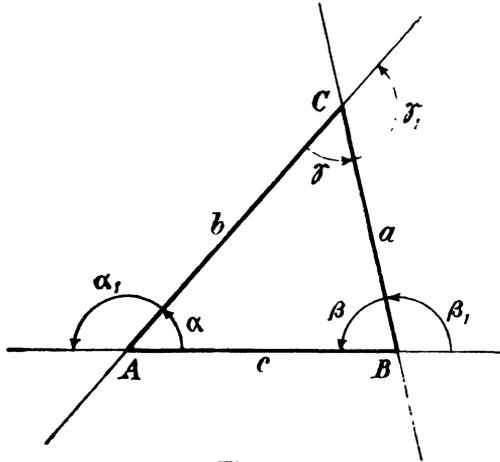


Fig. 1.

Enunciamo ora, con riferimento ad un triangolo ABC , il seguente

Ax VI) degli infinitesimi del piano:

$$(c \ll b) \Leftrightarrow (a \approx b, \gamma \approx 0).$$

Segue direttamente che:

$$1^\circ. (1) \quad (c \ll b) \Leftrightarrow (c \ll a).$$

$$(2) \quad (\gamma \not\approx 0) \Rightarrow (\overline{c \ll a, b}).$$

$$(3) \quad (\alpha, \beta, \gamma \not\approx 0) \Rightarrow (a \sim b \sim c).$$

Inoltre:

$$2^\circ. (1) \quad (0 < -a + b \sim b, \gamma \approx 0) \Rightarrow (\alpha, \beta_1 \approx 0).$$

Infatti si riportino sulle semirette CA, CB rispettivamente i segmenti $CD \cong CB$ e $CE \cong CA$, (fig. 2). Da $\overline{DA} \sim b, \overline{EB} \sim b$

e dall' Ax segue:

$$\overline{DB} \ll a \Rightarrow \overline{DB} \ll \overline{DA} \Rightarrow a \approx 0;$$

$$\overline{AE} \ll b \Rightarrow \overline{AE} \ll \overline{EB} \Rightarrow \beta_1 \approx 0.$$

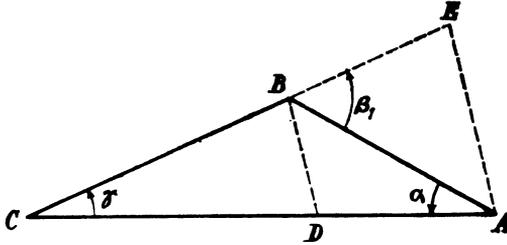


Fig. 2.

Come immediata proprietà contraria della precedente:

$$(2) \quad (\theta < -a + b \sim b, a \not\approx 0 \text{ o } \beta_1 \not\approx 0) \Rightarrow (\gamma \not\approx 0).$$

$$3^o. (1) \quad \gamma \approx 2R \Rightarrow \alpha, \beta \approx 0.$$

Riportiamo sul prolungamento di AC il segmento $CB' \cong CB$, (fig. 3). Allora $\gamma \approx 2R \Rightarrow \gamma_1 \approx 0 \Rightarrow B'B \ll B'C \Rightarrow B'B \ll B'A \Rightarrow \alpha \approx 0$.

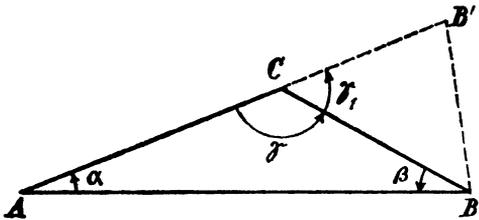


Fig. 3.

Analogamente si verifica che: $\beta \approx 0$.

Come corollari:

$$(2) \quad (\alpha \not\approx 0 \text{ o } \beta \not\approx 0) \Rightarrow \gamma \not\approx 2R.$$

$$(3) \quad \alpha, \beta, \gamma \not\approx 0 \Rightarrow \alpha, \beta, \gamma \not\approx 2R.$$

2.2. Il triangolo assiale.

Def. 1. - Un triangolo ABC con un asse di simmetria s dicesi *triangolo assiale*.

È evidente che: s è l'asse di un lato, ad es. AB , detto la *base*, e passa per il vertice opposto C , detto il *vertice*. Per tale triangolo si ha inoltre:

$$1^{\circ}. \quad \mathbf{c} = \bar{\mathbf{c}}, \quad \gamma = \bar{\gamma}; \quad \mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad \alpha = \bar{\beta}.$$

Def. 2. - Un triangolo ABC in cui:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad \text{dicesi } \textit{isoscele};$$

$$\alpha = \bar{\beta} \quad \text{» } \textit{isogono}.$$

È immediato che:

$$2^{\circ}. \quad [(\mathbf{a} = \mathbf{b}, \gamma = \bar{\gamma}) \text{ o } (\alpha = \bar{\beta}, \mathbf{c} = \bar{\mathbf{c}})] \Rightarrow [ABC \text{ assiale}].$$

$$3^{\circ}. \quad (\mathbf{a} = \mathbf{b}) \Rightarrow [(\mathbf{c} \ll \mathbf{a}) \Leftrightarrow (\gamma \approx 0)].$$

