RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DEMETRIO MANGERON
L. E. KRIVOŠEIN

Sopra i problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali lineari a derivate parziali con derivata d'ordine superiore di Picone

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 33 (1963), p. 226-266
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__226_0>

SOPRA I PROBLEMI AL CONTORNO PER LE EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI LINEARI A DERIVATE PARZIALI CON DERIVATA D'ORDINE SUPERIORE DI PICONE

Nota *) *di* DEMETRIO MANGERON (*a Iasi*)
e L. E. KRIVOŠEIN (*a Frunze*)

L'importanza vieppiù crescente accordata in questi ultimi tempi alle schematizzazioni matematiche, tradotte in equazioni integro-differenziali lineari o no, dei problemi di fisica, meccanica, teoria dell'elasticità e tecnica, incominciando col problema di trasporto delle particelle (V. S. Vladimirov [1], G. F. Kohlmayr [2] ed altri ancora) e concludendo col problema di stabilità delle soluzioni dell'equazione del plasma linearizzata, oppure con lo studio della dinamica dei reattori (R. Bellman e J. M. Richardson [3], J. J. Levin e J. A. Nohel [4] ed altri), ha contribuito alla spinta verso l'elaborazione dei nuovi metodi di studio dei problemi al contorno concernenti svariate classi di equazioni integro-differenziali, includendovisi anche i procedimenti di calcolo numerico e di programmazione. Si debbono citare in questo proposito i lavori delle scuole di M. Picone [5], di V. Ia. Bykov [6], [7], di S. Vasilache [8], come pure parecchi lavori degli autori stessi.

Questo lavoro costituisce la continuazione di una serie di note

---

*) Pervenuta in Redazione il 19 Dicembre 1962.
Indirizzi degli Autori: Seminario Matematico dell'Istituto Politecnico di Iasi (Repubblica Popolare Romena) e Facoltà di Scienze Matematiche e Fisiche dell'Università di Frunze (U.R.S.S.).

degli autori [9]-[16] relative alla teoria delle equazioni integro-differenziali lineari.

Nel § 1 si studiano i problemi di esistenza e di struttura delle soluzioni dei problemi di Goursat e di Dirichlet per equazioni integro-differenziali alle derivate parziali, relativi a domini d'integrazione costanti e variabili.

Tramite certe trasformazioni integrali appositamente costruite si perviene a sistemi di equazioni integrali, la cui analisi conduce ad una serie di conclusioni concernenti la risolubilità e la struttura delle soluzioni delle equazioni di partenza.

Nel § 2 si espongono i metodi di determinazione approssimata delle soluzioni dei problemi considerati, elaborati dagli autori, e cioè: i metodi delle ineguaglianze integrali, dei polinomi del tipo di S. N. Bernstein e delle formule di cubatura, includendovisi le valutazioni degli errori commessi.

Il § 3 è consacrato alla risoluzione delle equazioni integro-differenziali alle derivate parziali mediante l'applicazione di polinomi del tipo di S. N. Bernstein appositamente costruiti. Un tale procedimento conduce alla riduzione del problema considerato ad un sistema di equazioni integro-differenziali ordinarie.

Il § 4 è consacrato alla deduzione delle valutazioni *a posteriori* e a *priori* delle soluzioni dei problemi al contorno per alcuni tipi di equazioni integro-differenziali alle derivate parziali. Nell'ambito delle valutazioni a *priori* è stata dedotta un'ineguaglianza che può essere considerata in un certo senso come l'analogo bidimensionale dell'ineguaglianza oramai classica di Gronwall, largamente utilizzata nella teoria qualitativa delle equazioni differenziali.

Rinunciamo qui all'enumerazione degli indirizzi in cui procede la via di estensione e di generalizzazione dei risultati conseguiti, rinviando alle sorgenti di questo lavoro che constano di una serie di note del primo degli autori [17]-[20], già utilizzate con profitto da F. Manaresi [21], M. Salvadori [22], E. de Giorgi [23], G. Stampacchia [24], M. Yu. Berezanski [25] ed altri ancora, relative ad un ***nuovo tipo di problemi al contorno*** per gli operatori differenziali non ellittici

$$(a) \qquad [A(x)u' + \lambda B(x)u]' + \lambda[B(x)u' + C(x)u] = 0\,,$$

$$(b) \qquad u\,|_{FR} = 0\,, \quad R(x_i^* \leqslant x_i \leqslant x_i^{**})\,,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 2n)\,,$$

ove u' rappresenta la derivata totale di una funzione $u(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$, introdotta dall'illustre accademico linceo M. Picone [26] e definita tramite

$$(c) \qquad Du \equiv u' = \frac{\partial^{2n} u}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{2n}}$$

e di una serie di lavori del secondo, concretizzati nella sua tesi di abilitazione [27]; e segnaliamo soltanto il fatto che l'ineguaglianza assai interessante (4.18), relativa alle equazioni integro-differenziali considerate in questo § 4, appositamente modificata, può essere applicata anche alla valutazione delle soluzioni di equazioni integrali ad un numero qualunque di dimensioni.

§ 1. Risolubilità e struttura delle soluzioni dei problemi al contorno non omogenei di Goursat e di Dirichlet.

a) *Il problema di Goursat.*

Consideriamo il problema di risolubilità e di struttura della soluzione del problema di Goursat [28]:

$$(1.1) \qquad [D^i u(x, y)]_{x=a} = \varphi_i(y)\,; \qquad [D^i u(x, y)]_{y=c} = \psi_i(x)$$
$$(i = 0, 1, \ldots, k-1)$$

per l'equazione integro-differenziale alle derivate parziali

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} D^k u(A) + \lambda \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} &= \\ = f(A) + \lambda \iint_S \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j}\, dB, \end{aligned}$$

ove $Du(A) \equiv \dfrac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}$ è la derivata totale nel senso di Picone, mentre

$$\frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} \equiv \frac{\partial^{i+j} u(\xi, \eta)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} ;$$

$$\frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} \equiv \frac{\partial^{i+j} u(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} ; \qquad \text{dove} \qquad f(A) \equiv f(x, y) ;$$

$$K_{ij}(A, B) \equiv K_{ij}(x, y, \xi, \eta) , \qquad \varphi_i(y) , \qquad \psi_i(x) ,$$

$r_{ij}(A) \equiv r_{ij}(x, y)$ sono funzioni continue note per tutti i valori delle variabili $x, \xi \in [a, b]$, $y, \eta \in [c, d]$; $S = [a, b] \times [c, d]$ è un rettangolo; $u(A) \equiv u(x, y)$ è la funzione ricercata; λ è un parametro: k un numero naturale arbitrario. Inoltre almeno una delle funzioni $K_{ij}(A, B)$ non diventa identicamente nulla se $\{(x, y), (\xi, \eta)\} \in T = \{a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant \eta \leqslant y \leqslant d\}$, oppure $\{(x, y), (\xi, \eta)\} \in S - T$.

Cerchiamo di determinare la soluzione del problema (1.1), (1.2) nella classe delle funzioni continue, $2k$ volte continuamente derivabili [36], del tipo

$$u(A) = \Phi(A) + \lambda \iint_T N(A, B) v(B) dB , \tag{1.3}$$

ove $\Phi(A)$ e $N(A, B)$ sono funzioni note, soddisfacenti alle condizioni seguenti:

$$D^k \Phi(A) = f(A), \quad [\Phi^i(A)]_{x=a} = \varphi_i(y), \quad [D^i \Phi(A)]_{y=c} = \psi_i(x), \quad (i = 0, 1, \ldots, k-1) ; \tag{1.4}$$

$$N(A, B) \equiv [(x - \xi)(y - \eta)]^{k-1} : [(k-1)!]^2 ; \quad dB = d\xi d\eta ; \tag{1.5}$$

e $v(A)$ è la nuova funzione incognita, definita tramite la formola

$$\begin{aligned} v(A) = {} & \iint_S \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} dB - \\ & - \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} . \end{aligned} \tag{1.6}$$

Applicando l'operatore

$$P[\,\cdot\,] \equiv \iint_S \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j}}{\partial \xi^i \partial \eta^j} dB - \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}$$

all'equazione (1.3), si ottiene l'equazione integrale nella nuova funzione incognita $v(A)$:

$$(1.7) \qquad \begin{aligned} &v(A) - \lambda \iint_T L_1(A, B) v(B) dB - \\ &- \lambda \iint_S L_2(A, B) v(B) dB = F(A, \lambda)\,, \end{aligned}$$

ove $L_1(\,\cdot\,)$, $L_2(\,\cdot\,)$ e $F(\,\cdot\,)$ sono funzioni note, continue per tutti i valori delle variabili $\{(x, \xi), (y, \eta)\} \in S$. L'equazione (1.7) può essere scritta sotto la forma più concentrata

$$(1.8) \qquad v(A) - \lambda \iint_S L(A, B) v(B) dB = F(A, \lambda)\,.$$

Dall'equazione (1.8) risulta che, se λ non è un autovalore del nucleo $L(A, B)$, esiste ed è unica la soluzione del problema iniziale (1.1), (1.2). Infatti, in questo caso esiste, la soluzione unica, dell'equazione (1.8), che trascriviamo sotto la forma $v(A) = w(A, \lambda)$. Pertanto

$$(1.9) \qquad u(A) = \Phi(A) + \lambda \iint_T N(A, B) w(B, \lambda) dB$$

è la soluzione del problema considerato.

Se λ è un autovalore del nucleo $L(A, B)$ di rango r, allora la soluzione del problema (1.8) e per conseguenza anche la soluzione ricercata del problema (1.1), (1.2) esiste allora ed allora soltanto che siano soddisfatte le eguaglianze

$$(1.10) \qquad \iint_S F(A, \lambda) h_i(A) dA = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

ove $h_i(A)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ sono le autosoluzioni corrispondenti all'autovalore λ del nucleo aggiunto del nucleo $L(A, B)$.

Nell'ipotesi che le condizioni (1.10) siano soddisfatte, si ha

$$(1.11) \qquad u(A) = \Phi(A) + \lambda \iint\limits_T N(A, B)[w_0(B, \lambda) + \sum_1^r q_i w_i(B)]dB\,,$$

ove $w_0(A, \lambda)$ è una soluzione particolare arbitraria dell'equazione (1,8), $w_i(A, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ sono le autofunzioni corrispondenti all'autovalore λ del nucleo $L(A, B)$ e $q_1, q_2, \ldots, q_r$ sono costanti arbitrarie.

