

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI PROUSE

**Soluzioni quasi-periodiche dell'equazione differenziale  
di Navier-Stokes in due dimensioni**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 33 (1963), p. 186-212

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1963\\_\\_33\\_\\_186\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__186_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# SOLUZIONI QUASI-PERIODICHE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI NAVIER-STOKES IN DUE DIMENSIONI

*Memoria \*) di GIOVANNI PROUSE (a Milano) \*\*)*

1. - Nel presente lavoro ci proponiamo di illustrare alcune proprietà delle soluzioni limitate dell'equazione di Navier-Stokes in due dimensioni e di dare alcune condizioni sufficienti perchè tali soluzioni esistano e siano quasi-periodiche.

Detto  $\Omega$  un insieme aperto del piano  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ , il problema « classico » che esamineremo consiste nel determinare un vettore  $x(\xi_1, \xi_2, t) = \{x_1(\xi_1, \xi_2, t), x_2(\xi_1, \xi_2, t)\}$  soddisfacente al sistema

$$\frac{\partial x_j}{\partial t} - \sum_{i=1}^2 x_i \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} - \mu \Delta_2 x_j = - \frac{\partial p}{\partial \xi_j} + f, \quad (j = 1, 2)$$

(1,1)

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial x_j}{\partial \xi_j} = 0$$

ed alle condizioni iniziali ed al contorno

$$\begin{aligned} x(\xi_1, \xi_2, t_0) &= x_0(\xi_1, \xi_2) \\ x(\xi_1, \xi_2, t) &= 0 \quad \text{per} \quad (\xi_1, \xi_2, t) \in F\Omega \times [t_0, \infty). \end{aligned}$$

(1,2)

\*) Pervenuta in Redazione il 12 dicembre 1962.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Politecnico, Milano.

\*\*\*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del Comitato per la Matematica del C.N.R. Durante lo svolgimento di questo lavoro l'autore ha usufruito di una borsa di studio del C.N.R.

Nelle (1,1) le  $x_j$  sono le componenti della velocità del fluido in esame,  $p$  è la pressione,  $\mu$  il coefficiente di viscosità e le  $f_j$  rappresentano le componenti della forza di massa (cfr. p. es. [1]).

Al problema « classico » (1,1), (1.2) può essere, come è noto [2], associato un problema « debole », che sarà poi quello che esamineremo in questo lavoro.

Per giungere alla formulazione di tale problema, introduciamo alcuni spazi funzionali.

Sia  $\mathcal{N}(\Omega)$  la varietà dei vettori (a due componenti) indefinitamente differenziabili, a divergenza nulla ed a supporto compatto  $\subset \Omega$ . Indichiamo con  $N$  ed  $N^1$  rispettivamente le chiusure di  $\mathcal{N}(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$  ed in  $H_0^1(\Omega)$ .

Poichè  $N$  ed  $N^1$  sono, per costruzione, sottospazi rispettivamente di  $L^2$  e di  $H_0^1$ , si avrà:

$$(v, r)_X = (u, r)_{L^2} = \int_{\Omega} ur d\Omega$$

$$(u, r)_{N^1} = (u, r)_{H_0^1} = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \frac{\partial r}{\partial \xi_i} d\Omega.$$

Detto  $\Delta_p$  l'intervallo  $[-(p+1), p]$  ( $p = 0, 1, \dots$ ), poniamo  $L_p^2(L^2) = L^2(\Delta_p; L^2)$ ,  $L_p^2(H_0^1) = L^2(\Delta_p; H_0^1)$ . Come è noto [3], se  $u(t)$  e  $v(t)$  sono funzioni appartenenti rispettivamente (per ogni  $\alpha^1 - \beta \subset J = (-\infty, +\infty)$ ) a  $L^2(\alpha, \beta; L^2)$  ed a  $L^2(\alpha, \beta; H_0^1)$ , esse possono essere interpretate come funzioni a valori rispettivamente in  $L_p^2(L^2)$  ed  $L_p^2(H_0^1)$  ( $p = 0, 1, \dots$ ) quando si ponga:

$$\|u(t)\|_{L_p^2(L^2)} = \left\{ \int_{\Delta_p} \|u(t + \eta)\|_{L^2}^2 d\eta \right\}^{1/2}$$

$$\|v(t)\|_{L_p^2(H_0^1)} = \left\{ \int_{\Delta_p} \|v(t + \eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta \right\}^{1/2}$$

Ciò posto, diremo che la funzione (definita in  $J$ )  $x(t) \in L_0^2(N^1) \cap L_0^\infty(N)$  è una soluzione (debole) in  $J$  dell'equazione di Navier

*Stokes, soddisfacente ad una condizione al contorno di Dirichlet omogenea, se, posto*

$$b(u, v, w) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 u_i \frac{\partial v_j}{\partial \xi_i} w_j d\Omega$$

vale, per  $f(t) \in L^1_0(L^2)$ , la relazione:

$$(1,3) \int_J \{ \mu(x(t), h(t))_{H^1_0} - (x(t), h'(t))_{L^2} + b(x(t), x(t), h(t)) \} dt = \\ = \int_J (f(t), h(t))_{L^2} dt$$

per ogni funzione  $h(t)$  tale che

$a_1)$   $h(t)$  sia  $N^1$ -continua in  $J$ , con  $h'(t) \in L^2_0(N)$ ;

$b_1)$   $h(t)$  abbia supporto compatto.

Diremo poi che la soluzione  $x(t)$  soddisfa alla condizione iniziale  $x(t_0) = x_0 \in N$  se:

$$(1,4) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \| x(t) - x_0 \|_{L^2} = 0 .$$

Nel presente paragrafo dimostreremo l'esistenza di una soluzione  $\tilde{x}(t)$   $L^2$ -limitata in  $J$ , qualora  $f(t)$  sia  $L^2$ -limitata in  $J$ ; faremo poi vedere che, se  $\tilde{x}(t)$  è abbastanza piccola, essa è l'unica soluzione  $L^2$ -limitata in  $J$ . Nel § 2 verrà poi studiata la quasi-periodicità della soluzione limitata  $\tilde{x}(t)$  e si dimostrerà ancora che, se tale soluzione è abbastanza piccola, essa è  $q.p.$

Si potrà, in particolare, constatare che, se  $f(t)$  è abbastanza piccola, allora esiste una ed una sola soluzione  $L^2$ -limitata in  $J$  e che tale soluzione è  $L^2$  ed  $L^2_0(H^1_0) - q.p.$

Ricordiamo anzitutto i seguenti teoremi, dati da Prodi in [4] (cfr. anche [10]).

