RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ETTORE BENTSIK

Sulle deformazioni elastiche dovute ad una sollecitazione riducibile a due coppie in equilibrio

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 33 (1963), p. 297-304

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__297_0>

SULLE DEFORMAZIONI ELASTICHE DOVUTE AD UNA SOLLECITAZIONE RIDUCIBILE A DUE COPPIE IN EQUILIBRIO

Nota *) di ETTORE BENTSIK (*a Padova*) **)

Mostrerò come l'applicazione di note proprietà di media dello stress porti ad interessanti limitazioni per le deformazioni dei corpi elastici soggetti a speciali sollecitazioni. Nei casi di sollecitazioni del tipo a flessione uniforme e a torsione si ottengono formule analoghe a quelle valide nello schema di approssimazione di De Saint-Venant, pur non trattandosi ora di corpi cilindrici, e si riconosce che le deformazioni ottenute in quello schema di approssimazione sono in media inferiori a quelle presunte dal sistema differenziale dell'elasticità.

1. Premesse di carattere generale.

Sia $\mathscr{C}$ un qualunque corpo elastico poco deformabile il cui contorno consti di tre parti $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ tali che: *a*) su Σ_1 agisce un sistema di forze parallele di vettore f_1 e versore v_1 riducibile ad una coppia di momento $M \neq 0$; *b*) su Σ_2 agisce un sistema di

---

*) Pervenuta in redazione il 3 marzo 1963.
Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.
**) Lavoro eseguito nell'ambito della attività dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

forze parallele di vettore $\boldsymbol{f}_2$ e versore $\boldsymbol{v}_2$ riducibile alla coppia di momento-$\boldsymbol{M}$; c) Σ_3 non è soggetto a forze.

Si pensi diviso Σ_i ($i = 1, 2$) in due parti Σ'_i, Σ''_i e siano $\boldsymbol{R}'_i$ e $\boldsymbol{R}''_i = -\boldsymbol{R}'_i$ i risultanti delle sollecitazioni agenti su di esse e, supposto $\boldsymbol{R}'_i \neq 0$, siano C'_i, C''_i i loro centri.

Si ha pertanto

$$\boldsymbol{f}_1 = f_1\boldsymbol{v}_1\,, \qquad \boldsymbol{f}_2 = f_2\boldsymbol{v}_2\,, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{R}'_1 = R'_1\boldsymbol{v}_1\,, \qquad \boldsymbol{R}''_1 = R''_1\boldsymbol{v}_1\,, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{R}'_2 = R'_2\boldsymbol{v}_2\,, \qquad \boldsymbol{R}''_2 = R''_2\boldsymbol{v}_2\,,$$

con

$$R'_1 = \int_{\Sigma'_1} f_1 d\Sigma'_1\,. \qquad R''_1 = \int_{\Sigma''_1} f_1 d\Sigma''_1 = -R'_1\,, \tag{3}$$

$$R'_2 = \int_{\Sigma'_2} f_2 d\Sigma'_2\,, \qquad R''_2 = \int_{\Sigma''_2} f_2 d\Sigma''_2 = -R'_2\,.$$

Risulta inoltre

$$\boldsymbol{M} = \int_{\Sigma'_1} OP \wedge \boldsymbol{f}_1 d\Sigma'_1 + \int_{\Sigma''_1} OP \wedge \boldsymbol{f}_1 d\Sigma''_1 = \tag{4}$$

$$= -\left[\int_{\Sigma'_2} OP \wedge \boldsymbol{f}_2 d\Sigma'_2 + \int_{\Sigma''_2} OP \wedge \boldsymbol{f}_2 d\Sigma''_2\right].$$

Posto $|C'_1C''_1| = l_1$, $|C'_2C''_2| = l_2$, sia

$$C'_1C''_1 = l_1\boldsymbol{u}_1\,. \qquad C'_2C''_2 = l_2\boldsymbol{u}_2\,. \tag{5}$$

Se si indicano con φ_{1r}, φ_{2r}, Ψ_{1r}, Ψ_{2r} i coseni direttori rispettivamente di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ si vede subito che, indicate con M_r le componenti di $\boldsymbol{M}$ secondo gli assi di una terna prefissata $Ox_1x_2x_3$

si ha

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
M_1 &= -\, l_1 R'_1(\varphi_{13}\Psi_{12} - \varphi_{12}\Psi_{13}) = l_2 R'_2(\varphi_{23}\Psi_{22} - \varphi_{22}\Psi_{23}) \,, \\
M_2 &= -\, l_1 R'_1(\varphi_{11}\Psi_{13} - \varphi_{13}\Psi_{11}) = l_2 R'_2(\varphi_{21}\Psi_{23} - \varphi_{23}\Psi_{21}) \,, \\
M_3 &= -\, l_1 R'_1(\varphi_{12}\Psi_{11} - \varphi_{11}\Psi_{12}) = l_2 R'_2(\varphi_{22}\Psi_{21} - \varphi_{21}\Psi_{22}) \,.
\end{aligned}
$$