Se le funzioni $K_{ij}(A, B)$ $(i, j = 0, 1, \ldots, k)$ sono tali che hanno luogo le uguaglianze

$$(\mathrm{V}) \qquad K_{ij}(A, B) \equiv \begin{cases} K^*_{ij}(A, B)\,, & B \in T \\ 0 \quad , & B \in S - T\,, \end{cases}$$

allora il problema (1.1), (1.2) ha sempre una soluzione unica nella classe di funzioni continue, $2k$ volte continuamente derivabili. Infatti, in questo caso l'equazione (1.7) diventa

$$(1.12) \qquad v(A) - \lambda \iint\limits_T K(A, B)v(B)dB = F(A, \lambda)\,.$$

Poichè l'equazione (1.12) possiede sempre soluzione, che rappresenteremo sotto la forma $v(A) = \mathbf{E}(A, \lambda)$, risulta che

$$u(A) = \Phi(A) + \lambda \iint\limits_T N(A, B)\mathbf{E}(B, \lambda)dB$$

è l'unica soluzione $2k$ volte continuamente derivabile del problema considerato.

Si può quindi enunciare il seguente

Teorema 1: *Se λ non è un autovalore del nucleo $L(A, B)$, allora il problema* (1.1), (1.2) *possiede una sola soluzione $2k$ volte derivabile con derivate continue, che si rappresenta sotto la forma* (1.9).

Se invece λ è un autovalore di rango r del nucleo $L(A, B)$, allora l'esistenza della soluzione del problema (1.1), (1.2) *nella classe delle funzioni provviste di derivate sino all'ordine $2k$ incluso continue è assicurata allora ed allora soltanto che abbiano luogo le uguaglianze* (1.10). *Quest'ultime essendo soddisfatte, l'unicità della soluzione del problema posto — come risulta dalla formola* (1.1) *— non ha più luogo.*

Il problema (1.1), (1.2) *possiede sempre una soluzione unica $2k$ volte continuamente derivabile se i nuclei dell'equazione integro-differenziale* (1.2) *godono della proprietà* (V).

b) *Il problema di Dirichlet.*

Ci proponiamo di stabilire le condizioni che assicurano l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Dirichlet

$$(1.13) \qquad u(A)\,|_R = \mu_0(x, y)\ ; \qquad D^i u(A)\,|_{R_1} = \mu_i(x, y)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k-1)\,,$$

per l'equazione integro-differenziale (1.2), ove R è il contorno del dominio S;

$$(1.14) \qquad R_1 \equiv \begin{cases} x = a\,, & c \leqslant y \leqslant d\,, \\ y = c\,, & a \leqslant x \leqslant b\,; \end{cases}$$

$\mu_i(x, y)$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$ sono funzioni continue note per tutti i valori delle variabili $(x, y) \in S$.

La soluzione del problema (1.13), (1.2) si costruisce sotto la forma

$$(1.15) \qquad u(A) = \pi(A) + \lambda \iint_S M(A, B) v(B) dB\,,$$

ove $v(A)$ è la nuova funzione incognita, determinata tramite la relazione (1.6), $\pi(A)$ è una funzione nota, soddisfacente alle condizioni al contorno non omogenee (1.13), mentre $M(A, B)$ è la funzione nota [29], definita come segue

$$M(x, y, \xi, \eta) \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} \dfrac{[(x-a)(b-\xi)(y-c)(d-\eta)]^{k-1}}{[(b-a)(d-c)]^{k-1}\cdot(k-1)\,!}\,, & x \leqslant \xi;\ y \leqslant \eta, \\[2ex] \left\{ \dfrac{[(x-a)(b-\xi)]^{k-1}}{(b-a)^{k-1}} - (x-\xi)^{k-1} \right\}\cdot \\ \qquad\qquad \dfrac{[(y-c)(d-\eta)]^{k-1}}{(d-c)^{k-1}(k-1)\,!^{2}}\,, & x \geqslant \xi;\ y \leqslant \eta. \\[2ex] \left\{ \dfrac{[(y-c)(d-\eta)]^{k-1}}{(d-c)^{k-1}} - (y-\eta)^{k-1} \right\}\cdot \\ \qquad\qquad \dfrac{[(x-a)(b-\xi)]^{k-1}}{(b-a)^{k-1}(k-1)\,!^{2}}\,, & x \leqslant \xi,\ y \geqslant \eta, \\[2ex] \left\{ \dfrac{[(x-a)(b-\xi)]^{k-1}}{(c-a)^{k-1}} - (x-\xi)^{k-1} \right\}\cdot \\ \quad \cdot\left\{ \dfrac{[(y-c)(d-\eta)]^{k-1}}{(d-c)^{k-1}\cdot(k-1)\,!^{2}} - \dfrac{(y-\eta)^{k-1}}{(k-1)\,!^{2}} \right\}, & x \geqslant \xi,\ y \geqslant \eta. \end{cases} \tag{1.16}$$

Dalla struttura della funzione (1.16) si vede che essa soddisfa alle condizioni omogenee al contorno

$$M(A, B)\,|_{R} \equiv 0, \quad D^{i}M(A, B)\,|_{R_1} = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, k-1). \tag{1.17}$$

La funzione (1.15) soddisfa le condizioni al contorno (1.13) qualunque sia la funzione $v(A)$. Ci resta da determinare la $v(A)$ in modo che la funzione (1.15) soddisfi l'equazione integro-differenziale (1.2). Sostituendo (1.15) nella (1.6) ed eseguendo le semplificazioni necessarie, si perviene all'equazione integrale

$$v(A) = \omega(A) + \lambda \iint_{S} E(A, B) v(B) dB\,, \tag{1.18}$$

ove $\omega(A)$ e $E(A, B)$ sono funzioni note per tutti $(A, B) \in S$.

Adunque il problema di risolubilità del sistema (1.13), (1.2) si è ridotto al problema di risolubilità dell'equazione integrale (1.18). Epperciò, se esiste una soluzione continua dell'equazione (1.18), allora esiste pure soluzione del problema al contorno iniziale nella classe delle funzioni $2k$ volte continuamente derivabili. Sia $v(A) = W_0(A, \lambda)$ soluzione del problema (1.18). Allora

$$(1.19) \qquad u(A) = \pi(A) + \lambda \iint_S M(A, B) W_0(B, \lambda) dB$$

è la soluzione del problema (1.13), (1.2).

Si ha per conseguenza il seguente

TEOREMA 2: *Il problema* (1.13), (1.2) *è equivalente al sistema delle equazioni integrali* (1.15), (1.18) *nel senso che la risolubilità del sistema delle equazioni* (1.15), (1.18) *porta di conseguenza la risolubilità del problema al contorno iniziale. Il problema* (1.13), (1.2) *è risolubile nella classe delle funzioni* $2k$ *volte continuamente derivabili allora ed allora soltanto che esista una soluzione continua dell'equazione integrale* (1.18). *Tuttavia, se* λ *non è un autovalore del nucleo* $E(A, B)$, *allora la soluzione del problema* (1.13), (1.2) *si determina univocamente secondo la formola* (1.19). *Se però* λ *è un autovalore di rango* ν *del nucleo* $E(A, B)$, *allora non esiste soluzione del problema se le autofunzioni* $m_1(A), m_2(A), \ldots, m_\nu(A)$ *corrispondenti all'autovalore* λ *del nucleo* $E(A, B)$ *non sono ortogonali alla* $\omega(A)$, *se invece hanno luogo le uguaglianze*

$$\iint_S m_i(A)\omega(A) dA = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

allora la soluzione esiste, ma non è univocamente determinata, ed è data dalla formula

$$(1.20) \quad v(A) = \pi(A) + \lambda \iint_S M(A, B)[v_0(B, \lambda) + \sum_{i=0}^{\nu} q_i v_i(B)] dB,$$

ove $V_0(A, \lambda)$ *è una soluzione arbitraria particolare dell'equazione* (1.18), $v_1(A), v_2(A), \ldots, v_\nu(A)$ *sono le autofunzioni corrispondenti al valore proprio* λ *del nucleo* $E(A, B)$, $q_1, q_2, \ldots, q_\nu$ *sono costanti arbitrarie.*

Osservazione 1: A differenza dal problema (1.1), in corrispondenza all'equazione integro-differenziale

$$
\begin{aligned}
&D^*u(A) + \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j}u(A)}{\partial x^i \partial y^j} = \\
(1.21)\qquad &= f(A) + \lambda \iint_T \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K^*_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j}u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j}\, dB\,,
\end{aligned}
$$

il problema (1.13), (1.21) può essere: *a*) univocamente risolubile, *b*) irrisolubile, oppure *c*) non univocamente risolubile nella classe delle funzioni $2k$ volte continuamente derivabili. Infatti, applicando all'equazione (1.15) l'operatore

$$
\begin{aligned}
r(A) \equiv &- \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j}u(A)}{\partial x^i \partial y^j} + \\
&+ \iint_T \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K^*_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j}u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j}\, dB\,,
\end{aligned}
$$

si perviene all'equazione integrale di forma (1.18).

2. Se nella (1.2) hanno luogo le uguaglianze

$$r_{ij}(A) \equiv 0\,, \quad K_{ij}(A, B) \equiv 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, k)$$

e

$$r_{00}(A) \not\equiv 0\,, \qquad K_{00}(A, B) \not\equiv 0\,, \qquad (A, B) \in S\,,$$

allora la risoluzione del problema (1.13), (1.2) conduce all'equazione integrale

$$
\begin{aligned}
&u(A) = \pi(A) + \\
&+ \lambda \iint_S M(A, B) \left[r_{00}(B)u(B) + \iint_S K_{00}(B, C)u(C)\, dC \right] dB \equiv \\
(1.22)\qquad & \\
&\equiv \pi(A) + \lambda \iint_S E_0(A, B)u(B)\,dB\,,
\end{aligned}
$$

la cui soluzione risulta tuttavia anche la soluzione del problema iniziale.

§ 2. Risoluzione con approssimazione dei problemi al contorno.