Dimostriamo ora il teorema

$$4^{\circ}. \quad (\mathbf{a} = \mathbf{b}) \Rightarrow \begin{cases} (1) & \bar{\mathbf{c}} \ll \mathbf{a} \Rightarrow (\alpha \approx \bar{\beta}); \\ (2) & \alpha \not\approx \bar{\beta} \Rightarrow (\mathbf{c} \ll \mathbf{a}). \end{cases}$$

(1) Consideriamo il triangolo

$$A'B'C' \cong ABC,$$

con $B' = A$, $C' = C$ ed A' appartenente al semipiano $(AC)B$, (fig. 4).

Se il triangolo dato è assiale, sarà $\bar{\gamma} = \gamma$, $A' = B$ e la prop. (1) è vera.

Sia ora $\bar{\gamma} \neq \gamma$ (per fissare le idee supporremo, ad es. $\bar{\gamma} < \gamma$) e quindi $A' \neq B$, (fig. 4). Poniamo:

$$\delta = \text{amp. } \sphericalangle A'CB, \quad \varepsilon = \text{amp. } \sphericalangle A'AB;$$

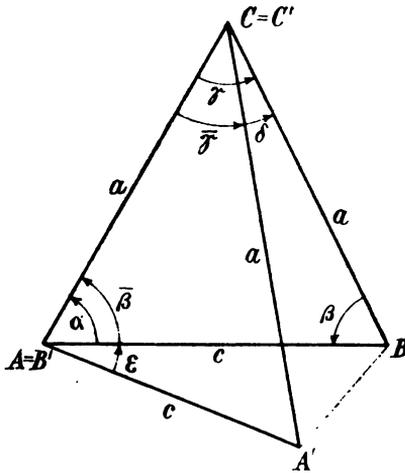


Fig. 4.

quindi:

$$(\delta = -\bar{\gamma} + \gamma \approx 0) \Rightarrow (A'B \ll a) \Rightarrow (A'B \ll c) \Rightarrow (\varepsilon \approx 0);$$

ma $\varepsilon + \bar{\beta} = \alpha$, cioè: $\alpha \approx \bar{\beta}$; c.v.d.

(2) è il contrario di (1).

2.3. Il triangolo rettangolo.

Osservato che (fig. 5): gli angoli adiacenti all'ipotenusa di un triangolo rettangolo sono acuti; dimostriamo la:

$$1^{\circ} \quad (\gamma = R) \Rightarrow \begin{cases} (1) & (a \ll c) \Leftrightarrow (\alpha \approx 0); \\ (2) & (\alpha \approx 0) \Rightarrow (b \approx c). \end{cases}$$

(1) La prop. diretta è l'Ax VI. Per dimostrare la inversa, si riporti sulla semiretta AC il segmento $AD \cong AB$ (fig. 5). Quindi $\overline{DB} \ll c$ e, pertanto, se $D = C$ la prop. è vera. Se $D \neq C$, nel triangolo rettangolo DCB non può essere $\overline{DB} \ll \overline{a}$, quindi è $a \ll c$; c.v.d.

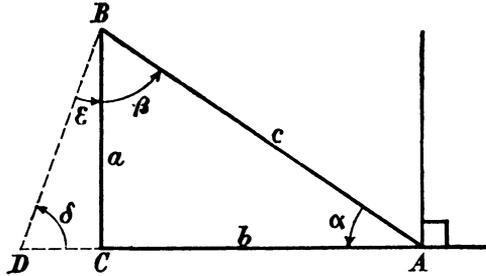


Fig. 5.

(2) È conseguenza immediata di (1) e dell'Ax VI.
Come corollario:

$$2^\circ. \quad (\gamma = R, a \sim b) \Rightarrow (\alpha, \beta \approx 0, a \sim c).$$

Consideriamo ora il teorema:

$$3^\circ. \quad (\gamma = R) \Rightarrow [(\beta \approx 0) \Leftrightarrow (\alpha \approx R)].$$

Infatti, indichiamo con B_1 e B_2 i simmetrici di B rispetto all'asse AC e al centro A (fig. 6).

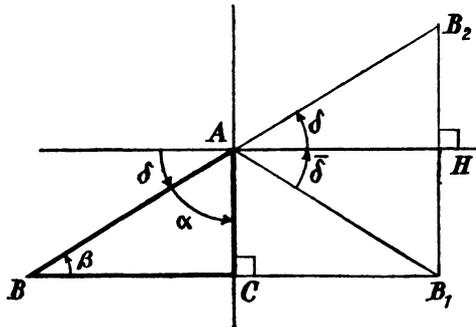


Fig. 6.