**TEOREMA 1,1:** *Le soluzioni definite in  $\alpha^{-1}\beta$ , modificate eventualmente in un sottoinsieme di misura nulla, risultano  $L^2$ -continue.*

Nel seguito ammetteremo quindi sempre tacitamente di aver definito le soluzioni dell'equazione di Navier-Stokes in modo che esse risultino  $L^2$ -continue. La (1,4) si può allora scrivere:

$$(1,5) \quad \|x(t_2) - x(t_1)\|_{L^2} = 0.$$

**TEOREMA 1,2:** *Il problema misto (secondo Hadamard) con condizione al contorno di Dirichlet omogenea, per l'equazione di Navier-Stokes, ammette una ed una sola soluzione definita per  $\alpha \leq t \leq \beta$ , che per  $t = \alpha$  assuma un valore assegnato ad arbitrio ed  $\in N$ .*

**TEOREMA 1,3:** *Siano  $x(t)$  una soluzione dell'equazione di Navier-Stokes e  $r(t)$  una funzione soddisfacente alla condizione  $a_1$ ); vale allora la relazione*

$$(1,6) \quad (x(t_2), r(t_2))_{L^2} - (x(t_1), r(t_1))_{L^2} + \int_{t_1}^{t_2} \{ \mu(x(t), r(t))_{H_0^1} - (x(t), r'(t))_{L^2} + b(x(t), x(t), r(t)) \} dt = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), r(t))_{L^2} dt.$$

*Sussiste inoltre la relazione dell'energia:*

$$(1,7) \quad \frac{1}{2} \|x(t_2)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|x(t_1)\|_{L^2}^2 + \mu \int_{t_1}^{t_2} \|x(t)\|_{H_0^1}^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), x(t))_{L^2} dt.$$

Dimostriamo ora i seguenti lemmi.

**LEMMA 1,1:** *Supponiamo che  $f(t)$  sia  $L_0^2(L^2)$ -limitata in  $J$ .*

*Allora ogni soluzione  $x(t)$ , che sia  $L^2$ -limitata in  $J$ , è pure  $L_0^2(H_0^1)$ -limitata in  $J$ .*

Supponiamo infatti che risulti, per  $t \in J$ :

$$(1,8) \quad \|x(t)\|_{L^2} \leq M, \quad \|f(t)\|_{L_0^2(L^2)} \leq K_0.$$

Dalla (1,7) si deduce, posto  $t_1 = t - 1, t_2 = t$ :

$$(1.1) \quad \mu \|x(t)\|_{L^2_0(H^1_0)}^2 = \mu \int_{t-1}^t \|x(\eta)\|_{H^1_0}^2 d\eta \leq \\ \leq \frac{1}{2} \|x(t-1)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|x(t)\|_{L^2}^2 + \int_{t-1}^t \|f(\eta)\|_{L^2} \|x(\eta)\|_{L^2} d\eta \leq \frac{1}{2} M^2 + MK_0.$$

LEMMA 1,2: *Supponiamo che siano verificate le (1,8). Allora la soluzione  $x(t)$  risulta  $L^2$ -debolmente uniformemente continua in  $J$ .*

Sia infatti  $\psi$  una generica funzione  $\in L^2$  e poniamo  $\psi = \psi_1 + \psi_2$ , essendo  $\psi_1$  una funzione  $\in N$  e  $\psi_2$  ortogonale ad  $N$ .

Poichè  $x(t)$  è a valori in  $N$ , risulterà perciò

$$(x(t), \psi)_{L^2} = (x(t), \psi_1)_{L^2}.$$

Osserviamo ora che  $N_1$  è denso in  $N$ ; perchè il lemma sia dimostrato, sarà perciò sufficiente, per le ipotesi poste, far vedere che  $(x(t), \psi)_{L^2}$  è uniformemente continua, per ogni  $\psi \in N^1$ .

Per il teorema 1,3 vale d'altra parte, per ogni  $\psi \in N^1$ , la relazione:

$$(1,10) \quad (x(t_2), \psi)_{L^2} - (x(t_1), \psi)_{L^2} = - \int_{t_1}^{t_2} \{ \mu(x(t), \psi)_{H^1_0} + \\ + b(x(t), x(t), \psi) \} dt + \int_{t_1}^{t_2} (f(t), \psi)_{L^2} dt.$$

Si ha poi, per una disuguaglianza di Ladyzenskaja [5] e la disuguaglianza di Hölder:

$$(1,11) \quad |b(x(t), x(t), \psi)| = |b(x(t), \psi, x(t))| \leq \\ \leq \|x(t)\|_{L^2}^2 \|\psi\|_{H^1_0} \leq \sqrt{2} \|x(t)\|_{L^2} \|x(t)\|_{H^1_0} \|\psi\|_{H^1_0}.$$

Dalla (1,10) segue quindi, per le (1,8), (1,9), (1,11) e supponendo  $t_2 - t_1 \leq 1$ :

$$\begin{aligned}
 |(x(t_2), \psi)_{L^2} - (x(t_1), \psi)_{L^2}| &\leq \|\psi\|_{H_0^1} \int_{t_1}^{t_2} (\mu + \sqrt{2} \|x(t)\|_{L^2}) \|x(t)\|_{H_0^1} dt + \\
 (1,12) \quad &+ \|\psi\|_{L^2} \int_{t_1}^{t_2} \|f(t)\|_{L^2} dt \leq \\
 &\leq \|\psi\|_{H_0^1} (\mu + \sqrt{2} M) \left( \frac{1/2 M^2 + MK_0}{\mu} \right)^{1/2} (t_2 - t_1)^{1/2} + \|\psi\|_{L^2} K_0 (t_2 - t_1)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

La (1,12) dimostra il nostro lemma.