1. I metodi di risoluzione dei problemi al contorno elaborati nel § 1 erano adatti al caso in cui sono noti i nuclei risolventi dei nuclei delle equazioni integrali (1.8), (1.12), (1.18), ... Consideriamo adesso il caso in cui i nuclei risolventi testè mentovati sono sconosciuti. Per fissare le idee, consideriamo il problema al contorno (1.13), (1.2). Supponiamo che nell'equazione (1.18) abbiano luogo per tutti $(A, B) \in S$ le seguenti ineguaglianze:

$$E(A, B) \geqslant 0\,, \quad \omega(A) > 0\,, \quad \lambda > 0\,. \tag{2.1}$$

È soddisfatta inoltre la condizione di esistenza e di unicità della soluzione del problema proposto e

$$l_1 = 1 - \max_{Q} \iint_{S} \lambda E(A, B) dB > 0\,, \tag{2.2}$$

ove $Q = \{0 < \lambda < \lambda_1;\ S\}$, mentre le funzioni note $v_0(A)$ e $w_0(A)$ sono tali, che hanno luogo le ineguaglianze

$$v_0(A) - \lambda \iint_{S} E(A, B) v_0(B) dB - \omega(A) \equiv \alpha_0(A, \lambda) \leqslant 0\,, \tag{2.3}$$

$$w_0(A) - \lambda \iint_{S} E(A, B) w_0(B) dB - \omega(A) \equiv \beta_0(A, \lambda) \geqslant 0\,. \tag{2,4}$$

Allora

$$v_0(A) \leqslant v(A) \leqslant w_0(A)\,, \qquad A \in S\,. \tag{2.5}$$

Le approssimazioni ulteriori della funzione $v(A)$ si realizzano secondo le formole

$$v_i(A) = v_0(A) - \sum_{p=0}^{i-1} \alpha_p(A, \lambda)\,, \tag{2.6}$$

$$(2.7) \qquad w_i(A) = w_0(A) - \sum_{p=0}^{i-1} \beta_p(A, \lambda),$$

ove $\alpha_p(A, \lambda)$ e $\beta_p(A, \lambda)$ sono le deviazioni d'ordine p, che si ottengono in seguito della sostituzione delle funzioni $v_p(A)$ e $w_p(A)$ rispettivamente nell'equazione (1.18). Tuttavia vi sono valide le ineguaglianze

$$(2.8) \qquad v_i(A) \leqslant v(A) \leqslant w_i(A) \quad (A \in S, i = 1, 2, \dots).$$

La condizione (2.2) assicura la convergenza assoluta ed uniforme delle successioni $\{v_i(A)\}_0^\infty$, $\{w_i(A)\}_0^\infty$ verso la funzione $v(A)$. In tal modo si ha

$$(2.9) \qquad \lim_{i\to\infty} u_i(A) = \pi(A) + \lambda \iint_S M(A, B)[v_0(B) - \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p(B, \lambda)]dB = u(A);$$

$$(2.10) \qquad \lim_{i\to\infty} U_i(A) = \pi(A) + \lambda \iint M(A, B)[w_0(B) - \sum_{p=0}^{\infty} \beta_p(B, \lambda)]dB = u(A).$$

Se ci si ferma al passo d'ordine i, l'errore commesso può essere valutato secondo le ineguaglianze

$$(2.11) \qquad \left.\begin{array}{l} |\, D^p[u(A) - u_i(A)] \,| \\ |\, D^p[u(A) - U_i(A)] \,| \end{array}\right| \leqslant \lambda \iint_S |\, D^p_A M(A, B) \cdot [U_i(B) - u_i(B)] \,|\, dB, \qquad (A, \lambda) \in Q\colon\ p = 0, 1, \dots, k-2.$$

Se $\lambda > 0$, $E(A, B) \leqslant 0$, la funzione $\omega(A)$ cambia di segno nello S; $(A, B) \in S$, hanno luogo le ineguaglianze

$$(2.12) \qquad l_\nu = 1 - \lambda^{\nu+1} \iint_S |\, E_{\nu+1}(A, B) \,|\, dB > 0,$$

$$(2.13) \qquad \omega(A) + \sum_{i=1}^{\nu} \lambda^i \iint_S E_i(A, B) dB \geqslant 0$$

e se si ha

$$E_{\nu+1}(A, B) \geqslant 0 \tag{2.14}$$

oppure $E_{\nu+1}(A, B) \leqslant 0$, $(A, \lambda) \in Q$, ove $E_r(A, B)$ è il nucleo iterato d'ordine r rispetto al nucleo $E(A, B)$, allora, si possono costruire pure in questo caso due successioni di funzioni approssimanti la funzione rispettivamente dal di sopra e dal di sotto [30]. Si deve sottolineare che in questo caso, nell'ipotesi di validità delle ineguaglianze (2.12), (2.13) e della $E_{\nu+1}(A, B) \leqslant 0$, $(A, B) \in S$, si possono costruire, ad esempio, partendo da una funzione $v_0(A) \leqslant v(A)$, $A \in S$, le ineguaglianze

$$v_{2i}(A) \leqslant v(A) \leqslant v_{2i+1}(A) \quad (i = 0, 1, \ldots; A \in S). \tag{2.15}$$

In questo caso per le funzioni $u_i(A)$ e $U_i(A)$ si prendono

$$\begin{aligned} u_i(A) &= \pi(A) + \lambda \iint_S M(A, B) v_{2i}(B) dB, \\ U_i(A) &= \pi(A) + \lambda \iint_S M(A, B) v_{2i+1}(B) dB, \end{aligned} \tag{2.16}$$

e l'errore commesso si può valutare secondo l'ineguaglianza (2.11).

2. In una serie di lavori del tutto recenti [31], [32] si è elaborato un metodo polinomiale per la risoluzione approssimata delle equazioni integro-differenziali. Proponiamoci di applicare in ciò che segue il metodo polinomiale alla risoluzione del problema al contorno (1.13), (1.2). Senza menomare la generalità, poniamo inoltre soltanto per semplificare la scrittura nella (1.2) $r_{k-1,k-1}(A) \equiv 0$, $A \in S$ e supponiamo che il problema considerato possieda nel dominio Q una soluzione unica nella classe delle funzioni $2k$ volte continuamente derivabili. Sia $v(A) = W_1(A, \lambda)$ una soluzione continua dell'equazione (1.18) per tutti i valori

$$(A, \lambda) \in Q = \{S, \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2\}.$$

Costruiremo una soluzione approssimata dell'equazione (1.18) sotto forma di polinomio del tipo di S. N. Bernstein [33]:

$$C_{np}(A) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{p} T_{n\nu}(x) T_{ps}(y) v(\nu : n, s : p) , \tag{2.18}$$

ove

$$T_{n\nu}(x) = C_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu} : \qquad T_{ps}(y) = C_p^s y^s (1-y)^{p-s} ; \tag{2.19}$$

mentre come al solito con C_r^i si è notato il numero delle combinazioni di r elementi a i a i. Tenendo conto delle ipotesi fatte, hanno luogo le uguaglianze

$$\lim_{n,p\to\infty} C_{np}(A) = v(A) , \tag{2.20}$$

$$\pi(A) + \lambda \lim_{n,p\to\infty} \iint_S M(A, B) C_{np}(B) dB = u(A) . \tag{2.21}$$

Per conseguenza, se ci si ferma alla suddivisione (n, p) del quadrato S, si può considerare la funzione

$$\pi(A) + \lambda \iint_S M(A, B) \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{p} v(\nu : n, s : p) T_{n\nu}(\xi) T_{ps}(\eta) d\xi d\eta \tag{2.22}$$

come soluzione approssimata del problema (1.13), (1.2). Per la determinazione dei coefficienti incogniti $v(\nu : n, s : p)$ formiamo il sistema

$$\begin{gathered} \bar{v}(i : n, j : p) - \lambda \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{p} \bar{v}(\nu : n, s : p) \iint_S E(i : n, j : p, \xi, \eta) \cdot \\ \cdot T_{n\nu}(\xi) T_{ps}(\eta) d\xi d\eta = \omega(i : n, j : p) \\ (i = 0, 1, \ldots, n ; \; j = 0, 1, \ldots, p). \end{gathered} \tag{2.23}$$

Supponiamo che il determinante del sistema (2.23), $\Delta_{np}(\lambda)$, sia diverso da zero. Allora (2.23) ci conduce alla determinazione delle incognite

$$\bar{v}(\nu : n, s : p) = \varphi_{np}(\nu, s, \lambda) \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n ; \; s = 0, 1, \ldots, p),$$

ove $\varphi_{np}(\nu, s, \lambda)$ sono quantità note.

Consideriamo la funzione

$$\overline{u}_{np}(A) = \pi(A) +$$

$$(2.24) \qquad + \lambda \iint_S M(A, B) \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{p} \varphi_{np}(\nu, s, \lambda) T_{n\nu}(\xi) T_{ps}(\eta) d\xi d\eta$$

come soluzione approssimata del nostro problema.

Se ha luogo l'ineguaglianza (2.2), la valutazione della deviazione tra le funzioni $\overline{u}_{np}(A)$ e $u(A)$ per tutti $A \in S$ si consegue nel modo seguente. Introduciamo la funzione

$$\overline{r}_{np}(A, \lambda) = \overline{C}_{np}(A) - \lambda \iint_S E(A, B) \overline{C}_{np}(B) dB - \omega(A) .$$

Si ha allora

$$(2.25) \qquad | r(A) - \overline{C}_{np}(A) | \leqslant \max_Q | \overline{r}_{np}(A, \lambda) | : l_1 = \sigma ,$$

$$(2.26) \qquad | u(A) - \overline{u}_{np}(A) | \leqslant \sigma \iint_S | \lambda M(A, B) | dB ,$$

ove

$$\overline{C}_{np}(A) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{p} \varphi_{np}(\nu, s, \lambda) T_{n\nu}(x) T_{ps}(y) , \qquad (A, \lambda) \in Q .$$

Una via alquanto diversa dall'applicazione dei polinomi del tipo di S. N. Bernstein alla risoluzione del problema (1.13), (1.2) consiste in ciò che segue. Nelle nostre ipotesi ha luogo l'eguaglianza al limite

$$(2.27) \qquad \lim_{n,p\to\infty} \frac{\partial^{i+j} B_{np}(A)}{\partial x^i \partial y^j} = \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, k),$$

ove

$$(2.28) \qquad B_{np}(A) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{p} u(\nu : n, s : p) T_{n\nu}(x) T_{ps}(y) .$$

Partiamo dalla formola (1.15), che trascriviamo sotto la forma

$$
\begin{aligned}
u(A) = \pi(A) - \lambda \iint_S M(A, B) \Bigg[\sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} - \\
- \iint_S \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j} u(C)}{dt^i \partial \tau^j} dC \Bigg] dB \,. \qquad (2.29)
\end{aligned}
$$