In particolare, se si suppone che i vettori $C'_1C''_1$ e $C'_2C''_2$ siano paralleli al piano $0\,x_2x_3$ e si indica con l la distanza tra i piani per $C'_1C''_1$ e $C'_2C''_2$ paralleli al predetto piano, si ha

$$
(7)\qquad \Psi_{i1} = 0 \qquad (i = 1, 2)\,,
$$

$$
(8)\qquad x_1^{C'_1} - x_1^{C'_2} = l\,, \qquad x_1^{C''_1} - x_1^{C''_2} = l\,.
$$

Conviene osservare che la direzione del vettore $C'_1C''_1$ non dipende dal modo come Σ_1 è diviso nelle due parti Σ'_1, Σ''_1.

Infatti, si ha

$$
(9)\qquad OC'_1 = \frac{1}{R'_1}\int_{\Sigma'_1} OPf_1 d\Sigma'_1\,, \qquad OC''_1 = \frac{1}{R''_1}\int_{\Sigma''_1} OPf_1 d\Sigma''_1\,,
$$

e quindi, tenuto conto delle (3),

$$
(10)\qquad C'_1C''_1 = -\,\frac{1}{R'_1}\int_{\Sigma_1} OPf_1 d\Sigma_1\,.
$$

La (10) mostra che la direzione del vettore $C'_1C''_1$ è quella del vettore non nullo $\int_{\Sigma_1} OPf_1 d\Sigma_1$ indipendente dalla suddivisione di Σ_1 considerata.

Analogamente il vettore $C'_2C''_2$ ha direzione indipendente dalla suddivisione considerata per Σ_2.

2. Lavoro della sollecitazione esterna per uno spostamento infinitesimo dei punti di applicazione delle forze.

Detti $\delta C'_1$, $\delta C''_1$, $\delta C'_2$, $\delta C''_2$ gli spostamenti infinitesimi di C'_1. C''_1, C'_2, C''_2 per effetto della deformazione del corpo, il lavoro,

δL, della sollecitazione totale è espresso da

(11) $$\delta L = \boldsymbol{R}_1' \times (\delta C_1' - \delta C_1'') + \boldsymbol{R}_2' \times (\delta C_2' - \delta C_2'') \; .$$

Dalle (5) segue

(12) $$\begin{aligned} \delta C_1' - \delta C_1'' &= - \delta l_1 \boldsymbol{u}_1 - l_1 \boldsymbol{\Theta}_1 \wedge \boldsymbol{u}_1 \; , \\ \delta C_2' - \delta C_2'' &= - \delta l_2 \boldsymbol{u}_2 - l_2 \boldsymbol{\Theta}_2 \wedge \boldsymbol{u}_2 \; , \end{aligned}$$

ove $\boldsymbol{\Theta}_1$ e $\boldsymbol{\Theta}_2$ sono i vettori che rispettivamente individuano le rotazioni delle rette $C_1'C_1''$ e $C_2'C_2''$.

Dalle (11), (12) segue quindi

(13) $$\delta L = - \delta l_1 \boldsymbol{R}_1' \times \boldsymbol{u}_1 - \delta l_2 \boldsymbol{R}_2' \times \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{\Theta}^* \times \boldsymbol{M} \; ,$$

dove si è posto $\boldsymbol{\Theta}^* = \boldsymbol{\Theta}_1 - \boldsymbol{\Theta}_2$.

3. Disuguaglianze di carattere generale per l'energia elastica e per il lavoro delle forze interne.

Si supponga la terna di riferimento $0\, x_1 x_2 x_3$ centrale d'inerzia e trirettangola levogira e si indichino con E il modulo di Young, con ν il coefficiente di Poisson, con $\mathscr{C}$ il volume del corpo, con ϱ_r^2 $(r = 1, 2, 3)$ le quantità $\dfrac{1}{\mathscr{C}} \displaystyle\int_{\mathscr{C}} x_r^2 d\mathscr{C}$, con a_{rs} e b_{rst} rispettivamente le coordinate astatiche ed iperastatiche del sistema e con c_{rst} le quantità

(14) $$c_{rst} = \frac{1}{2} \left(b_{rts} + b_{str} - b_{rst} \right) .$$

Esse coincidono con i valori medi in $\mathscr{C}$ dei prodotti delle caratteristiche di tensione per le coordinate. Indicando con W il doppio dell'energia potenziale elastica corrispondente all'intero corpo e supponendo il sistema isotropo ed omogeneo, si ha [1]

---

[1] G. GRIOLI: *Sulle deformazioni elastiche dovute a due coppie in equilibrio*, Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni (1946), pag. 305.