Allora la perpendicolare AH ad AC in A è asse di B_1B_2 .
 Poniamo $\delta = \text{amp. } \sphericalangle HAB_2$ ed osserviamo che:

$$\begin{aligned} (\beta \approx 0) &\Rightarrow (\alpha \approx c) \Rightarrow (BB_1 \approx BB_2) \Rightarrow \\ (B_1B_2 \ll BB_2) &\Rightarrow (B_1B_2 \ll AB_2) \Rightarrow (\sphericalangle B_1AB_2 \approx 0) \\ &\Rightarrow (\bar{\delta} + \delta \approx 0) \Rightarrow (\delta \approx 0) \Rightarrow (\alpha \approx R). \end{aligned}$$

Viceversa:

$$(\alpha \approx R) \Rightarrow (\delta \approx 0) \Rightarrow (B_2H \ll B_2A) \Rightarrow (B_2B_1 \ll B_2B) \Rightarrow (\beta \approx 0);$$

c.v.d.

È ora facile dimostrare che, con riferimento ad un triangolo qualsiasi, si ha:

$$4^\circ. \quad \alpha, \beta \approx 0 \Rightarrow \gamma \approx 2R.$$

Infatti l'altezza CH del triangolo ha il piede interno ad AB (fig. 7). Quindi (prop. 3^a): $\sphericalangle ACH, \sphericalangle HCB \approx R$ e pertanto: $\gamma \approx R + R$; c.v.d.

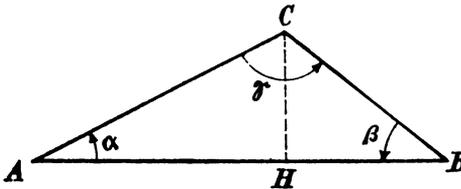


Fig. 7.

$$5^\circ. \quad \alpha, \beta_1 \approx 0 \Rightarrow \gamma \approx 0.$$

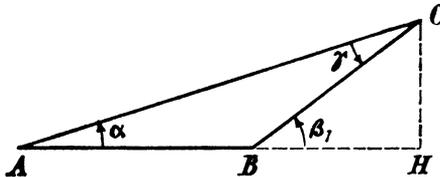


Fig. 8.

Tracciata l'altezza CH sopra il prolungamento di AB , si osservi che, in base alla prop. 3^a, i due angoli HCA , HCB sono ambedue $\approx R$: quindi la loro differenza, di ampiezza γ , è ≈ 0 , (fig. 8).

$$6^\circ. \quad (\gamma = R, \mathbf{b} \approx \mathbf{c}) \Rightarrow (\alpha \approx 0).$$

Se $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ il triangolo dato è isoscele e da $\alpha \not\approx 0$ seguirebbe quindi $\beta \approx \bar{R} = R$, da cui, in base alla 3^a, $\alpha \approx 0$.

Se $\mathbf{b} \neq \mathbf{c}$, si riporti su AC il segmento $AD \cong AB$ e si ponga (fig. 5):

$$\text{amp. } \sphericalangle ADB = \delta, \quad \text{amp. } \sphericalangle DBA = \lambda, \quad \text{amp. } \sphericalangle CBD = \varepsilon.$$

$$\text{Quindi: } (\mathbf{b} \approx \mathbf{c}) \Rightarrow (\overline{DC} \ll \mathbf{b}).$$

$$(1) \quad \overline{DC} \ll \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} \ll \mathbf{b} \Rightarrow \alpha \approx 0;$$

(2) $\overline{DC} \ll \mathbf{a} \Rightarrow (\delta \approx R, \varepsilon \approx 0)$. Ora da $\alpha \not\approx 0$ seguirebbe $(\varepsilon + \beta \approx \delta \approx R) \Rightarrow (\beta \approx R) \Rightarrow (\alpha \approx 0)$; quindi deve essere $\alpha \approx 0$; c.v.d.

Come corollario:

$$7^\circ. \quad (\gamma = R) \Rightarrow (\mathbf{a} \ll \mathbf{b} \Leftrightarrow \alpha \approx 0).$$

$$8^\circ. \quad (\mathbf{a} \sim \mathbf{b}) \Rightarrow [(\alpha \approx 0 \text{ o } \alpha \approx 2R) \Leftrightarrow (\beta \approx 0 \text{ o } \beta \approx 2R)].$$

Indicata con CH l'altezza su AB del triangolo dato (figg. 7, 8):

$$(\alpha \approx 0 \text{ o } \alpha \approx 2R) \Leftrightarrow (CH \ll CA) \Leftrightarrow (CH \ll CB) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\beta \approx 0 \text{ o } \beta \approx 2R); \text{ c.v.d.}$$

$$9^\circ. \quad (\mathbf{a} \sim \mathbf{b}, 0 \not\approx \gamma \not\approx 2R) \Rightarrow (0 \not\approx \alpha \not\approx 2R, 0 \not\approx \beta \not\approx 2R).$$

Infatti (figg. 7, 8), in base all'ipotesi, almeno uno dei due angoli HCA , HCB non è quasi-retto, quindi \overline{HC} non essendo infinitesimo rispetto ad \mathbf{a} o rispetto a \mathbf{b} , non lo è rispetto a tutti e due: pertanto la tesi.