Introduciamo nella (2.29) invece di $u(\cdot)$ la funzione $B_{np}(\cdot)$, ponendo poi $x = \alpha : n$, $y = \beta : p$ e tenendo conto del fatto che sulle rette $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ $u(A)$ è una quantità nota, si perviene al seguente sistema di equazioni

$$
\begin{aligned}
\overline{u}(\alpha : n, \beta : p) - \lambda \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{p} \overline{u}(\nu : n, s : p) \sigma_{np}(\alpha, \beta) = \\
= \pi(\alpha : n, \beta : p) \qquad (2.30)
\end{aligned}
$$

$$
(\alpha = 0, 1, \ldots, n - 1, \beta = 0, 1, \ldots, p - 1)\,,
$$

ove

$$
\begin{aligned}
\sigma_{np}(\alpha, \beta) = \\
= \iint_S M(\alpha : n, \beta : p, B) \Bigg[\sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(B) \frac{\partial^{i+j}}{\partial \xi^i \partial \eta^j} T_{n\nu}(\xi) T_{ps}(\eta) - \qquad (2.31) \\
- \iint_S \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}(B, C) \frac{\partial^{r+j}}{\partial t^i \partial \tau^j} T_{n\nu}(t) T_{ps}(\tau) dC \Bigg] dB \,.
\end{aligned}
$$

Se il determinante del sistema (2.30) è diverso da zero, esso conduce alla determinazione delle incognite $\overline{u}(\nu : n, s : p)$, potendosi quindi scrivere

$$
\overline{u}(\nu : n, s : p) = \theta_{np}(\nu, s, \lambda) \qquad (2.32)
$$

$$
(\nu = 1, 2, \ldots, n - 1;\ s = 1, 2, \ldots, p - 1)\,.
$$

Per conseguenza, tutte le quantità a secondo membro delle

(2.28) sono note e per la soluzione approssimata del nostro problema si prende la funzione

$$\overline{u}_{n\nu}(A) = \pi(A) + \lambda \iint\limits_S M(A, B)P[\overline{B}_{n\nu}]dB \,, \tag{2.33}$$

ove

$$\overline{B}_{n\nu}(A) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{p} \theta_{n\nu}(\nu, s, \lambda) T_{ni}(x) T_{\nu j}(y) \;;$$

$$\theta_{n\nu}(0, s, \lambda) = \pi(0, s; p) \;;$$

$$\theta_{n\nu}(\nu, 0, \lambda) = \pi(\nu : n, 0) \qquad (s = 0, 1, \dots, p; \nu = 0, 1, \dots, n) \,.$$

La valutazione dell'errore commesso si conduce nel modo seguente. Sia $\alpha_{n\nu}(A, \lambda)$ la deviazione ottenuta come risultato della sostituzione nell'equazione (2.29) della funzione (2.33). Ponendo

$$z(A) = \overline{u}_{n\nu}(A) - u(A) \,, \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned} h(A) = P[z(A)] \equiv \iint\limits_S \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}(A, B) \frac{\partial^{r+j} z(B)}{dt^r \partial \tau^j} dB \,- \\ - \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} z(A)}{\partial x^r \partial y^j} \,, \end{aligned} \tag{2.35}$$

si perviene al sistema di equazioni integrali con funzioni incognite $z(A)$, $h(A)$:

$$z(A) = \alpha_{n\nu}(A, \lambda) + \lambda \iint\limits_S M(A, B) h(B) dB \,, \tag{2.36}$$

$$h(A) - \lambda \iint\limits_S E(A, B) h(B) dB = F_{n\nu}(A, \lambda) \,. \tag{2.37}$$

Supponendo soddisfatta l'ineguaglianza (2.2), si trova

$$
\begin{aligned}
& |\overline{u}(A)-u_{np}(A)| \leqslant |\alpha_{np}(A,\lambda)| + \\
(2.38) \qquad & + \iint_S |\lambda M(A,B)|\, dB \cdot \max_Q |F_{np}(A,\lambda)| : l_1 , \\
& (A,\lambda)\in Q .
\end{aligned}
$$

Osservazioni 1: In modo analogo si possono costruire soluzioni approssimate del problema (1.1) per le equazioni integro-differenziali (1.2) e (1.21).

2. Nella risoluzione del problema (1.1) per le equazioni integro-differenziali (1.2) e (1.21) si può utilizzare anche la seguente formola:

$$
(2.39) \qquad u_{np}(A)=\Phi(A)+\iint_T N(A,B)D^k B_{np}(B)dB .
$$

3. Se per soluzione approssimata del problema (1.13), (1.2) si prende la funzione

$$
(2.40) \qquad \overline{B}_{np}(A)=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{s=0}^{p}\theta_{np}(\nu,s,\lambda)T_{n\nu}(x)T_{ps}(y) ,
$$

si otterranno le deviazioni, generalmente diverse da zero, sostituendo la (2.40) nella (1.2) oppure nella (1.13). Allorchè le funzioni (2.33) e (2.39) soddisfano con esattezza le condizioni (1.13).

3. Rappresentiamo approssimativamente l'integrale a secondo membro dell'equazione (1.18) sotto la forma

$$
(2.41) \qquad \iint_S E(A,B)v(B)dB \approx \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\zeta(\xi_i,\eta_j)\iint_{S_{ij}} E(A,B)dB ,
$$

$$
(\xi_i,\eta_j)\in S_{ij}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}[\subset S ,
$$

ove $\zeta(\xi_i,\eta_j)$ è un valore approssimato della funzione $v(x,y)$ nel punto (ξ_i,η_j). Invece che all'equazione (1.18) si perviene allora all'equazione

$$\zeta(A) = \omega(A) + \lambda \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \zeta(\xi_i, \eta_j) \iint_{S_i} E(A, B) dB . \tag{2.42}$$

Ponendo nella (2.42) $x = \xi_\alpha$, $y = \eta_\beta$ $(\alpha = 1, 2, \dots, r;\ \beta = 1, 2, \dots, s)$, si perviene al sistema di equazioni numeriche

$$\zeta_{\alpha\beta} - \lambda \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \zeta_{ij} E_{\alpha\beta}^{ij} = \omega_{\alpha\beta} (\alpha = 1, 2, \dots, r;\ \beta = 1, 2, \dots, s), \tag{2.43}$$

ove

$$\zeta_{\alpha\beta} = \zeta(\xi_\alpha, \eta_\beta) , \qquad \omega_{\alpha\beta} = \omega(\xi_\alpha, \eta_\beta) , \qquad E_{\alpha\beta}^{ij} = \iint_{S_{ij}} E(\xi_\alpha, \eta_\beta, B) dB .$$

Supponiamo che il determinante del sistema (2.42), $\Delta_{rs}(\lambda)$, sia diverso da zero. Se ne deduce poscia $\zeta_{ij} = l_{ij}(\lambda)$ $(i = 1, 2, \dots, r;$ $j = 1, 2, \dots, s)$, ove $l_{ij}(\lambda)$ sono quantità note. Epperciò

$$\zeta(A) = \omega(A) + \lambda \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} l_{ij}(\lambda) \iint_{S_{ij}} E(A, B) dB \equiv d_{rs}(A, \lambda) , \tag{2.44}$$

$$u_{rs}(A) = \pi(A) + \lambda \iint_{S} M(A, B) d_{rs}(B, \lambda) dB . \tag{2.45}$$

La funzione (2.45) si prende come soluzione approssimata del problema iniziale (1.13), (1.2). Il valore della differenza $| u(A) - u_{rs}(A) |$ può essere valutato nel modo seguente. Dalle (1.18), (2.42) si ha

$$\begin{aligned} v(A) - \zeta(A) - \lambda \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \iint_{S_{ij}} [E(A, B) v(B) - E(A, B) \zeta_{ij}] dB = \\ = v(A) - \zeta(A) - \lambda \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \iint_{S_{ij}} E(A, B) \} [v(B) - \zeta(B)] + \\ + [\zeta(B) - \zeta_{ij}] \} \, dB . \end{aligned} \tag{2.46}$$

Supponendo che dall'equazione (2.46) si è stabilito che

$$\max_{S} | v(A) - \zeta(A) | \leqslant q_{rs} , \tag{2.47}$$

se ne deduce

$$| u(A) - u_{rs}(A) | \leqslant q_{rs} \iint_{S} | \lambda M(A, B) | dB , \qquad (\lambda, A) \in Q . \tag{2.48}$$

Se per l'integrale di cui sotto si prende l'espressione approssimata

$$\iint_{S} E(A, B) v(B) dB \approx \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} E(A, \xi_i, \eta_j) \iint_{S_{ij}} \theta(B) dB , \tag{2.49}$$

allora si ha

$$\theta(A) = \omega(A) + \lambda \sum_{r=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} E(A, \xi_i, \eta_j) H_{ij}, \tag{2.50}$$

ove si è posto $H_{ij} = \iint_{S_{ij}} \theta(B) dB (i = 1, 2, ..., r; j = 1, 2, ..., s)$.

Introducendo le notazioni

$$\omega_{\alpha\beta} = \iint_{S_{\alpha\beta}} \omega(A) dA , \qquad E_{\alpha\beta}(i, j) = \iint_{S_{\alpha\beta}} E(A, \xi_i, \eta_j) dA ,$$

si ottiene per la determinazione dei coefficienti ignoti H_{ij} il sistema di equazioni integrali lineari

$$H_{\alpha\beta} - \lambda \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} H_{ij} E_{\alpha\beta}(i, j) = \omega_{\alpha\beta} \quad (\alpha = 1, 2, ..., r; \beta = 1, 2, ..., s),$$

che trascriviamo in forma più compatta

$$\sum_{r=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} I_{\alpha\beta}(i, j, \lambda) H_{ij} = \omega_{\alpha\beta} \tag{2.51}$$

$$(\alpha = 1, 2, ..., r; \beta = 1, 2, ..., s) .$$

Supponendo che il det $| I_{\alpha\beta}(i, j, \lambda) | \neq 0$, dalla (2.51) si trova

$$H_{ij} = n_{ij}(\lambda) \tag{2.52}$$

$$(i = 1, 2, \dots, r; \ j = 1, 2, \dots, s),$$

ove $n_{ij}(\lambda)$ sono numeri noti. Per conseguenza si ottiene

$$\theta(A) = \omega(A) + \lambda \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} E(A, \xi_i, \eta_j) n_{ij}(\lambda) \equiv g_{rs}(A, \lambda) . \tag{2.53}$$

Per soluzione approssimata del problema (1.13), (1.2) si prende la funzione

$$u^*_{rs}(A) = \pi(A) + \lambda \iint_S M(A, B) g_{rs}(B, \lambda) dB . \tag{2.54}$$

Ci proponiamo di valutare l'errore commesso. Supponiamo, ad esempio, che abbia luogo l'ineguaglianza (2.2). Si ha allora

$$\max_S | v(A) - \theta(A) | \leqslant \max_Q \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \iint_{S_{ij}} | \lambda [E(A, B) - \tag{2.55}$$

$$- E(A, \xi_i, \eta_j)] \theta(B) | dB : l_1 = \varepsilon_0,$$

$$| u(A) - u^*_{rs}(A) | \leqslant \varepsilon_0 \iint_S | \lambda M(A, B) | dB, \ (A, \lambda) \in Q . \tag{2.56}$$