LEMMA 1,3: Siano  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  due soluzioni dell'equazione di Navier-Stokes, corrispondenti ai termini noti  $f_1(t)$  ed  $f_2(t)$ . Posto  $w(t) = x_1(t) - x_2(t)$ , vale la relazione:

$$\begin{aligned}
 \|w(t_2)\|_{L^2}^2 - \|w(t_1)\|_{L^2}^2 + 2\mu \int_{t_1}^{t_2} \|w(t)\|_{H_0^1}^2 dt &= 2 \int_{t_1}^{t_2} b(w(t), w(t), x_1(t)) dt + \\
 (1,13) \quad &+ 2 \int_{t_1}^{t_2} (f_1(t) - f_2(t), w(t))_{L^2} dt.
 \end{aligned}$$

Scritte infatti per le soluzioni  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  le relazioni corrispondenti alle (1,6) e sottratte membro a membro tali relazioni, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 (w(t_2), v(t_2))_{L^2} - (w(t_1), v(t_1))_{L^2} + \int_{t_1}^{t_2} \{\mu (w(t), v(t))_{H_0^1} - (w(t), v'(t))_{L^2} + \\
 + b(x_1(t), x_1(t), v(t)) - b(x_2(t), x_2(t), v(t))\} dt &= \int_{t_1}^{t_2} (f_1(t) - f_2(t), v(t))_{L^2} dt
 \end{aligned}$$

ossia anche

$$(1,14) \quad \begin{aligned} & (w(t_2), v(t_2))_{L^2} - (w(t_1), v(t_1))_{L^2} + \int_{t_1}^{t_2} \{ \mu(w(t), v(t))_{H_0^1} - (w(t), v'(t))_{L^2} + \\ & + b(w(t), x_1(t), v(t)) + b(x_2(t), w(t), v(t)) \} dt = \int_{t_1}^{t_2} (f_1(t) - f_2(t), v(t))_{L^2} dt . \end{aligned}$$

La (1,13) si può dedurre dalla precedente equazione ripetendo, senza alcuna modificazione, la dimostrazione data nel lemma 3 di [4] per ricavare la relazione dell'energia (cfr. anche [6], remarque 4).

Basandoci sui teoremi e lemmi precedenti, siamo ora in grado di dimostrare alcuni teoremi per noi fondamentali.

**TEOREMA 1,4:** *Sia  $x(t)$  una soluzione  $L^2$ -limitata in  $J$  dell'equazione di Navier-Stokes e supponiamo che  $f(t)$  sia  $L_0^2(L^2)$ -limitata in  $J$ . Allora da ogni successione reale  $\{l_n\}$  è possibile estrarre una sottosuccessione (che diremo ancora  $\{l_n\}$ ), tale che risulti, per ogni  $t \in J$ :*

$$(1,15) \quad \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty}^* f(t + l_n) &= f_1(t) \\ & \quad \quad \quad L_0^2(L^2) \\ \lim_{n \rightarrow \infty}^* x(t + l_n) &= z(t) \\ & \quad \quad \quad L^2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty}^* x(t + l_n) &= z(t) \\ & \quad \quad \quad L_0^2(H_0^1) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x(t + l_n) & \stackrel{!}{=} z(t) . \\ & \quad \quad \quad L_0^2(L^2) \end{aligned}$$

*Inoltre la funzione  $z(t)$  è una soluzione  $L^2$ -limitata in  $J$  dell'equazione di Navier-Stokes corrispondente al termine noto  $f_1(t)$  e risulta:*

$$(1,16) \quad \sup_{t \in J} \|z(t)\|_{L^2} \leq \sup_{t \in J} \|x(t)\|_{L^2}$$

La prima e la terza delle (1,15) si possono dimostrare ripetendo, senza alcuna modificazione, un ragionamento di Amerio (cfr. [3], § 5).



Per provare la seconda delle (1,15) basta osservare che, poichè la successione  $x(t + l_n)$  è  $L^2$ -limitata, detta  $\{\eta_r\}$  la successione dei numeri razionali, è possibile estrarre da  $\{l_n\}$  una sottosuccessione (che indicheremo ancora con  $\{l_n\}$ ) tale che risulti, per ogni  $r$  ed ogni  $\varphi \in L^2$ :

$$(1,17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x(\eta_r + l_n), \varphi)_{L^2} = (z(\eta_r), \varphi)_{L^2}$$

Consideriamo, fissato  $\varphi$ , la successione  $\{(x(t + l_n), \varphi)_{L^2}\}$ ; le funzioni  $(x(t + l_n), \varphi)_{L^2}$  sono ovviamente equilimitate e risultano, per il lemma 1,2, equi-uniformemente continue in  $J$ . Dalla (1,17) segue quindi che la successione  $\{(x(t + l_n), \varphi)_{L^2}\}$  converge per ogni  $t$  ed uniformemente in ogni intervallo limitato e sussiste perciò la seconda delle (1,15).

Le funzioni  $x(t + l_n)$  formano dunque una successione limitata in  $L^2$  ed in  $L^2_0(H^1_0)$ , convergente debolmente in  $L^2$ , per ogni  $t \in J$ , verso una funzione  $z(t)$ ; per un lemma di Hopf [7] (cfr. pure [4] lemma 4,) è allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(t + l_n) \underset{L^2_0(L^2)}{=} z(t).$$

È quindi dimostrata anche l'ultima delle (1,15).

La (1,16) segue immediatamente, in base ad una ben nota proprietà del limite debole.