Il secondo membro di (15) può essere accresciuto mediante l'aggiunta

facilmente

$$W \geqslant \sum_{t=2}^{3} \frac{\mathscr{C}}{E} \frac{1}{\varrho_t^2} \{c_{1t}^2 + 2(1+\nu)[c_{4t}^2 + c_{5t}^2 + c_{6t}^2] - 2\nu c_{1t}(c_{2t} + c_{3t})\} , \tag{15}$$

ove si suppone

$$c_{rt} = c_{rrt} , \quad c_{4t} = c_{23t} , \quad c_{5t} = c_{31t} , \quad c_{6t} = c_{12t} ; \quad (r = 1, 2, 3) \quad (t = 1, 2, 3) . \tag{16}$$

Da (15), per il teorema di Clapeyron, si ha

$$\delta L \geqslant \sum_{t=2}^{3} \frac{\mathscr{C}}{E} \frac{1}{\varrho_t^2} \{c_{1t}^2 + 2(1+\nu)(c_{4t}^2 + c_{5t}^2 + c_{6t}^2) - 2\nu c_{1t}(c_{2t} + c_{3t})\} . \tag{17}$$

4. Flessione uniforme.

Consideriamo il caso in cui i vettori v_1 e v_2 siano fra loro paralleli ed inoltre paralleli al versore dell'asse x_1, i momenti delle coppie paralleli all'asse x_2 e $C_1'C_1''$, $C_2'C_2''$ paralleli e concordi all'asse x_3.

In tal caso si ha:

$$M_1 = M_3 = 0 , \tag{18}$$

$$\varphi_{i2} = \varphi_{i3} = 0 ; \qquad (i = 1, 2) \tag{19}$$

$$\varphi_{11} = \mp 1 , \qquad \varphi_{21} = \pm 1 , \tag{20}$$

$$\Psi_{i3} = 1 , \qquad \Psi_{i2} = 0 . \qquad (i = 1, 2) . \tag{21}$$

---

di termini corrispondenti ai valori medi dei prodotti delle caratteristiche di tensione per polinomi di grado comunque elevato nelle coordinate, ma le formule ed i raffronti che intendo stabilire non lo richiedono.

Vedi G. Grioli: *Relazioni quantitative per lo stato tensionale di un qualunque sistema continuo e per la deformazione di un corpo elastico in equilibrio*, Annali di Matematica pura ed applicata, Serie IV, Tomo XXXIII (1952), pag. 239.

Supponendo v_1 di verso opposto e v_2 concorde al versore dell'asse x_1 si potranno scegliere in (20) i segni superiori. Si ha così

$$M_2 = l_1 R_1' = l_2 R_2' , \tag{22}$$

$$a_{rs} = 0 , \qquad (r, s = 1, 2, 3) \tag{23}$$

$$b_{rst} = 0 \quad (r, s = 1, 2, 3) \; (t = 2, 3) , \tag{24}$$

$$b_{rs1} = \frac{1}{\mathscr{C}} \left\{ \int_{\Sigma_1'} f_1 x_r x_s d\Sigma_1' + \int_{\Sigma_1''} f_1 x_r x_s d\Sigma_1'' - \right. \tag{25}$$

$$\left. - \int_{\Sigma_2'} f_2 x_r x_s d\Sigma_2' - \int_{\Sigma_2''} f_2 x_r x_s d\Sigma_2'' \right\} \quad (r, s = 1, 2, 3) .$$

Infine per l'espressione del lavoro si ha dalla (13)

$$\delta L = \Theta_2^* M_2 . \tag{26}$$

Dalla (17) si trae facilmente

$$\Theta_2^* M_2 > \frac{\mathscr{C}}{E} \sum_{j=2}^{3} \alpha_j^2 \tag{27}$$

con

$$\alpha_j^2 = \frac{1}{\varrho_j^2} b_{1j1}^2 + \frac{1+\nu}{2} \left[\frac{1}{\varrho_j^2} \left(b_{3j1}^2 - b_{2j1}^2 \right) \right] . \tag{28}$$

Da (27) segue

$$| \Theta_2^* | > \frac{\mathscr{C}}{E \, | M_2 |} \sum_{j=2}^{3} \alpha_j^2 . \tag{29}$$