Un altro modo di conseguire la valutazione dell'errore commesso consta in ciò che segue. Supponiamo che dalla

$$v(A) - \theta(A) = \lambda \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \iint_{S_{ij}} \{ E(A, \xi_i, \eta_j) [v(B) - \theta(B)] +$$

$$+ [E(A, B) - E[A, \xi_i, \eta_j)] v(B) \} \, dB$$

si sia trovato

$$v(A) - \theta(A) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \iint_{S_{ij}} \delta_{ij}(A, B, \lambda) v(B) dB .$$

Allora, se

$$(2.57) \qquad l_3 = 1 - \max_Q \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \iint_{S_{ij}} |\,\delta_{ij}(A, B, \lambda)\,|\, dB > 0\,,$$

ne risulta

$$|\,v(A) - \theta(A)\,| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \iint_{S_{ij}} |\,\delta_{ij}(A, B, \lambda)\,|\, dB \cdot \max\,|\,\theta(A)\,| : l_3 \equiv \nabla(A, \lambda),$$

e, per conseguenza,

$$(2.58) \qquad |\,u(A) - u^*_{r,s}(A)\,| \leqslant \iint_S |\,\lambda M(A, B)\,|\, \nabla(B, \lambda) dB\,, \quad (A, \lambda) \in Q.$$

4. I metodi approssimati escogitati nei punti precedenti di questo paragrafo si ricollegano al fatto che si è presupposta la possibilità del calcolo esatto di certi integrali doppi. Nel caso in cui il calcolo di questi integrali presenti difficoltà notevoli, si può utilizzare per la ricerca della soluzione del problema considerato il seguente metodo di cubatura.

Sia nell'equazione (1.2) $r_{k-1,k-1}(A) \equiv 0$ $(A \in S)$. Rappresentiamo l'integrale che figura nell'equazione (1.18) sotto la forma

$$(2.59) \qquad \iint_S E(A, B) v(B) dB = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} d_{ij} E(A, x_i, y_j) v(x_i, y_j) + \varrho(x, y),$$

ove d_{ij} sono coefficienti noti, $(x_i, y_j) \in S$ e $\varrho(x, y)$ è l'errore spettante alla formola di cubatura scelta. Per la determinazione delle incognite $v(x_i, y_j)$ si ottiene allora il sistema di equazioni

$$(2.60) \qquad v(x_\alpha, y_\beta) - \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} E(x_\alpha, y_\beta, x_i, y_i) v(x_i, y_j) =$$

$$= \omega(x_\alpha, y_\beta) - \lambda \varrho(x_\alpha, y_\beta)\,, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n;\ \beta = 1, 2, \ldots, p)\,.$$

Supponendo il determinante $\Delta(n, p, \lambda)$ del sistema (2.60) diverso da zero, si trova

$$(2.61) \qquad v(x_i, y_j) = \xi_{ij}(\lambda) + \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{p} \gamma_{ij}(\alpha, \beta, \lambda)\varrho(x_\alpha, y_\beta),$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n; \beta = 1, 2, \ldots, p),$$

ove $\xi_{ij}(\lambda)$, $\gamma_{ij}(\alpha, \beta, \lambda)$ sono quantità note. Prescindendo dalle $\varrho(x_\alpha, y_\beta)$ nella relazione (2.61), trascriviamo la soluzione approssimata del problema (1.13), (1.2) sotto la forma

$$(2.62) \qquad u_{np}(A) = \pi(A) + \lambda \iint_S M(A, B)[\omega(B) +$$

(2.62)

$$+ \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} d_{ij} E(B, x_i, y_j)\xi_{ij}(\lambda)]dB .$$

Nel caso in cui, ad esempio, abbia luogo un'ineguaglianza della forma (2.2), la valutazione dell'errore commesso può essere conseguita nel medesimo modo utilizzato nel punto 2 di questo paragrafo.

Osservazione. Nel caso in cui non si riesca a calcolare le cubature collegate alla formola (2.62) in forma compatta, si utilizza pure qui la formola

$$(2.63) \qquad \overline{u}_{np}(A) = \pi(A) + \lambda \sum_{x=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{p} M(A, x_\alpha, y_\beta) +$$

$$+ \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} d_{ij} E(x_\alpha, y_\beta, x_i, y_j)\xi_{ij}(\lambda)]d_{x\beta}$$

del tipo della (2.59).

§ 3. Sopra un metodo di approssimazione concernente la risoluzione dei problemi al contorno.

Applichiamo i polinomi ad una sola dimensione di S. N. Bernstein [33], [34] alla risoluzione dei problemi al contorno per le equazioni a derivate parziali. La portata del metodo può essere osservata prendendo ad esempio il problema non omogeneo di Goursat (1.1) per l'equazione integro-differenziale (1.2), ove si è posto $a = c = 0$, $b = d = 1$, $S = [0, 1] \times [0, 1]$. Il procedimento escogitato consiste nella riduzione di questo problema ad un sistema di equazioni integro-differenziali lineari ordinarie. Poniamo all'uopo

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} u(x, y) &\approx \sum_{i=0}^{p} C_p^i y^i (1 - y)^{p-i} u(x, i : p) \equiv \\ &\equiv \sum_{i=0}^{p} T_{pi}(y) u(x, i : p) \equiv \tilde{B}_p(x, y) . \end{aligned}$$

Supponendo che il problema posto (1.1), (1.2) possieda nella classe delle funzioni $2k$ volte continuamente derivabili una soluzione unica, se ne deduce

$$(3.2)\qquad \left| \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} \tilde{B}_p(x, y) - \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} u(A) \right| \leqslant 0\left[\frac{1}{\sqrt{p}}\right],$$

$$(i, j = 0, 1, \ldots, k;\ A \in S) .$$

Poichè

$$(3.3)\qquad \frac{\partial^{r+s} u(A)}{\partial x^r \partial y^s} \approx \sum_{i=0}^{p} \frac{d^r u(x, i : p)}{dx^r} T_{pi}^{(s)}(y) \approx \sum_{i=0}^{p} \frac{d^r u_i(x)}{dx^r} T_{pi}^{(s)}(y) ,$$

si perviene, sostituendo nelle (1.2) $\dfrac{\partial^{r+s} u(A)}{\partial x^r \partial y^s}$ secondo le formole (3.3), al seguente sistema di equazioni integro-differenziali ordinarie:

$$\sum_{i=0}^{p}\left[\frac{d^k u_i(x)}{dx^k} T_{pi}^{(k)}(y) + \lambda \sum_{\nu=k-1}^{0} \sum_{s=k-1}^{0} r_{\nu s}(x, y) \frac{d^\nu u_i(x)}{dx^\nu} T_{pi}^{(s)}(y) - \right.$$
$$(3.4) \qquad \left. - \lambda \iint_S \sum_{\nu=0}^{k} \sum_{s=0}^{k} K_{\nu s}(x, y, \xi, \eta) \frac{d^\nu u_i(\xi)}{d\xi^\nu} T_{pi}^{(s)}(\eta) d\xi d\eta \right] = f(x, y) .$$

Ponendo nelle (3.4) $y = 0, \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, \frac{p-1}{p}$ si perviene all'equazione $(p+1)$ ma col medesimo numero di funzioni incognite $u_i(x)$. Diciamo (3.4 A) questa equazione. La soluzione dell'equazione (3.4 A) deve soddisfare alle condizioni

$$(3.5) \qquad \left.\frac{d^r u_i(x)}{dx^r}\right|_{x=0} = \varphi_r(i:p) \quad (r = 0, 1, \dots, k-1).$$

Tuttavia bisogna tener conto del fatto che, in virtù delle condizioni (1.1) le $u_0^{(r)}(x)$ $(r = 0, 1, \dots, k-1)$ sono funzioni note. Sia $u_i(x) = S_i(x, \lambda)$ $(i = 0, 1, \dots, p)$ soluzione del problema (3.5) per il sistema di equazioni integro-differenziali

$$\sum_{i=0}^{p}\left[\frac{d^k u_i(x)}{dx^k} T_{pi}^{(k)}(r:p) + \lambda \sum_{\nu=k-1}^{0} \sum_{s=k-1}^{0} r_{\nu s}(x, r:p) \cdot \right.$$
$$(3.6) \qquad \cdot \frac{d^\nu u_i(x)}{d^\nu x} T_{pi}^{(\nu)}(r:p) - \lambda \iint_S \sum_{\nu=0}^{k} \sum_{s=0}^{k} K_{\nu s}(x, r:p, \xi, \eta) \cdot$$
$$\left. \cdot \frac{d^\nu u_i(\xi)}{d\xi^\nu} T_{pi}^{(s)}(\eta) d\eta d\xi \right] = f(x, r:p) ,$$
$$(r = 0, 1, \dots, p) .$$

La soluzione approssimata del problema (1.1), (1.2) è data allora sotto la forma

$$(3.7) \quad u_{kp}(x, y) = \Phi(A) + \lambda \iint_T N(A, B) \sum_{r=0}^{p} S_i(\xi, \lambda) T_{pi}(\eta) dB .$$

La valutazione esplicita dell'errore commesso si consegue nel modo seguente. Nell'ipotesi della validità dell'ineguaglianza

$$(3.8) \qquad l_2 = 1 - \max_Q \iint_T |\lambda L(A, B)| \, dB > 0 ,$$

sia $\beta_{kp}(A, \lambda)$ la deviazione conseguita in seguito alla sostituzione della funzione (3.7) nell'equazione (1.1). Ponendo

$$(3.9) \qquad u_{kp}(A) - u(A) \equiv \gamma(A) ,$$

$$(3.10) \qquad \begin{aligned} &\iint_S \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j}\gamma(B)}{\partial\xi^i \partial\eta^j} dB - \\ &- \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j}\gamma(A)}{\partial x^i \partial y^j} \equiv H(A) , \end{aligned}$$

si ottiene

$$(3.11) \qquad \gamma(A) = \iint_T N(A, B)[\beta_{kp}(B, \lambda) + \lambda H(B)]dB ,$$

$$(3.12) \qquad H(A) - \lambda \iint_S L(A, B)H(B)dB = \delta_{kp}(A, \lambda) .$$

Dalla (3.14) risulta

$$(3.13) \qquad \max_S |H(A)| \leqslant \max_Q |\delta_{kp}(A, \lambda)| : l_2 = \mu_p .$$

Per conseguenza si ha

$$(3.14) \qquad \begin{aligned} |u_{kp}(A) - u(A)| \leqslant &\left| \iint_T N(A, B)\delta_{kp}(B, \lambda)dB \right| + \\ + &\iint_T |\lambda N(A, B)| \, dB \cdot \mu_p \equiv \varrho_{kp}(A, \lambda), \quad (A, \lambda) \in Q . \end{aligned}$$

Ovviamente ha luogo per ogni $(A, \lambda) \in Q$ la valutazione del modulo della soluzione del problema (1.1), (1.2) data dalla:

$$|\,u(A)\,| \leqslant |\,u_{kp}(A)\,| + \varrho_{kp}(A, \lambda)\,. \tag{3.15}$$

Osservazione: Se nella (1.2) $K_{ij}(A, B) \equiv 0$ $(i, j = 0, 1, \ldots, k;$ $(A, B) \in S)$, l'equazione (1.2) diventa un'equazione differenziale a derivate parziali:

$$D^k u(A) + \lambda \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} = f(A)\,. \tag{3.16}$$

Il metodo esposto può essere adunque applicato anche alla soluzione del problema (1.1), (3.18).