Ci rimane da dimostrare che  $z(t)$  soddisfa all'equazione

$$(1,18) \quad \int_J \{ \mu(z(t), h(t))_{H^1_0} - (z(t), h'(t))_{L^2} + b(z(t), z(t), h(t)) \} dt = \\ = \int_J (f(t), h(t))_{L^2} dt.$$

Assumiamo l'intero  $p$  tanto grande che il supporto di  $h(t)$

sia contenuto in  $\Delta_p$ ; si ha allora, per le (1,15):

(1,19)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_J \{ \mu(x(t+l_n), h(t))_{H_0^1} - (x(t+l_n), h'(t))_{L^2} - (f(t+l_n), h(t))_{L^2} \} dt = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Delta_p} \{ \mu(x(t+l_n), h(t))_{H_0^1} - (x(t+l_n), h'(t))_{L^2} - (f(t+l_n), h(t))_{L^2} \} dt = \\ & = \int_{\Delta_p} \{ \mu(z(t), h(t))_{H_0^1} - (z(t), h'(t))_{L^2} - (f_i(t), h(t))_{L^2} \} dt = \\ & = \int_J \{ \mu(z(t), h(t))_{H_0^1} - (z(t), h(t))_{L^2} - (f_i(t), h(t))_{L^2} \} dt . \end{aligned}$$

È inoltre:

$$(1,20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Delta_p} b(x(t+l_n), x(t+l_n), h(t)) dt = \int_J b(z(t), z(t), h(t)) dt .$$

Risulta infatti, tenendo presente che  $|b(u, v, w)| = |b(u, w, v)|$ :

$$\begin{aligned} (1,21) \quad & \left| \int_{\Delta_p} b(x(t+l_n), x(t+l_n), h(t)) dt - \int_{\Delta_p} b(z(t), z(t), h(t)) dt \right| < \\ & \leq \int_{\Delta_p} |b(x(t+l_n) - z(t), x(t+l_n), h(t))| dt \\ & + \int_{\Delta_p} |b(z(t), x(t+l_n) - z(t), h(t))| dt < \\ & \leq \int_{\Delta_p} \|x(t+l_n) - z(t)\|_{L^2} \|x(t+l_n)\|_{H_0^1} \|h(t)\|_{L^2} dt + \\ & + \int_{\Delta_p} \|z(t)\|_{L^2} \|x(t+l_n) - z(t)\|_{L^2} \|h(t)\|_{H_0^1} dt < \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sup_{t \in \Delta_p} \|h(t)\|_{L^4} \left\{ \int_{\Delta_p} \|x(t+l_n) - z(t)\|_{L^4}^2 dt \right\}^{1/2} \\
 &\cdot \left\{ \int_{\Delta_p} \|x(t+l_n)\|_{H_0^1}^2 dt \right\}^{1/2} + \sup_{t \in \Delta_p} \|h(t)\|_{H_0^1} \left\{ \int_{\Delta_p} \|z(t)\|_{L^4}^2 dt \right\}^{1/2} \\
 &\cdot \left\{ \int_{\Delta_p} \|x(t+l_n) - z(t)\|_{L^4}^2 dt \right\}^{1/2} \leq M_1 \left\{ \int_{\Delta_p} \|x(t+l_n) - z(t)\|_{H_0^1}^2 \right. \\
 &\cdot \|x(t+l_n) - z(t)\|_{L^4}^2 dt \left. \right\}^{1/2} \\
 &\leq M_2 \left\{ \int_{\Delta_p} \|x(t+l_n) - z(t)\|_{L^4}^2 dt \right\}^{1/4}
 \end{aligned}$$

L'ultima espressione risulta, per la quarta delle (1,15), infinitesima per  $n \rightarrow \infty$  e la (1,20) è quindi dimostrata.

Dalle (1,19), (1,20) segue che la funzione  $z(t)$  soddisfa alla (1,18); il teorema è dunque dimostrato.

**TEOREMA 1,5:** *Sia  $x(t)$  la soluzione in  $[t_0, \infty)$  dell'equazione di Navier-Stokes, soddisfacente alla condizione iniziale  $x(t_0) = x_0$ . Allora, se  $f(t)$  è  $L^2$ -limitata in  $[t_0, \infty)$ ,  $x(t)$  è  $L^2$ -limitata in  $[t_0, \infty)$ .*

*Più precisamente, se risulta*

$$(1,22) \quad \|x(t_0)\|_{L^4} = \|x_0\|_{L^4}, \quad \sup_{t_0 < t < \infty} \|f(t)\|_{L^4} = K,$$

si ha, posto

$$(1,23) \quad \sigma = \min \left\{ \frac{\mu^2}{3K^2 \varrho^4}, \quad \frac{1 + 2\frac{\mu}{\varrho^2}}{\|x_0\|_{L^4}^2} \right\}$$

( $\varrho$  essendo la costante di immersione di  $H_0^1$  in  $L^4$ ):

$$(1,24) \quad \|x(t)\|_{L^4}^2 \leq \frac{1}{\sigma} \left( 1 + 2\frac{\mu}{\varrho^2} \right) \quad (t_0 \leq t < \infty).$$

Posto inoltre

$$(1,25) \quad \nu = \frac{\varrho}{\mu} \sqrt{3(\varrho^2 + 2\mu)}$$

si possono distinguere i seguenti due casi:

$\alpha)$  Se  $\|x_0\|_{L^1} \leq K\nu$ , allora anche  $\|x(t)\|_{L^1} \leq K\nu$  ( $t_0 < t < \infty$ );

$\beta)$  Se  $\|x_0\|_{L^1} \geq K\nu$ , risulta  $\|x(t)\|_{L^1} \leq \|x_0\|_{L^1}$ .

Osserviamo anzitutto che, posto  $\sigma = \sigma_1 + \varepsilon$ . ( $\varepsilon > 0$ ) dalla (1,23) segue

$$(1,26) \quad \|x_0\|_{L^1}^2 \leq \frac{1 + 2 \frac{\mu}{\varrho^2}}{\sigma_1 + \varepsilon}.$$

Essendo  $\|x(t)\|_{L^1}$  continua, potremo allora determinare un numero  $\delta$ , con  $0 < \delta \leq 1$ , tale che risulti

$$(1,27) \quad \max_{t_0 < t < t_0 + 2\delta} \|x(t)\|_{L^1}^2 < \frac{1}{\sigma_1} \left(1 + 2 \frac{\mu}{\varrho^2}\right).$$

Dividiamo il semiasse  $t \geq t_0$  in intervalli di ampiezza  $\delta$  mediante i punti  $t_0, t_1 = t_0 + \delta, t_2 = t_0 + 2\delta, \dots$  ed indichiamo con  $\bar{t}_j$  il punto dell'intervallo  $[t_{j-1}, t_j]$  nel quale la funzione continua  $\|x(t)\|_{L^1}$  assume valore massimo.