Enunciamo questa proprietà riassuntiva:

$$10^\circ. \quad (\gamma \approx 0) \Rightarrow \begin{cases} (\mathbf{a} \approx \mathbf{b}) \Rightarrow (\mathbf{c} \ll \mathbf{b}); \\ (0 < -\mathbf{a} + \mathbf{b} \sim \mathbf{b}) \Rightarrow (\alpha, \beta_1 \approx 0); \\ (\alpha \approx 0) \Rightarrow (\beta_1 \approx 0). \end{cases}$$

2.4. Quadrangoli $ABCD$ particolari.

$$1^{\circ}. \quad (\widehat{A} = \widehat{B} = R, \quad \overline{AD} \ll \overline{AB}, \quad BC \ll AD) \Rightarrow \\ \Rightarrow (AB \cap DC = P).$$

Se $n \ AD \geq AB$, poniamo $(n + 1) \ AD \cong AE$ (sopra la semiretta AB) ed $F = DE \cap BC$. Quindi (fig. 9):

$$\overline{AD} \ll \overline{AE} \Rightarrow (\widehat{E} \approx 0) \Rightarrow \overline{BF} \ll \overline{BE} \Rightarrow \overline{BF} \ll \overline{AD} \Rightarrow (BC \ll BF).$$

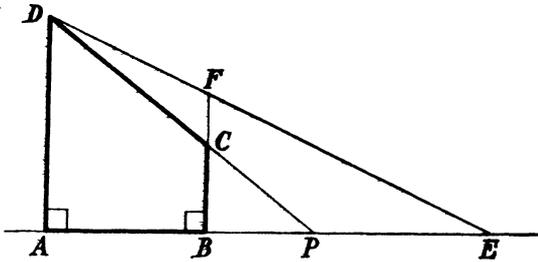


Fig. 9.

Pertanto il prolungamento di DC incontra il cateto BE del triangolo rettangolo FBE in un punto P ; c.v.d.

$$2^{\circ}. \quad (\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = R) \Rightarrow [\overline{AD} \ll \overline{AB} \Rightarrow \overline{BC} \ll \overline{AD}].$$

Infatti, se fosse $BC \ll AD$, in base alla 1^a, le due rette AB e DC sarebbero incidenti; in contrasto con l'ipotesi che siano perpendicolari alla medesima retta BC .

$$3^{\circ}. \quad (\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = R) \Rightarrow \begin{cases} (1) \ \sphericalangle ADB \approx 0 \Leftrightarrow \sphericalangle CBD \approx 0; \\ (2) \ \overline{AB} \ll \overline{DB} \Leftrightarrow \overline{DC} \ll \overline{DB}; \\ (3) \ \overline{AD} \approx \overline{RD} \Leftrightarrow \overline{BC} \approx \overline{BD}. \end{cases}$$

e se sono vere le prop. che intercengono o in (1) o in (2) oppure in (3), sono vere quelle degli altri due casi.

Infatti (fig. 10), in base alle propp. dei triangoli rettangoli del n. precedente:

$$\sphericalangle ADB \approx 0 \Leftrightarrow \sphericalangle ABD \approx R \Leftrightarrow \sphericalangle CBD \approx 0 ; \text{ ecc. ...}$$

4°. Se due rette AD , BE hanno la trasversale AB perpendicolare ad entrambe e la trasversale BD forma con una di esse un angolo infinitesimo, anche il rispettivo alterno è infinitesimo.

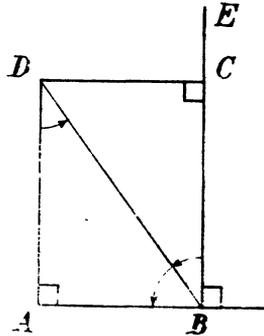


Fig. 10.

Infatti (fig. 10), detto C il piede della perpendicolare tracciata da D su BE , al quadrangolo $ABCD$ si può applicare il teorema 3°.

$$5^\circ. (\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = R) \Rightarrow [(AB \ll AD) \Leftrightarrow (DC \ll AD, AD \approx BC)],$$

Infatti (fig. 10): $(AB \ll AD) \Rightarrow (\sphericalangle ADB \approx 0) \Rightarrow (\sphericalangle CBD \approx 0) \Rightarrow (DC \ll BD \approx AD); (DC \ll AD \approx BC) \Rightarrow \sphericalangle CBD \approx 0, \text{ ecc. ...}$

$$6^\circ. (\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = R, AD \sim AB) \Rightarrow (AB \sim DC \sim BC).$$

Infatti, ai triangoli rettangoli DAB e DCB si può applicare le propp. 2°, 3° del n. 2.3.

$$7^\circ. (\hat{A} = \hat{B} = R, AB \sim AD \sim BC) \Rightarrow (AB \sim DC).$$

Infatti, nel triangolo DBC è $BD \sim BC$ e $\sphericalangle DBC \approx 0$, quindi in base alla 2ª (2.3.) risulta $DC \sim DB \sim AD$; c.v.d.