Esporremo in ciò che segue i punti salienti dell'applicazione del metodo dei polinomi ad una dimensione di S. N. Bernstein alla risoluzione del problema (1.1), (1.2) $(a = c = 0, b = d = 1)$, utilizzando all'uopo il sistema risolvente (1.3), (1.8). Senza menomare la generalità, applichiamo la formola

$$v(A) \approx b_p(A) \equiv \sum_{i=0}^{p} C_p^i y^i (1 - y)^{p-i} v(x, i : p)\,. \tag{3.17}$$

Allora la soluzione approssimata del problema (1.1), (1.2) si trascrive sotto la forma

$$u_p(A) = \Phi(A) + \lambda \iint_T N(A, B) b_p(B) dB\,, \tag{3.18}$$

ove $v(x, i : p)$ $(i = 0, 1, \ldots, p)$ sono per ora funzioni incognite. Supponendo che il problema ammetta una soluzione continua ed una sola, avremo

$$\lim_{p \to \infty} b_p(A) = v(A)\,; \qquad \lim_{p \to \infty} u_p(A) = u(A)\,. \tag{3.19}$$

Determineremo le funzioni $v_i(x) \equiv v(x, i : p)$ a meno di $0(1 : \sqrt{p})$ dal sistema di equazioni

$$(3.20)\quad v_\nu(x) - \lambda \sum_{i=0}^{p} C_p^i \left[\int_0^x \int_0^{\nu:p} L_1(x, \nu : p, t, \tau)\tau^i(1-\tau)^{p-i} v_i(t)\, dt\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \iint L_2(x, \nu : p, t, \tau)\tau^i(1-\tau)^{p-i} v_i(t)\, dt\, d\tau = F(x, \nu : p)\right.,$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, p)\,.$$

Se $v_i(x) \equiv V_i(x, \lambda)$ $(i = 0, 1, \ldots, p)$ è la soluzione del sistema (3.20), risulta

$$(3.21)\quad \begin{aligned} u_p(A) &= \Phi(A) + \\ &+ \lambda \iint_T N(A, B) \sum_{i=0}^{p} C_p^i \tau^i (1-\tau)^{p-i} V_i(t, \lambda)\, dt\, d\tau\,. \end{aligned}$$

Nell'ipotesi della validità dell'ineguaglianza (3.8), si ha

$$(3.22)\quad \begin{gathered} |\, u_p(A) - u(A)\,| \leqslant \theta \iint_T |\, \lambda N(A, B)\,|\, dB\,, \\ (A, \lambda) \in Q\,, \end{gathered}$$

ove $\theta = \max\limits_{Q} |\, \varepsilon_p(A, \lambda)\,| : l_2$; ed $\varepsilon_p(A, \lambda)$ è la deviazione conseguita come risultato dalla sostituzione della funzione $b_p(A)$ nella (1.8).

OSSERVAZIONI: 1. **Nel caso generale in cui i coefficienti $r_{\nu s}(x, i : p)$, $K_{\nu s}(x, i : p, \xi, \eta)$ sono variabili, la risoluzione del sistema di equazioni (3.4), (3.5) in forma finita presenta difficoltà notevoli, fra cui la risoluzione del sistema approssimante di equazioni differenziali testè costruito. Si perviene ad una struttura più semplice di equazioni nel caso in cui i coefficienti del sistema costruito sono costanti.**

2. **La soluzione approssimata del problema (1.1), (1.2) si ottiene in modo analogo utilizzando i polinomi**

$$P_n(x, y) = \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r (1-x)^{n-r} u(r : n, y)\,;$$

$$p_n(x, y) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i (1-x)^{n-i} v(i : n, y)\,.$$

3. Il metodo esposto può essere applicato alla risoluzione di problemi più generali.

§ 4. Alcuni problemi concernenti il comportamento qualitativo delle soluzioni.

Dedurremo in ciò che segue alcune valutazioni ***a posteriori*** e *a priori* delle soluzioni dei problemi (1.1), (1.13) spettanti alle equazioni integro-differenziali (1.2) e (1.21).

a) Nell'ipotesi della validità delle condizioni relative alle (2.1), (2.2), ha luogo nel dominio Q la valutazione

$$
\begin{gathered}
| D^p u(A) | \leqslant | D^p w_i(A) | + \\
+ \lambda \iint_S | D_A^p[M(A, B)][U_i(B) - u_i(B)] | dB \,, \qquad (4.1) \\
(p = 0, 1, \dots, k-2) \,,
\end{gathered}
$$

ove $w_i(A)$ è uguale ad $u_i(A)$ oppure ad $U_i(A)$.

b) Nel caso in cui la soluzione esatta dell'equazione (1.18) non è nota e nell'ipotesi che la funzione $E_1(A, B) \equiv E(A, B) - E_2(A, B)$ (ove $| E_2(A, B) | \leqslant \varepsilon$ per tutti $A, B \in S$) è tale che il suo nucleo risolvente $\Omega(A, B, \lambda)$ è noto, si prendono invece delle funzioni $v(A)$ e $u(A)$, rispettivamente, le funzioni vicine ad esse:

$$
\bar{v}(A) = \omega(A) + \lambda \iint_S \Omega(A, B, \lambda)\omega(B)dB \equiv J(A, \lambda) \,, \qquad (4.2)
$$

$$
\bar{u}(A) = \pi(A) + \lambda \iint_S M(A, B)J(B, \lambda)dB \,. \qquad (4.3)
$$

La valutazione della deviazione tra i secondi membri delle equazioni (1.15) e (4.3) può essere conseguita nel modo seguente:

$$v(A) - \bar{v}(A) = \lambda \iint_S [E(A, B)v(B) - E_1(A, B)\bar{v}(B)]dB =$$

$$= \lambda \iint_S \{E_1(A, B)[v(B) - \bar{v}(B)] + E_2(A, B)v(B)\}\, dB \,.$$

Se ne deduce

$$\begin{aligned} v(A) - \bar{v}(A) &= \lambda \iint_S E_2(A, B)v(B)dB + \\ &+ \lambda^2 \iint_S \Omega(A, B, \lambda)dB \iint_S E_2(B, C)v(C)dC = \\ &= \lambda \iint_S E_3(A, B, \lambda)v(B)dB \,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Per conseguenza, se $E_2(A, B)$ è stata scelta in modo che abbia luogo l'ineguaglianza

$$l_4 = 1 - \max_Q \iint_S |\, \lambda E_3(A, B, \lambda)\,|\, dB > 0 \,, \tag{4.5}$$

dalla (4.4) si ricava

$$\max_S |\, v(A)\,| \leqslant \max_S |\, \bar{v}(A)\,| : l_4 = \tau \,. \tag{4.6}$$

Epperciò sono valide le seguenti valutazioni:

$$|\, v(A) - \bar{v}(A)\,| \leqslant \tau \iint_S |\, \lambda E_3(A, B, \lambda)\,|\, dB \equiv \tau d(A, \lambda) \,, \tag{4.7}$$

$$|\, u(A) - \bar{u}(A)\,| \leqslant \iint_S |\, \lambda M(A, B)\,|\, d(B, \lambda)\tau dB \,, \tag{4.8}$$

$$(4.9)\quad |D^p u(A)| \leqslant |D^p \bar{u}(A)| + \tau \iint_S |\lambda D_A^p M(A, B)|\, d(B, \lambda) dB\,,$$

$$(p = 0, 1, \ldots, k-2;\ (A, \lambda) \in Q)\,.$$

c) Le limitazioni (4.1), (4.9) dei moduli delle soluzioni e delle loro derivate di Picone hanno carattere di limitazioni *a posteriori*. Stabiliremo adesso limitazioni *a priori* per il modulo della soluzione del problema (1.1), (1.21). In questa occasione si otterrà — secondo ciò che segue qui sotto — un'ineguaglianza, analoga a quella di Gronwall [35], corrispondente alle equazioni integrali di Volterra in due dimensioni. Riduciamo all'uopo il problema (1.1), (11.21) ad un sistema di equazioni integrali del tipo di Volterra. La soluzione del problema si rappresenta sotto la forma

$$(4.10)\qquad u(A) = \Phi(A) + \lambda \iint_T N(A, B) v(B) dB\,,$$

ove $\Phi(A)$ e $N(A, B)$ si determinano come nel § 1, mentre

$$(4.11)\qquad \begin{aligned} v(A) \equiv{} & \iint_T \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}^{*}(A, B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} dB - \\ & - \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j}\,. \end{aligned}$$

Sostituendo nel secondo membro dell'equazione (4.11) le funzioni $u(A)$ e $u(B)$ in corrispondenza alla formola (4.10), si perviene all'equazione integrale

$$(4.12)\qquad v(A) - \lambda \iint_T K(A, B) v(B) dB = F(A)\,,$$

ove $K(A, B)$, $F(A)$ sono funzioni continue note, mentre $v(A)$ è la funzione incognita e $a \leqslant x$, $\xi \leqslant b$; $c \leqslant y$, $\eta \leqslant d$. Dalla (4.12) se ne deduce

$$w(A) - \mu \iint_T | K(A, B) | w(B)dB \leqslant | F(A) | , \tag{4.13}$$

ove $w(A) \equiv | v(A) |$, $\mu = | \lambda |$. Integrando (4.13) rispetto al primo argomento entro i limiti a e x, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_a^x w(t, y)dt &\leqslant \int_a^x | F(t, y) | dt + \\ &+ \mu \int_a^x dt \iint_T | K(t, y, B) | w(B)dB \equiv \\ &\equiv \mathfrak{D}(A, \lambda) + \mu \iint_T Z(A, B)w(B)dB \leqslant \\ &\leqslant k_1c_1(x) + \mu k_2c_2(x) \iint_T w(B)dB , \end{aligned} \tag{4.14}$$

ove k_1 e k_2 sono costanti note, $c_1(x) > 0$ e $c_2(x) \geqslant 0$ sono funzioni note e $a \leqslant x$, $\xi \leqslant b$; $c \leqslant y$, $\eta \leqslant d$. Dalla (4.14) abbiamo

$$\frac{d_y \left[k_1c_1(x) + \mu k_2c_2(x) \iint_T w(B)dB\right]}{k_1c_1(x) + \mu k_2c_2(x) \iint_T w(B)dB} \leqslant k_2\mu c_2(x) . \tag{4.15}$$