Dimostriamo che è

$$(1,28) \quad \|x(\bar{t}_j)\|_{L^1} < \frac{1}{\sigma_1} \left(1 + 2 \frac{\mu}{\varrho^2}\right) \quad (j = 1, 2, \dots).$$

In virtù della (1,27), la (1,28) è certamente verificata per  $j = 1, 2$ ; facciamo vedere che essa vale anche per  $j = 3$ .

Supponiamo infatti che sia

$$(1,29) \quad \|x(\bar{t}_3)\|_{L^1} > \|x(\bar{t}_1)\|_{L^1}$$

(se fosse verificata la disuguaglianza inversa, la tesi sarebbe già dimostrata). Non può allora essere

$$(1,30) \quad \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_3} \|x(t)\|_{L^1}^2 dt > \frac{\delta}{\sigma_1}.$$

Se infatti valesse la (1,30), si avrebbe, per le (1,7), (1,23):

$$\begin{aligned} \|x(\bar{t}_2)\|_{L^2}^2 &\leq \|x(\bar{t}_1)\|_{L^2}^2 - 2\mu \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \|x(t)\|_{H_0^1}^2 dt + 2 \left\{ \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \|f(t)\|_{L^2}^2 dt \right\}^{1/2} \\ &\cdot \left\{ \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \|x(t)\|_{L^2}^2 dt \right\}^{1/2} < \|x(\bar{t}_1)\|_{L^2}^2 - 2\mu \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \|x(t)\|_{H_0^1}^2 dt + \\ &+ 2 \sqrt{3\delta} \frac{\mu}{\rho^2 \sqrt{3\sigma_1}} \sqrt{\frac{\sigma_1}{\delta}} \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \|x(t)\|_{L^2}^2 dt < \\ &< \|x(\bar{t}_1)\|_{L^2}^2 - 2\mu \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \|x(t)\|_{H_0^1}^2 dt + \frac{2\mu}{\rho^2} \rho^2 \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \|x(t)\|_{H_0^1}^2 dt = \|x(\bar{t}_1)\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

relazione che è in contrasto con la (1,29)

Risulta perciò

$$(1,31) \quad \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \|x(t)\|_{L^2}^2 dt < \frac{\delta}{\sigma_1}.$$

Essendo  $\bar{t}_2 - \bar{t}_1 \geq \delta$ , dalla (1,31) segue:

$$(1,32) \quad \min_{\bar{t}_1 < t < \bar{t}_2} \|x(t)\|_{L^2}^2 = \|x(t^*)\|_{L^2}^2 < \frac{1}{\sigma_1}$$

ed inoltre, ovviamente

$$(1,33) \quad \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \|x(t)\|_{L^2}^2 dt < \frac{\delta}{\sigma_1}.$$

Dalla (1,7) si deduce allora, tenendo presente le (1,23), (1,32), (1,33):

$$\begin{aligned} \|x(\bar{t}_s)\|_{L^1}^2 &\leq \|x(t^*)\|_{L^1}^2 + 2 \left\{ \int_{t^*}^{\bar{t}_s} \|f(t)\|_{L^1}^2 dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_{t^*}^{\bar{t}_s} \|x(t)\|_{L^1}^2 dt \right\}^{1/2} < \\ &< \frac{1}{\sigma_1} + 2 \sqrt{3\delta} \frac{\mu}{\rho^2 \sqrt{3\sigma_1}} \sqrt{\frac{\delta}{\sigma_1}} = \frac{1}{\sigma_1} \left( 1 + \frac{2\mu\delta}{\rho^2} \right) \leq \frac{1}{\sigma_1} \left( 1 + 2 \frac{\mu}{\rho^2} \right) \end{aligned}$$

In modo perfettamente analogo si può dimostrare che la (1,28) è valida per  $j = 5, 7, \dots$  ed anche, partendo dal punto  $\bar{t}_s$ , per  $j = 4, 6, \dots$

Dalla (1,28) segue poi, per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , la (1,24).

Supponiamo che sia  $\|x_0\|_{L^1} \geq K\nu$ ; dalle (1,23), (1,25) segue:

$$(1,34) \quad \sigma = \frac{1 + 2 \frac{\mu}{\rho^2}}{\|x_0\|_{L^1}^2}$$

e, di conseguenza, per la (1,24):

$$\|x(t)\|_{L^1}^2 \leq \|x_0\|_{L^1}^2.$$

Data l'arbitrarietà di  $t_0$ , se quindi è  $\|x(t)\|_{L^1} \geq K\nu$  per  $\alpha \leq t \leq \beta$ ,  $\|x(t)\|_{L^1}$  risulta, in tale intervallo, una funzione monotona, non crescente.

Se invece fosse  $\|x_0\|_{L^1} \leq K\nu$ , risulterebbe

$$(1,35) \quad \sigma = \frac{\mu^2}{3K^2\rho^4},$$

ossia, per la (1,24):

$$\|x(t)\|_{L^1}^2 \leq \frac{3K^2\rho^4}{\mu^2} \left( 1 + 2 \frac{\mu}{\rho^2} \right) = K^2\nu^2.$$

Il teorema è perciò dimostrato.

**TEOREMA 1,6:** *Supponiamo che  $f(t)$  sia  $L^2$ -limitata in  $J$  ed indichiamo con  $K$  il suo estremo superiore. Esiste allora almeno una soluzione  $\tilde{x}(t)$  dell'equazione di Navier-Stokes che sia  $L^2$ -limitata in  $J$ .*

Consideriamo la successione di funzioni  $\{x_n^*(t)\}$  definite nel modo seguente.

Per  $t \geq -n$   $x_n^*(t)$  sia la soluzione dell'equazione di Navier-Stokes soddisfacente alla condizione iniziale  $x^*(-n) = 0$ : per  $t < -n$ , sia  $x_n^*(t) = 0$ .