Consideriamo ora un teorema sulle trasversali che avremo occasione di applicare.

8º. *Due rette $AC, A'C'$ formino con la trasversale $s = AA'$ angoli corrispondenti eguali: $\alpha = \alpha'$, $0 \approx \alpha \approx 2R$. Allora se $AA' \ll AC$, la trasversale $A'C'$ forma con le due rette date una coppia di angoli alterni infinitesimi.*

È senz'altro, in base all'*Ax* VI, $\sphericalangle ACA' \approx 0$. Dobbiamo dunque dimostrare che anche $\sphericalangle CA'C' \approx 0$.

Se $\alpha = \alpha' = R$ la prop. è vera in base al 3º (2.3). Se $\alpha = \alpha' \neq R$ consideriamo la traslazione τ , di direttrice s , che sovrappone A ad A' . Essa sovrappone quindi la retta AC alla retta $A'C'$. Pertanto è lecito supporre C' corrispondente di C nella τ (fig. 11).

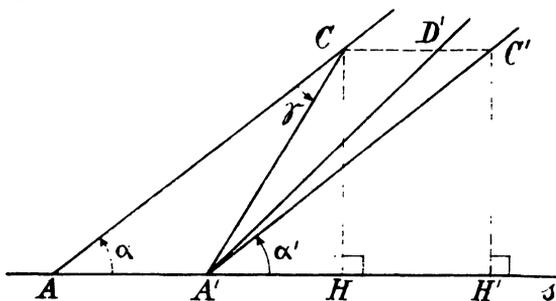


Fig. 11.

Siano H, H' i piedi delle perpendicolari tracciate da C, C' su s ; quindi: $CH \cong C'H', AH \cong A'H'$.

Dalla 16ª o dalla 15ª del n. 4 della [B*], a seconda che $\alpha \approx R$ o $\alpha \approx R$, segue allora che:

$$AA' \ll AC \Rightarrow HH' \ll AC \sim HC.$$

Dunque al quadrangolo $HH'C'C$ si può applicare la prop. 4ª (2.4.) e concludere che:

$$CC' \ll HC \sim A'C' \quad \text{e quindi} \quad \sphericalangle CA'C' \approx 0; \quad \text{c.v.d.}$$

Avremo bisogno di un corollario di questa proprietà, nel quale viene generalizzata la prima parte dell'ipotesi ed invece rimane immutata la tesi:

9°. Due rette AC , $A'D'$ formino con la trasversale $s = AA'$ angoli corrispondenti « quasi-eguali »: $\alpha \approx \alpha''$, $0 \not\approx \alpha \not\approx 2R$. Allora se $AA' \ll AC$, la trasversale $A'C$ forma con le due rette date una coppia di angoli alterni infinitesimi.

Infatti si consideri anche la retta $A'C'$ dell'ipotesi della precedente prop. 8ª (fig. 11). $A'C'$ forma angoli infinitesimi con $A'C$ e con $A'D'$, quindi $\sphericalangle D'A'C \approx 0$; c.v.d.

10°. ($\widehat{A} = \widehat{B} = R$, $AB \sim AD \cong BC$; $ABCD \cong A'B'C'D'$, $B' = A$, $C' = D$) \Rightarrow ($\sphericalangle D'DC \approx 0$).

Essendo soddisfatte le ipotesi della prop. 7ª possiamo intanto affermare che (fig. 12): $AB \sim DC$. Inoltre:

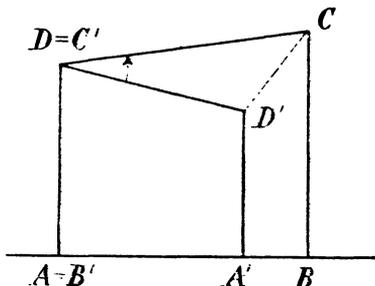


Fig. 12.

$$(A'B \ll AB \sim A'D') \Rightarrow (D'C \ll AB \sim DC) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\sphericalangle D'DC \approx 0); \text{ c.v.d.}$$

Possiamo ora dimostrare il teorema, di cui le proprietà precedenti sono lemmi:

11°. ($\widehat{A} = \widehat{B} = R$, $AD \cong BC$, $P = AB \cap DC$, $AB \ll BC$) \Rightarrow ($\sphericalangle BPC \approx 0$).

Sia, per fissare le idee, D interno al segmento PC . Indichiamo con E la proiezione ortogonale di D su BC (fig. 13).

$$(1) \quad (BC \ll AB) \Rightarrow (BC \ll PB) \Rightarrow (\widehat{P} \approx 0).$$

(2) Se $BC \sim AB$ consideriamo, come nella 10^a, $A'B'C'D' \cong \cong ABCD$ e il punto $P' = AB \cap C'D'$ si trova da parte opposta di P rispetto ad A . Quindi il raggio DE è interno all'angolo $D'DC \approx 0$, (10^a).