D'onde

$$\begin{aligned} \ln \left[k_1c_1(x) + \mu k_2c_2(x) \iint_T w(B)dB\right] &\leqslant \\ &\leqslant \ln [k_1c_1(x)] + k_2\mu c_2(x)(y - b) . \end{aligned} \tag{4.16}$$

Eppereiò, per tutti $a \leqslant x \leqslant b$; $c \leqslant y \leqslant d$, si ha

$$\int_a^x w(t, y)dt \leqslant k_1 c_1(x) \exp [k_2 \mu c_2(x)(y - b)] . \tag{4.16}$$

Utilizzando l'ineguaglianza (4.16) si ottiene la seguente valutazione *a priori* della soluzione del problema posto:

$$\left|\frac{\partial^{i+j}u(A)}{\partial x^i \partial y^j}\right| \leqslant \left|\frac{\partial^{i+j}\Phi(A)}{\partial x^i \partial y^j}\right| + \mu k_1(k - 1) \iint_T \left|\frac{\partial^{i+j}N(A, B)}{\partial x^i \partial y^j}\right| \cdot \tag{4.17}$$

$$\cdot c_1(\xi) \exp [k_2 \mu c_2(\xi)(\eta - b)] dB ,$$

$$(a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d;\ 0 \leqslant i, j \leqslant k - 1) .$$

Osservazioni: 1. La valutazione dell'integrale $\int_c^y w(x, t)dt$ può essere conseguita in modo analogo a quello dell'integrale che si trova nel primo membro dell'equazione (4.14). Sia

$$\int_c^y w(x, t)dt \leqslant r_1 \sigma_1(y) \exp [r_2 \mu \sigma_2(y)(x - a)] , \tag{4.18}$$

$$(a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d) ,$$

ove $\sigma_1(y) > 0$, $\sigma_2(y) \geqslant 0$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ sono quantità note.

Si ottiene allora, utilizzando l'ineguaglianza (4.18),

$$\left|\frac{\partial^{i+j}u(A)}{\partial x^i \partial y^j}\right| \leqslant \left|\frac{\partial^{i+j}\Phi(A)}{\partial x^i \partial y^j}\right| + \mu r_1(k - 1) \iint_T \left|\frac{\partial^{i+j}N(A, B)}{\partial x^i \partial y^j}\right| \cdot \tag{4.19}$$

$$\cdot\ \sigma_1(\eta) \exp [r_2 \mu \sigma_2(\eta)(\xi - a)] d\xi d\eta ,$$

$$(a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d;\ i = 0, 1, ..., k - 1) .$$

Tenendo conto delle ineguaglianze (4.17) e (4.19), si può scrivere la seguente valutazione *a priori*:

$$\left|\frac{\partial^{i+j}u(A)}{\partial x^i \partial y^j}\right| \leqslant \left|\frac{\partial^{i+j}\Phi(A)}{\partial x^i \partial y^j}\right| + \mu(k - 1)\Delta_{ij}(A, \mu) , \tag{4.20}$$

ove

$$(4.21)\qquad A_{ij}(A,\mu) = \inf\left\{k_1 \iint_T \frac{\partial^{i+j}N(A,B)}{\partial x^i \partial y^j}\cdot\right.$$

$$\cdot\, c_1(\xi)\exp[k_2\mu c_2(\xi)(\eta - b)]dB\,;$$

$$\left. r_1 \iint_T \frac{\partial^{i+j}N(A,B)}{\partial x^i\partial y^j}\,\sigma_1(\eta)\exp\left[r_2\mu\sigma_2(y)(\xi - a)\right]\right\}dB\,,$$

$$(Q = \{a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d;\ 0 < \mu \leqslant \mu_1)\,.$$

2. Valutazioni più semplici (ma perciò meno esatte) si ottengono se, per tutti $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, s'introducono invece delle $c_1(x)$, $c_2(x)$, $\sigma_1(y)$, $\sigma_2(y)$, rispettivamente, i loro estremi superiori. Si ha così, ad esempio, se si tiene conto dell'ineguaglianza

$$\int_a^x w(t,y)dt > K_1 + \mu K_2 \iint_T w(B)dB$$

$$(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)\,,$$

ove K_1 e K_2 sono costanti note,

$$(4.22)\qquad \int_a^x w(t,y)dt \leqslant K_4 \exp\left[\mu K_2(y - b)\right],$$

essendovi $K_4 > 0$ una quantità nota. Utilizzando l'ineguaglianza (4.23), si perviene alla valutazione seguente:

$$|\,u(A)\,| \leqslant |\,\Phi(A)\,| +$$

$$(4.23)\qquad + \mu(k-1)K_4 \iint_T N(A,B)\exp\left[\mu K_2(\eta - b)\right]dB\,,$$

$$(A,\lambda) \in Q\,.$$

In modo analogo si ottiene la valutazione

$$
\begin{aligned}
& |\, u(A)\, | \leqslant |\, \Phi(A)\, | + \\
(4.24) \qquad & + \mu(k-1)P_1 \iint_T N(A, B) \exp\left[\mu P_2(\xi - a)\right] dB\,, \\
& (A, \lambda) \in Q\,.
\end{aligned}
$$

In ciò che segue si può utilizzare la via di deduzione dell'ineguaglianza (4.20).

3. Il metodo esposto nel § 4 concernente la costruzione delle valutazioni *a priori* può essere esteso alle equazioni integrali ed integro-differenziali relative a domini ad un numero di dimensioni maggiore di due.

d) Consideriamo il caso di stabilità della soluzione banale del problema al contorno

$$
(4.25) \qquad [D^i u(A)]_{x=a} \equiv [D^i u(A)]_{y=c} = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, k-1),
$$

$$
\begin{aligned}
& D^k u(A) + \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} = \\
(4.26) \qquad & = \iint_T \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j}\, dB\,,
\end{aligned}
$$

ove $r_{ij}(A)$, $K_{ij}(A, B)$ sono funzioni continue note e $u(A)$ è la soluzione del problema (4.25), (4.26).

Ponendo $D^k u(A) \equiv \varphi(x)$, si trova

$$
(4.27) \qquad u(A) = \iint_T N(A, B) \varphi(B) dB\,.
$$

Dalla (4.26), tenendo conto della (4.27), si ottiene

$$
(4.28) \qquad \varphi(A) = \iint_T W(A, B) \varphi(B) dB\,,
$$

ove $W(A, B)$ è una funzione continua nota per tutti $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$. Dalle (4.28), (4.27) se ne deduce che il problema (4.25), (4.26) possiede nella classe delle funzioni $2k$ volte continuamente derivabili soltanto la soluzione banale. Sia $\psi(A)$ una perturbazione attiva ininterrotta. Si ha allora

$$\begin{aligned} D^k u(A) + \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} = \\ = \psi(A) + \iint_T \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} dB . \end{aligned} \tag{4.29}$$

Se $R(A, B)$ è il nucleo risolvente del nucleo $W(A, B)$, ne risulta

$$u(A) = \iint_T N(A, B) \left[\psi(B) + \iint_T R(B, C) \psi(C) dC \right] dB . \tag{4.30}$$

Per conseguenza, si ha

$$\left| \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} u(A) \right| < \varepsilon \tag{4.31}$$

per tutti $i, j = 0, 1, \ldots, k-2$; $A \in T_1$ non appena siano valide le disuguaglianze

$$\max_{T_1} |\psi(A)| < \varepsilon : l_{ij} \qquad (T_1 = \{a \leqslant x \leqslant b ; c \leqslant y \leqslant d\}) , \tag{4.32}$$

ove si è posto

$$l_{ij} = \left\{ \max_{T_1} \frac{\partial^{i+j} N(A, B)}{\partial x^i \partial y^j} \left[1 + \iint_T | R(B, C) | dC \right] dB \right\}_{k-1}^{i,j=0} .$$

Se si utilizza l'ineguaglianza (4.17), risulta che

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} \right| \leqslant \\ \leqslant k_3(k-1) \iint_T \frac{\partial^{i+j} N(A, B)}{\partial x^i \partial y^j} c_3(\xi) \exp [k_4 c_4(\xi)(\eta - b)] dB , \end{aligned} \tag{4.33}$$

ove

$$\int_a^x |\psi(t, y)|\,dt \leqslant t_3 c_3(x) \; ; \qquad |W(A, B)| \leqslant k_4 c_4(x) \; ;$$

$$c_3(x) > 0 \; ; \quad c_4(x) \geqslant 0 \; ; \quad (x, y) \in T_1 \; ; \quad (i, j = 0, 1, \ldots, k-1) \, .$$

Consideriamo infine il problema di stabilità della soluzione del sistema (4.25), (4.26) se vi si prende in esame la parturbazione delle condizioni al contorno. Supponiamo che le condizioni (4.25) subiscano una perturbazione:

$$[D^i u(A)]_{y=c} = \varphi_i(x) \; ; \qquad [D^i u(A)]_{x=a} = \psi_i(y) \tag{4.34}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, k-1) \, ,$$

ove almeno l'uno dei valori $\varphi_i(x)$, $\psi_i(y)$ è diverso da zero e per tutti $(x, y) \in T_1$; $i = 0, 1, \ldots, k-1$ si ha

$$|\varphi_i(x)| \leqslant \varepsilon_{1i} \; ; \qquad |\psi_i(y)| \leqslant \varepsilon_{2i} \, .$$

La soluzione del problema « perturbato » (4.34), (4.26) si costruisce sotto la forma (1.3) ($\lambda = 1$), in cui la funzione $\Phi(A)$ soddisfa le condizioni (4.34). La sostituzione delle (4.3) nelle (4.26) conduce allora all'equazione

$$v(A) - \iint_T W(A, B) v(B)\, dB = q(A) \, , \tag{4.35}$$

in cui $q(A)$ e $W(A, B)$ sono funzioni note. D'onde risulta

$$v(A) = q(A) + \iint_T R(A, B) q(B)\, dB \, ,$$

$$u(A) = \Phi(A) + \iint_T N(A, B) \left[q(B) + \right. \tag{4.36}$$
$$\left. + \iint_T R(B, C) q(C)\, dC \right] dB \, .$$

Se per un numero arbitrario $\varepsilon > 0$ e per tutti $A \in T_1 = \{a \leqslant \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d\}$ ha luogo l'ineguaglianza

$$\delta = \sup_{T_1} \{ \mid \Phi(A) \mid, \ \mid q(A) \mid \} < \tag{4.37}$$
$$< \varepsilon : \left[1 + \iint_T N(A, B)\right]\left\{1 + \iint_T \mid R(B, C) \mid dC\right\} dB \, ,$$

si consegue per tutti $A \in T_1$ la seguente valutazione: $\mid u(A) \mid < \varepsilon$.