È evidente che, posto

$$(1,36) \quad f_n^*(t) = \begin{cases} f(t) & \text{per } t \geq -n \\ 0 & \text{per } t < -n \end{cases}$$

la funzione  $x_n^*(t)$  sarà una soluzione  $L^2$ -limitata in  $J$  dell'equazione di Navier-Stokes corrispondente al termine noto  $f_n^*(t)$ .

In virtù del teorema precedente (caso  $\alpha$ ), risulta

$$(1,37) \quad \|x_n^*(t)\|_{L^2} \leq Kr \quad (t \in J)$$

ed inoltre, ovviamente

$$(1,38) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^*(t) \stackrel{L^2}{=} f(t).$$

Poichè la successione  $\{x_n^*(t)\}$  è, per la (1,37), equilimitata e, per il lemma 1,2,  $L^2$ -debolmente equi-uniformemente continua, è possibile, mediante un ragionamento identico a quello eseguito nel teorema 1,4, estrarre da  $\{x_n^*(t)\}$  una sottosuccessione (che diremo ancora  $\{x_n^*(t)\}$ ) tale che risulti, per ogni  $t \in J$ :

$$(1,39) \quad \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty}^* x_n^*(t) & \stackrel{L^2}{=} \tilde{x}(t) \\ \lim_{n \rightarrow \infty}^* x_n^*(t) & \stackrel{L_0^2(H_0^1)}{=} \tilde{x}(t) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^*(t) & \stackrel{L_0^2(L^2)}{=} \tilde{x}(t). \end{aligned}$$

Sempre per il teorema 1,4, la funzione  $\tilde{x}(t)$  così determinata è una soluzione dell'equazione di Navier-Stokes corrispondente al termine noto  $f(t)$  e per essa vale la relazione:

$$(1,40) \quad \sup_{t \in J} \| \tilde{x}(t) \|_{L^2} \leq \sup_{t \in J} \| x_n^*(t) \|_{L^2} \leq K\nu$$

L'esistenza di una soluzione  $\tilde{x}(t)$  dell'equazione di Navier-Stokes, che sia  $L^2$ -limitata in  $J$  è dunque dimostrata.

Per le soluzioni  $x(t)$ ,  $L^2$ -limitate in  $J$ , vale il seguente teorema di unicità.

**TEOREMA 1,7:** *Se esiste una soluzione  $x(t)$  tale che*

$$(1,41) \quad \sup_{t \in J} \left[ \| x(\eta) \|_{C^0(t-1,t; L^2)}^{1/2} \| x(t) \|_{L_0^2(H_0^1)}^{1/2} \right] < \\ < \min \left\{ \frac{(1-\alpha)\mu^{3/4}}{3\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{\alpha}\mu}{\sqrt{2\rho}} \right\}$$

( $\alpha$  essendo un'arbitraria costante, con  $0 < \alpha < 1$ , che potrà essere fissata in modo da rendere massima la quantità data dalla (1,41)) allora non esistono altre soluzioni  $L^2$ -limitate in  $J$  dell'equazione di Navier-Stokes.

Sia infatti  $y(t)$  una seconda soluzione, definita in  $J$ : posto  $w(t) = x(t) - y(t)$ , si ha, per la (1,13), per ogni  $\delta > 0$ :

$$(1,42) \quad \| w(t - \delta) \|_{L^2}^2 - \| w(t) \|_{L^2}^2 = 2\mu \int_{t-\delta}^t \| w(\eta) \|_{H_0^1}^2 d\eta - \\ - 2 \int_{t-\delta}^t b(w(\eta), w(\eta), x(\eta)) d\eta .$$

Risulta d'altra parte, per la disuguaglianza, già citata, di



Ladyzenskaja [5] e la disuguaglianza di Hölder:

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{t-\delta}^t b(w(\eta), w(\eta), x(\eta)) d\eta \right| < \\
 & \leq \int_{t-\delta}^t \|x(\eta)\|_{L^4} \|w(\eta)\|_{H_0^1} \|w(\eta)\|_{L^4} d\eta < \\
 & \leq \sqrt{2} \int_{t-\delta}^t \|x(\eta)\|_{L^2}^{1/2} \|x(\eta)\|_{H_0^1}^{1/2} \|w(\eta)\|_{L^2}^{1/2} \|w(\eta)\|_{H_0^1}^{1/2} d\eta < \\
 (1,43) \quad & \leq \sqrt{2} \max_{t-\delta < \eta < t} \|x(\eta)\|_{L^2}^{1/2} \max_{t-\delta < \eta < t} \|w(\eta)\|_{L^2}^{1/2} \cdot \\
 & \int_{t-\delta}^t \|x(\eta)\|_{H_0^1}^{1/2} \|w(\eta)\|_{H_0^1}^{1/2} d\eta < \sqrt{2} \max_{t-\delta < \eta < t} \|x(\eta)\|_{L^2}^{1/2} \cdot \\
 & \left\{ \int_{t-\delta}^t \|x(\eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta \right\}^{1/4} \max_{t-\delta < \eta < t} \|w(\eta)\|_{L^2}^{1/2} \left\{ \int_{t-\delta}^t \|w(\eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta \right\}^{3/4}
 \end{aligned}$$

Posto

$$(1,44) \quad \Gamma_\delta = \sup_{t \in J} \left[ \sup_{t-\delta < \eta < t} \|x(\eta)\|_{L^2}^{1/2} \left\{ \int_{t-\delta}^t \|x(\eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta \right\}^{1/4} \right].$$

si ottiene, introducendo la (1,43) nella (1,42):

$$\begin{aligned}
 (1,45) \quad & \|w(t-\delta)\|_{L^2}^2 \geq \|w(t)\|_{L^2}^2 + 2\mu \int_{t-\delta}^t \|w(\eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta + \\
 & - 2\sqrt{2} \Gamma_\delta \max_{t-\delta < \eta < t} \|w(\eta)\|_{L^2}^{1/2} \left\{ \int_{t-\delta}^t \|w(\eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta \right\}^{3/4}.
 \end{aligned}$$

Analogamente, si ha:

$$(1,46) \quad \|w(t-\delta)\|_{L^2}^2 \leq \|w(t)\|_{L^2}^2 + 2\mu \int_{t-\delta}^t \|w(\eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta + \\ + 2\sqrt{2}\Gamma_\delta \max_{t-\delta \leq \eta < t} \|w(\eta)\|_{L^2}^{1/2} \left\{ \int_{t-\delta}^t \|w(\eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta \right\}^{3/4}.$$

Indichiamo poi con  $t'$  e  $t''$  i punti dell'intervallo  $[t-\delta, t]$  nei quali la funzione continua  $\|w(t)\|_{L^2}$  assume rispettivamente valore massimo e minimo.