Pertanto anche $\sphericalangle EDC \approx 0$, quindi $\sphericalangle DCE \approx R$ ed infine $\sphericalangle BPC \approx 0$; c.v.d.

Come importante corollario contrario di 11° si ha (fig. 13):

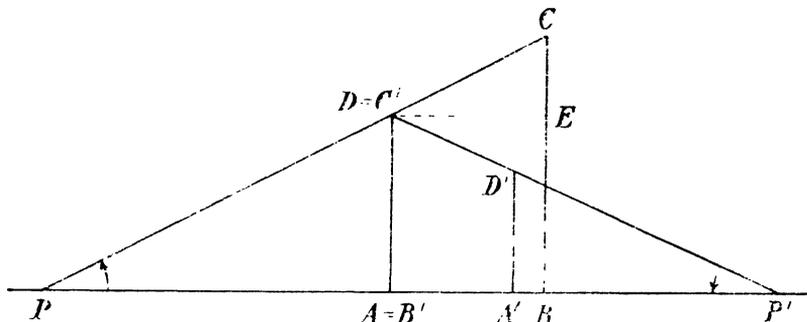


Fig. 13.

$$12^\circ. (\widehat{A} = \widehat{B} = R, AD \cong BC, P = AB \cap CD, \widehat{P} \approx 0) \Rightarrow \Rightarrow (AB \ll BC).$$

2.5. Triangoli quasi-isosceli e quasi-isogoni.

Def. 1. - Un triangolo ABC dicesi *quasi-isoscele* oppure *quasi-isogono* di base AB se

$$(15) \quad \mathbf{a} \approx \mathbf{b} \quad \text{oppure} \quad \alpha \approx \beta.$$

Dalla prop. 4^a (2.2) risulta che: un triangolo isoscele, con $c \ll a$ è quasi-isogono.

Dimostriamo preliminarmente che:

$$(16) \quad (\alpha = \bar{\beta}) \Rightarrow \begin{cases} (1) & (\gamma \not\approx 0, 2R) \Rightarrow a \approx b; \\ (2) & a \not\approx b \Rightarrow (\gamma \approx 0 \text{ o } \gamma \approx 2R). \end{cases}$$

(1) Se $c = \bar{c}$ il triangolo è assiale (2^a; 2.2) e la proprietà è vera.

Se $c \neq \bar{c}$, consideriamo il triangolo $A'B'C' \cong ABC$ con $B' = A$ ed A' appartenente alla semiretta AB (fig. 14). Se risulta $C' = C$, cioè $a = b$, la (1) è ancora vera. Sia ora $C' \neq C$: esso appartiene alla semiretta AC .

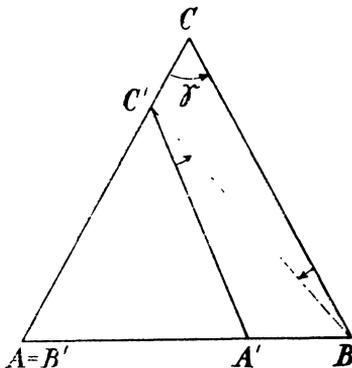


Fig. 14.

Dalle prop. 4^a (2.3) e 3^a, 1 (2.1) segue pure che $\alpha = \bar{\beta} \not\approx 0, 2R$; quindi: $\overline{A'B} \ll c \sim b \Rightarrow \sphericalangle A'C'B \approx 0$; da cui, in base alla 9^a (2.4), $\sphericalangle CBC' \approx 0$ e quindi, tenuto conto di $\gamma \not\approx 0, 2R$ e della 2^a.1 (2.1), $CC' \ll BC$; c.v.d.

(2) è la contraria di (1).

Consideriamo ora il teorema più generale:

$$1^{\circ}. \quad (\gamma \not\approx 0, 2R) \Rightarrow (a \approx b \Leftrightarrow \alpha \approx \beta);$$

cioè: se l'angolo al vertice $\gamma \not\approx 0, 2R$, le due proprietà del triangolo di essere quasi-isoscele oppure quasi-isogono sono equivalenti.

(1) Escluso il caso particolare $a = b$, già risolto dalla 4^a (2.2), consideriamo il triangolo $A'B'C' \cong ABC$, con $B' = A$ e C' appartenente alla semiretta AC , (fig. 15). Quindi $\overline{CC'} \ll a \approx b \approx \overline{BC'}$ e $\sphericalangle CBC' \approx 0$.

Alle due rette CB e $C'A'$ possiamo con riferimento alla trasversale CC' , applicare la 9^a (2.4); quindi $\sphericalangle A'C'B \approx 0$.

Dall'*Ax* VI segue allora: $A'B \ll a \sim c$ quindi $\sphericalangle A'AB \approx 0$ e pertanto: $\alpha \approx \beta$.