Osservazione I. - Qualora si supponga che Σ_1 e Σ_2 siano piane e giacciano su due piani paralleli a $0\,x_2 x_3$ e distanti l fra loro, si può porre $x_1 =$ cost. nelle espressioni che danno le b_{rst}, per cui

$$b_{121} = 0 , \qquad b_{131} = - \frac{l}{\mathscr{C}} M_2 . \tag{30}$$

Sostituendo in (29) si ha quindi, trascurando termini non negativi al secondo membro,

$$|\Theta_2^*| \geqslant \frac{|M_2|\, l^2}{E\mathscr{C}\varrho_3^2}\,. \tag{31}$$

5. Torsione.

Consideriamo il caso in cui i momenti delle due coppie siano paralleli all'asse x_1 (e per esempio sia $\boldsymbol{M}$ concorde col versore di x_1) e $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ ortogonali rispettivamente ad $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$. Si ha

$$M_2 = M_3 = 0\,, \tag{32}$$

$$M_1 = l_1 R_1' = l_2 R_2'\,, \tag{33}$$

$$\varphi_{i1} = \Psi_{i1} = 0 \qquad (i = 1,\ 2)\,, \tag{34}$$

$$\varphi_{i2}\Psi_{i2} + \varphi_{i3}\Psi_{i3} = 0 \qquad (i = 1,\ 2)\,, \tag{35}$$

$$\varphi_{i2}\Psi_{i3} - \varphi_{i3}\Psi_{i2} = \pm 1\,, \tag{36}$$

dovendosi scegliere il segno superiore per $i = 1$ e quello inferiore per $i = 2$ nella (36).

Ne consegue

$$b_{rs1} = 0 \qquad (r,\ s = 1,\ 2,\ 3)\,, \tag{37}$$

$$\delta L = \Theta_1^* M_1\,. \tag{38}$$

Dalla (17) si ha quindi

$$\begin{aligned} |\Theta_1^*| \geqslant \frac{\mathscr{C}}{E\,|M_1|} \Big\{ \sum_{t=2}^{3} \frac{1}{\varrho_t^2} \left[\frac{b_{11t}^2}{4} + 2\nu\, \frac{b_{11t} b_{ttt}}{4} \right] + \\ + 2(1+\nu) \left[\frac{(b_{123} - b_{132})^2}{4\varrho_2^2} + \frac{(b_{132} - b_{123})^2}{4\varrho_3^2} \right] + 2(1+\nu) \left[\frac{b_{223}^2}{4\varrho_3^2} + \right. \\ \left. + \frac{b_{332}^2}{4\varrho_3^2} \right] + 2\nu \left[\frac{2b_{112}b_{323} - b_{112}b_{332}}{4\varrho_2^2} + \frac{2b_{113}b_{232} - b_{113}b_{223}}{4\varrho_3^2} \right\}. \end{aligned} \tag{39}$$

Osservazione II. – Supposte valide le ipotesi della osservazione I, si ha

$$b_{112} = b_{113} = 0 \,, \tag{40}$$

e, da (39), trascurando termini non negativi al secondo membro, si deduce

$$\Theta_1^* M_1 \geqslant \frac{\mathscr{C}}{E} 2(1 + \nu)\left[\frac{(b_{123} - b_{132})^2}{4}\left(\frac{1}{\varrho_2^2} + \frac{1}{\varrho_3^2}\right)\right]. \tag{41}$$

Di qui, osservando che

$$(b_{123} - b_{132})^2 = \frac{M_1^2 l^2}{\mathscr{C}^2} \tag{42}$$

e sostituendo tale espressione in (41) si trae

$$|\,\Theta_1^*\,| \geqslant \frac{(1 + \nu)l^2}{2\mathscr{C}E}\,|\,M_1\,|\left(\frac{1}{\varrho_2^2} + \frac{1}{\varrho_3^2}\right). \tag{43}$$

6. Conclusioni.

La (29) e la (39) danno delle limitazioni inferiori in casi che possono dirsi di flessione uniforme e di torsione. In particolare, le (31), (43) coincidono con le formule già ottenute da G. Grioli [2]) nel caso in cui le forze agenti siano solo quattro e costituenti due coppie in equilibrio.

Le (31), (43) si possono utilmente confrontare con le corrispondenti che le teorie di De Saint-Venant e di Navier danno rispettivamente per la flessione e per la torsione di un cilindro omogeneo ed isotropo, con la conclusione che quelle teorie danno deformazioni più piccole di quelle che in realtà il sistema differenziale dell'elastostatica presuppone.

---

[2]) Loc. cit. nota [1]).