Dimostriamo che, fissato  $\delta > 0$ , esiste una quantità  $\lambda$ , dipendente da  $\Gamma_\delta$ ,  $\mu$ ,  $\Omega$  e  $\delta$  tale che risulti, per ogni  $t \in J$ :

$$(1,47) \quad \int_{t-\delta}^t \|w(\eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta \geq \frac{1}{\lambda\mu} \max_{t-\delta \leq \eta < t} \|w(\eta)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{\lambda\mu} \|w(t')\|_{L^2}^2.$$

Supponiamo infatti che, preso comunque  $\lambda > 0$ , esista un valore  $t_\lambda$  (dipendente da  $\lambda$ ) tale che:

$$(1,48) \quad \int_{t_\lambda-\delta}^{t_\lambda} \|w(\eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta < \frac{1}{\lambda\mu} \|w(t'_\lambda)\|_{L^2}^2$$

Sarà quindi pure.

$$(1,49) \quad \left| \int_{t'_\lambda}^{t''_\lambda} \|w(\eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta \right| < \frac{1}{\lambda\mu} \|w(t'_\lambda)\|_{L^2}^2.$$

Supponiamo, in un primo tempo, che sia  $t'_\lambda < t''_\lambda$ ; dalla (1,46)

si deduce allora:

$$(1,50) \quad \|w(t'_\lambda)\|_{L^2}^2 \leq \|w(t''_\lambda)\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\lambda} \|w(t'_\lambda)\|_{L^2}^2 + \\ - 2\sqrt{2} \Gamma_\delta \frac{1}{(\lambda\mu)^{3/4}} \|w(t'_\lambda)\|_{L^2}^2,$$

da cui si ricava, assumendo  $\lambda \geq 1$

$$(1,51) \quad \|w(t''_\lambda)\|_{L^2}^2 \geq \left(1 - \frac{2}{\lambda} - 2\sqrt{2} \frac{\Gamma_\delta}{(\lambda\mu)^{3/4}}\right) \|w(t'_\lambda)\|_{L^2}^2 \geq \\ \geq \left[1 - \frac{2}{\lambda^{3/4}} \left(1 + \frac{\sqrt{2} \Gamma_\delta}{\mu^{3/4}}\right)\right] \|w(t'_\lambda)\|_{L^2}^2.$$

Se perciò si assume

$$(1,52) \quad \lambda \geq \left[\frac{2}{1-\alpha} \left(1 + \frac{\sqrt{2} \Gamma_\delta}{\mu^{3/4}}\right)\right]^{4/3} \quad (0 < \alpha < 1),$$

risulta, per la (1,51):

$$(1,53) \quad \|w(t''_\lambda)\|_{L^2}^2 \geq \alpha \|w(t'_\lambda)\|_{L^2}^2.$$

ossia anche

$$(1,54) \quad \int_{t'_\lambda - \delta}^{t''_\lambda} \|w(\eta)\|_{H^1_0}^2 d\eta \geq \frac{1}{\rho^2} \int_{t'_\lambda - \delta}^{t''_\lambda} \|w(\eta)\|_{L^2}^2 d\eta \geq \\ \geq \frac{\delta}{\rho^2} \|w(t''_\lambda)\|_{L^2}^2 \geq \frac{\alpha\delta}{\rho^2} \|w(t'_\lambda)\|_{L^2}^2.$$

Per  $\lambda \geq \max \left\{ \left[\frac{2}{1-\alpha} \left(1 + \frac{\sqrt{2} \Gamma_\delta}{\mu^{3/4}}\right)\right]^{4/3}, \frac{\rho^2}{\alpha\mu\delta} \right\}$  si ha quindi:

$$(1,55) \quad \int_{t'_\lambda - \delta}^{t''_\lambda} \|w(\eta)\|_{H^1_0}^2 d\eta \geq \frac{\alpha\delta}{\rho^2} \|w(t'_\lambda)\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{\lambda\mu} \|w(t'_\lambda)\|_{L^2}^2.$$

relazione che è in contrasto con la (1,48).

Supponiamo ora che sia  $t'_1 > t''_1$ ; dalla (1,45) si deduce, in questo caso, tenendo sempre presente la (1,48):

$$(1,56) \quad \|v(t''_1)\|_{L^2}^2 \geq \|w(t'_1)\|_{L^2}^2 - \frac{2\sqrt{2}}{(\lambda\mu)^{3/4}} \Gamma_\delta \|w(t'_1)\|_{L^2}^2 = \\ = \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{(\lambda\mu)^{3/4}} \Gamma_\delta\right) \|w(t'_1)\|_{L^2}^2.$$

Assumendo  $\lambda \geq \left(\frac{2\sqrt{2}\Gamma_\delta}{(1-\alpha)\mu^{3/4}}\right)^{4/3}$ , dalla (1,56) segue ancora la (1,53) e, di conseguenza, la (1,55).