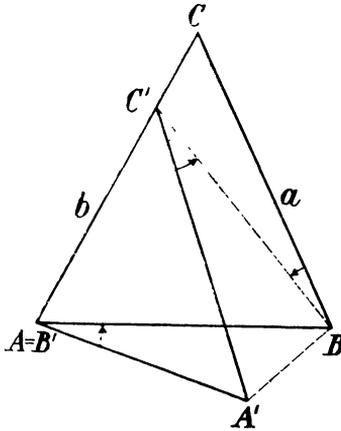


Fig. 15.

(2) Per dimostrare l'inversa basta, sempre con riferimento al triangolo $A'B'C'$ (fig. 15), invertire il ragionamento:

$$\begin{aligned}
 (\alpha \approx \beta) &\Rightarrow \sphericalangle A'AB \approx 0 \Rightarrow \overline{A'B} \ll c \sim b \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \sphericalangle A'C'B \approx 0 \Rightarrow \sphericalangle CBC' \approx 0 \Rightarrow C'C \ll a \Rightarrow \\
 &\Rightarrow a \approx b; \text{ c.v.d.}
 \end{aligned}$$

2.6. Relazioni fra gli elementi di un triangolo ABC .

1^o. $(\alpha + \beta = 2R) \Rightarrow \gamma \approx 0$.

Sappiamo che deve essere $\alpha, \beta \neq R$; pertanto possiamo, ad es., supporre $\alpha < R$.

Se $AB \ll AC$ la prop. è nota fin dall'*Ax* VI. Consideriamo pertanto il caso $\overline{AB} \ll \overline{AC}$.

La traslazione di direttrice AB , che sovrappone A a B , porta C in un punto C' della semiretta BC .

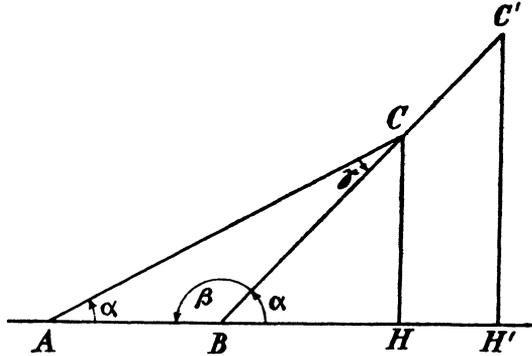


Fig. 16.

Indichiamo con H e H' le proiezioni ortogonali di C e C' sulla retta AB ; che si trovano sul prolungamento del segmento AB (fig. 16). Si osservi che:

$$\overline{AB} \ll \overline{AC} \Rightarrow \overline{AH} \ll \overline{AC} \Rightarrow (AB \sim AC \sim AH).$$

Pertanto, in base alla (13) è $AB \approx HH'$. Ora se $a \approx 0$, con riferimento alla 5^a (2.3), $\gamma \approx 0$; se invece $a \not\approx 0$, in base alla 12^a (2.4):

$$AB \approx HH' \ll HC \sim AC,$$

in contrasto con l'attuale ipotesi $\overline{AB} \ll \overline{AC}$; c.v.d.

Come risulta dalla dimostrazione, la prop. 1^a si può enunciare in questo modo più completo:

$$(17) \quad (\alpha + \beta = 2R) \Rightarrow \begin{cases} \gamma \approx 0; & c \ll b; & \text{oppure} \\ \gamma \approx 0; & \overline{c} \ll \overline{b}, & \alpha \approx 0 \quad \text{o} \quad \beta \approx 0. \end{cases}$$

Dimostriamo ora il seguente teorema:

$$2^{\circ}. (\alpha \neq 0, 2R; \alpha + \beta > 2R) \Rightarrow (AB \ll AC, \alpha + \beta \approx 2R).$$

Infatti la traslazione di direttrice AB che porta A su B porta il raggio AC in un raggio BF che sega il segmento AC in un punto interno E , (fig. 17). Quindi, in base al precedente teorema, è $AB \ll AE < AC$.

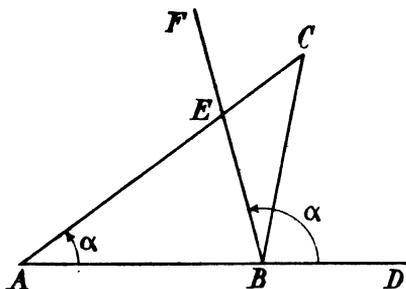


Fig. 17.

Il triangolo CEB ha infinitesimi l'angolo interno in C e quello esterno in E quindi, in base a $5^{\circ}(2.3)$, anche l'angolo interno in B ; cioè $\sphericalangle EBC \approx 0$. Pertanto $\alpha + \beta \approx 2R$.

Dimostriamo infine un teorema più generale:

$$3^{\circ}. (\alpha \neq 0, 2R; \alpha + \beta \approx 2R) \Rightarrow (c \ll a).$$

Se $\alpha + \beta \geq 2R$ ci troviamo nella situazione delle precedenti propp. 1° , 2° . Supponiamo pertanto $\alpha + \beta < 2R$ e dimostriamo che deve essere $\gamma \approx 0$.