OSSERVAZIONE: Le valutazioni *a priori* del $\mid u(A) \mid$, per tutti $A \in T_1$, si ottengono tramite le ineguaglianze (4.18), (4.21).

BIBLIOGRAFIA

[1] VLADIMIROV V. S.: *Ob integro-differentzial'nom uravnenii perenosa častitz* (*Sull'equazione integro-differenziale di trasporto delle particole*). Izv. AN SSSR. Ser. matem., 1957, 21, 5, 681-710.

[2] KOHLMAYR G. F.: *Die Greensche Funktion zum Integrodifferentialoperator der stationären Neutronentransporttheorie.* Acta phys. austriaca, 13, 2-3, 300-314, 1960.

[3] BELLMAN R., RICHARDSON J. M.: *On the stability of solutions of the linearized plasma equation.* J. Math. Analysis and Applic., 1, 3-4, 308-313, 1960.

[4] LEVIN J. J., NOHEL J. A.: *On a system of integrodifferential equations occuring in reactor dynamics.* J. Math. and. Mech., 9, 3, 347-368, 1960.

[5] PICONE M.: *Sull'equazione integrale non lineare di seconda specie di Fredholm.* Math. Z., 74, 2, 119-128, 1960.

[6] BYKOV IA. V.: *O nekotoryh metodah postroenia rešenii integral'nyh i integro-differentzial'nyh uravnenii* (*Sopra alcuni metodi di risoluzione delle equazioni integrali e integro-differenziali*). Akad. Nauk Kirg. SSR, Frunze, 110 pp., 1961.

[7] BYKOV IA. V.: *O nekotoryh zadačah teorii integro-differentzial'nyh uravnenii* (*Su alcuni problemi concernenti la teoria delle equazioni integro-differenziali*). Frunze, Akad. Nauk Kirg. SSR, 1957.

[8] VASILACHE S.: *O novyh kraevyh zadačah dlea nekotoryh integro-differentzial'nyh uravnenii ili uravnenii v častnyh proizvodnyh* (*Sopra

alcuni nuovi problemi al contorno per certe equazioni integro-differenziali o a derivate parziali). Rev. math. pures et appl., Bucarest (5), 2, 251-274, 1960.

[9] MANGERON D., KRIVOSEIN L. E.: *Sopra una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone* (*A Mauro Picone nel suo 75° compleanno*). Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat. (8), XXXI, 1-2, pp. 27-32, 1961.

[10] MANGERON D., KRIVOCHEINE L. E.: *Sur quelques problèmes d'approximation relatifs à une nouvelle classe d'équations intégro-différentielles*. Bull. Acad. Polonaise Sci., Série sci. math., astr. et phys., IX, 10, pp. 707-712, 1961.

[11] MANGERON D., KRIVOCHEINE L.: *Recherches des solutions des équations intégro-différentielles par la méthode polynomiale*. C. r. de l'Acad. Bulgare Sci., 15, 4, 345-348, 1962.

[12] MANGERON D., KRIVOSEIN L. E.: *Mnogočlennyi metod v rešenii zadač po integro-differential'nym uravneniam. I. Primenenie polinomov S. N. Bernsteina* (*Il metodo polinomiale nella risoluzione dei problemi relativi alle equazioni integro-differenziali. I. Applicazione dei polinomi di S. N. Bernstein*). Bul. Inst. politehn. Iasi, n. s., 7 (11), 3-4, pp. 27-42, 1961.

[13] MANGERON D., KRIVOSEIN L. E.: *Približennoe rešenie kraevyh zadač dlea integro-differentzial'nyh uravnenii* (*Soluzione con approssimazione dei problemi al contorno relativi alle equazioni integro-differenziali ordinarie*). Bul. Inst. politehn. Iași, n. s., 7 (11), 3-4, pp. 27-42, 1961.

[13] MANGERON D., KRIVOŠEIN L. E.: *Približennoe rešenie kraevyh zadač dlea integro-differential'nyh uravnenii* (*Soluzione con approssimazione dei problemi al contorno relativi alle equazioni integro-differenziali ordinarie*). Bul. Inst. politehn. Iași, n. s., 6 (10), 3-4, pp. 21-30, 1960.

[14] MANGERON D., KRIVOŠEIN L. E.: *Ob odnom klasse integro-differentzia l'nyh uravneii v polnyh proizvodnyh* (*Sopra una classe di equazioni integro-differenziali a derivate totali*). Bul. Inst. politehn. Iași, n. s., 7 (11), 1-2, pp. 25-34, 1961.

[15] MANGERON D., KRIVOŠEIN L. E.: *Problemi di Goursat e di Dirichlet per una classe di equazioni integro-differenziali a derivate totali.* Rend. Accad. Sci. Fis. e Mat., Napoli (4), XXVIII, 213-224, 1961.

[16] MANGERON D., KRIVOŠEIN L. E.: *Il metodo polinomiale nei problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone.* Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat. (8), XXXII, 3, 306-312, 1962.

[17] MANGERON D.: *Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale alle derivate parziali di quarto ordine con le caratteristiche*

reali doppie. Rend. Accad. Sci. Fis. Mat., Napoli (4), II, pp. 1-11, 1932.

[18] MANGERON D.: *Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale non lineare alle derivate parziali di quarto ordine con le caratteristiche reali doppie.* Rend. Accad. Naz. dei Lincei. Cl. Sci. fis., mat. e nat., (6), XVI, 7-8, pp. 305-310. 1932.

[19] MANGERON D.: *Sur les noyaux associés à certains problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.* Mathematica, Cluj, XIV, pp. 31-35, 1938.

[20] MANGERON D.: *New classes of functions related to the equations with total derivatives.* Bul. Inst. politehn. Iași. n. s., 4 (8), 3-4. pp. 73-74, 1958.

[21] MANARESI F.: *Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di una equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. XXIII, pp. 163-213, 1954.

[22] SALVADORI M.: *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica.* Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa (2), V, pp. 51-72, 1936.

[23] DE GIORGI E.: *Un teorema di unicità per il problema di Cauchy, relativo ad equazioni differenziali a derivate parziali di tipo parabolico.* « Scritti Matematici offerti a Mauro Picone », Bologna. Azzoguidi, pp. 781-787, 1955.

[24] STAMPACCHIA G.: *Un teorema di calcolo delle variazioni ed applicazioni a problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali del tipo iperbolico.* Giorn. di Matem. di Battaglini, (4), 78, pp. 81-96, 1948-49.

[25] BEREZANSKI Yu. M.: *O kraevyh zadačah dlea obščih differentzial'nyh operatorov v častnyh proizvodnyh* (*Sui problemi al contorno per gli operatori differenziali generali a derivate parziali*). Doklady Akad. Nauk SSSR, 122, 6, pp. 959-962, 1958.

[26] PICONE M.: *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica.* Ann. Sci. de l'Univ. de Jassy, I-e Section (Math., Phys., Chimie), XXVI, 1, pp. 183-232, 1940.

[27] KRIVOŠEIN L. E.: *Približennoe rešenie nekotoryh zadač dlea lineinyh integro-differentzial'nyh uravnenii* (*Soluzione approssimativa di alcuni problemi concernenti equazioni lineari integro-differenziali*). L'autoresoconto della tesi di abilitazione (Cand. Sci. fis. mat.). Sredneaziatskii Gos. Univ., Taškent, 1958.

[28] PICONE M., FICHERA G.: *Trattato di Analisi Matematica.* Vol. II, Metodo di Goursat, p. 679. Tumminelli, Roma, 1955.

[29] MANGERON D.: *Sur certains problèmes à la frontière polygonale non totalement caractéristiques pour une classe d'équations aux dérivées*

partielles d'ordre supérieur. C. r. Acad. Sci., Paris, 204, pp. 94-96; 544-546; 1022-1024, 1937.

[30] ČAPLYGUJINE S. A.: *Novyi metod približennogo integrirovania differentzial'nyh uravnenii.* Fizmatgiz, Moskva-Leningrad, 1-103, 1950. (*Nuovo metodo d'integrazione approssimativa delle equazioni differenziali*).

[31] MANGERON D., KRIVOCHÉINE L. E.: *Sur l'évaluation des erreurs de détermination des solutions d'une classe d'équations intégro-différentielles aux dérivées totales.* C. r. Acad. Sci., Paris, 253, 11, pp. 1190-1192, 1961.

[32] MANGERON D., KRIVOCHÉINE L. E.: *Approximation par les polynomes de Bernstein des solutions de certains problèmes à la frontière pour les équations intégro-différentielles d'ordre supérieur.* C. r. Acad. Sci., Paris, 254, pp. 3624-3626, 1962.

[33] BERNSTEIN S. N.: *Sobranie sočinenii* (*Opera matematica*) *Dokazatel' stvo teoremy Weierstrassa, osnovannoe na teorii veroiatnostei* (*Dimostrazione del teorema di Weierstrass, basata sul calcolo delle probabilità*). Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskva, 105-106, 1952.

[34] IPATOV A. F.: *Otzenka pogrešnosti i poreadok približenia funktzii dvuh peremennyh polinomami S. N. Bernsteina* (*Valutazione dell'errore e l'ordine di approssimazione delle funzioni in due variabili tramite polinomi di S. N. Bernstein*). Uč. zapiski Petrozavodskogo Un-ta, (4), 4, 31-48; 49-58, 1955 (1957).

[35] GRONWALL T. H.: *Note on the Derivatives With Respect to a Parameter of the Solutions of a System of Differential Equations.* Ann. Math., 20, 292-296, 1918-1919.

[36] SCORZA DRAGONI G.: *Analisi Matematica*, Vol. II, *La Continuità e differenziabilità.* CEDAM, Padova, 1961, pp. 213 e segg.