Infatti se fosse $\gamma \neq 0$, riportiamo sul prolungamento di AC il segmento $CD \cong CB$. Quindi gli angoli alla base del triangolo isoscele BDC non sarebbero infinitesimi, pertanto la somma degli angoli alla base di ABD risulterebbe $> 2R$, quindi sarebbe $AB \ll \ll AD$; in contrasto con l'osservazione precedente $\sphericalangle BDA \neq 0$.

Dunque deve essere $\gamma \approx 0$. Infine, in base a 2° , $1(2.1)$, $(\gamma \approx 0, \alpha \neq 0, 2R) \Rightarrow c \ll a$; c.v.d.

Possiamo ora enunciare il *teorema dell'angolo esterno*:

$$4^{\circ}. \quad (a \not\approx 0, 2R; \gamma \not\approx 0) \Rightarrow (\beta_1 > \alpha), (*) .$$

Infatti se fosse $\alpha + \beta \geq 2R$ o $\alpha + \beta \approx 2R$ sarebbe, in base alle tre precedenti propp., $\gamma \approx 0$. Dunque deve essere $\alpha + \beta < 2R$; cioè: $\alpha < \beta_1$; c.v.d.

$$5^{\circ}. \quad \gamma \not\approx 0, 2R \Rightarrow (a < b \Leftrightarrow \alpha < \beta) .$$

(1) Riportiamo su CA il segmento $CD \cong CB$ e poniamo amp. $\sphericalangle BDC = \delta_1$, amp. $\sphericalangle CBD = \lambda$, amp. $\sphericalangle ADB = \delta$, amp. $\sphericalangle DBA = \mu$, (fig. 18). Quindi:

$$\delta_1 \approx \lambda; \quad \lambda, \delta_1 \not\approx 0; \quad \lambda, \delta_1 < R; \quad c \sim a \sim b; \quad \alpha, \beta \not\approx 0;$$

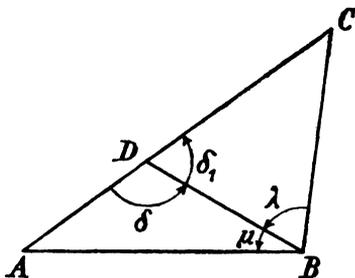


Fig. 18.

ed inoltre:

$$(AD \sim BD; \alpha, \delta \not\approx 0, 2R) \Rightarrow \mu \not\approx 0 ,$$

da cui: $\beta = \lambda + \mu > \lambda \approx \delta_1 > \alpha$; c.v.d.

(2) Se viceversa è $\alpha < \beta$ non potrà essere:

(i) $b < a$ che implica $\alpha > \beta$,

(ii) $b \approx a$ » » $\alpha \approx \beta$;

dunque dovrà essere: $a < b$; c.v.d.

Dimostriamo infine la *disuguaglianza triangolare*:

$$6^{\circ}. \quad (\alpha, \beta, \gamma \not\approx 0) \Rightarrow a + b > c .$$

(*) Qui e nel seguito la relazione $\sphericalangle < \sphericalangle$ esclude le $\sphericalangle \approx \sphericalangle$, $\sphericalangle \ll \sphericalangle$.

Dall'ipotesi segue intanto, in base al 3°1 (2.1): $\alpha, \beta, \gamma \approx 2R$.

Si riporti ora sul prolungamento di BC il segmento $CD \cong CA$ (fig. 19).

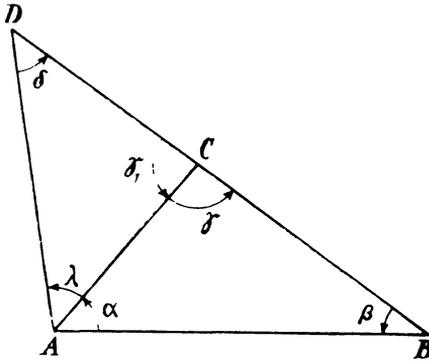


Fig. 19.

Posto $\delta = \text{amp. } \sphericalangle ADC$, $\lambda = \text{amp. } \sphericalangle CAB$, $\mu = \text{amp. } \sphericalangle BAD$; da $\gamma \approx 0$ segue $\delta, \lambda \approx 0$.

Inoltre $\mu = \alpha + \lambda > \lambda \approx \delta$.

Quindi al triangolo ABD si può applicare il teorema precedente e pertanto $BD > AB$; cioè:

$$a + b > c.$$

BIBLIOGRAFIA

- [B*] BUSULINI F.: *Sui gruppi non regolarmente ordinati*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, t. 33, 1963.
- [1] BUSULINI F.: *Contributi alla geometria della retta*. Annali Univ. Ferrara. t. 9, 1961.
- [2] MORIN U., BUSULINI F.: *Elementi di geometria*. t. I, II, III. Cedam, Padova, 1958-59.
- [3] MORIN U., BUSULINI F.: *Alcune considerazioni sopra una geometria generale*. Atti Ist. Veneto di Sc., Lett. e Arti, t. 107, 1959.
- [4] SEVERI F.: *Elementi di geometria*. t. I, II. Vallecchi, Firenze, 1926.