Se infine è  $t'_1 = t''_1$ , si ha immediatamente

$$(1,57) \quad \int_{t'_1-\delta}^{t'_1} \|w(\eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta \geq \frac{\delta}{\varrho^2} \|w(t'_1)\|_{L^2}^2.$$

Abbiamo perciò dimostrato che, se si assume

$$(1,58) \quad \lambda \geq \max \left\{ \left[ \frac{2}{1-\alpha} \left( 1 + \frac{\sqrt{2}\Gamma_\delta}{\mu^{3/4}} \right) \right]^{4/3}, \frac{\varrho^2}{\alpha\mu\delta} \right\} \quad (0 < \alpha < 1),$$

allora risulta, per ogni  $t \in J$ :

$$(1,59) \quad \int_{t-\delta}^t \|w(\eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta \geq \frac{1}{\lambda\mu} \max_{t-\delta < \eta < t} \|w(\eta)\|_{L^2}^2.$$

Dalla (1,45) si ottiene, per la (1,59):

$$(1,60) \quad \|w(t-\delta)\|_{L^2}^2 \geq \|w(t)\|_{L^2}^2 + 2\mu \int_{t-\delta}^t \|w(\eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta - \\ - 2\sqrt{2}\Gamma_\delta(\lambda\mu)^{1/4} \int_{t-\delta}^t \|w(\eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta.$$

Se, oltre alla (1,58), è soddisfatta la relazione

$$(1,61) \quad \lambda \leq \left( \frac{\mu - \tau}{\sqrt{2} \Gamma_0 \mu^{1/4}} \right)^4 \quad (0 < \tau < \mu),$$

si ottiene dalla (1,60), tenendo presente la (1,59):

$$(1,62) \quad \begin{aligned} \|w(t - \delta)\|_{L^2}^2 &\geq \|w(t)\|_{L^2}^2 + 2\tau \int_{t-\delta}^t \|w(\eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta \geq \\ &\geq \|w(t)\|_{L^2}^2 + \frac{2\tau}{\lambda\mu} \max_{t-\delta \leq \eta < t} \|w(\eta)\|_{L^2}^2 \geq \left(1 + \frac{2\tau}{\lambda\mu}\right) \|w(t)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Poniamo ora  $\delta = 1$ ; come si può facilmente constatare, le (1,58), (1,61) risultano contemporaneamente verificate qualora sia

$$(1,63) \quad \begin{aligned} \Gamma_1 = \sup_{t \in J} [\|x(\eta)\|_{C^0(t-1, t; L^2)}^{1/4} \|x(t)\|_{L^2_3(H_0^1)}^{1/4}] < \\ < \min \left\{ \frac{(1 - \alpha)\mu^{3/4}}{3\sqrt{2}}, \frac{\sqrt[4]{\alpha\mu}}{\sqrt{2\rho}} \right\}. \end{aligned}$$

Osservando poi che, poichè  $x(t) \neq y(t)$ , esisterà un punto  $t_*$  in corrispondenza del quale si abbia

$$(1,64) \quad \|w(t_*)\|_{L^2} = \omega > 0,$$

dalla (1,62) segue immediatamente

$$(1,65) \quad \max_{t \rightarrow -\infty} \lim \|w(t)\|_{L^2} = \infty.$$

Poichè  $x(t)$  è  $L^2$ -limitata in  $J$ , la funzione  $y(t)$  non può dunque essere  $L^2$ -limitata in  $J$ .

**COROLLARIO 1,1:** *Se risulta*

$$(1,66) \quad \sup_{t \in J} \|f(t)\|_{L^2} < \left[ \frac{\nu^3}{\mu} \left( \frac{\nu}{2} + 1 \right) \right]^{-1/4} \min \left\{ \frac{(1 - \alpha)\mu^{3/4}}{3\sqrt{2}}, \frac{\sqrt[4]{\alpha\mu}}{\sqrt{2\rho}} \right\};$$

allora l'equazione di Navier-Stokes ammette una soluzione  $L^2$ -limitata in  $J$ , ed una sola.

Osserviamo infatti che, per il teorema (1,6), è

$$(1,67) \quad \sup_{t \in J} \|x(t)\|_{L^2} \leq K\nu,$$

e, di conseguenza, per il lemma 1,1:

$$(1,68) \quad \sup_{t \in J} \|x(t)\|_{L_0^2(H_0^1)}^2 \leq \frac{K^2\nu}{\mu} \left( \frac{\nu}{2} + 1 \right)$$

Si ha quindi:

$$(1,69) \quad \sup_{t \in J} \left[ \|x(\eta)\|_{\sigma^2(\epsilon-1, \epsilon; L^2)}^{1/2} \|x(t)\|_{L_0^2(H_0^1)}^{1/2} \right] \leq K \sqrt[4]{\frac{\nu^2}{\mu} \left( \frac{\nu}{2} + 1 \right)}$$

e perciò, perchè sia verificata la (1,41) basterà che sia

$$K = \sup_{t \in J} \|f(t)\|_{L^2} < \left[ \frac{\nu^2}{\mu} \left( \frac{\nu}{2} + 1 \right) \right]^{-1/4} \min \left\{ \frac{(1-\alpha)\mu^{3/4}}{3\sqrt{2}}, \frac{\sqrt[4]{\alpha\mu}}{\sqrt{2\varrho}} \right\}.$$

2. - Utilizzando i risultati ottenuti nel § 1, daremo, nel presente paragrafo, delle condizioni sufficienti per l'esistenza di una soluzione q.p. dell'equazione di Navier-Stokes.

Nel seguito supporremo sempre che il termine noto  $f(t)$  sia  $L_0^2(L^2)$ -d.q.p.; supporremo inoltre che per la famiglia di equazioni corrispondenti ai termini noti  $f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t + l_n)$  sussista il teorema di unicità della soluzione  $L^2$ -limitata in  $J$  (una condizione sufficiente perchè tale teorema sussista è stata data nel Corollario 1,1).

Indicheremo perciò sempre, nel seguito, con  $\tilde{x}(t)$  la soluzione  $L^2$ -limitata in  $J$  corrispondente al termine noto  $f(t)$ .

Valgono i seguenti teoremi.

**TEOREMA 2,1:** *La funzione  $\tilde{x}(t)$  è  $L^2$ -d.q.p. e  $L_0^2(L^2)$ -q.p.*

La dimostrazione della  $L^2$ -debole quasi-periodicità di  $\tilde{x}(t)$  può essere eseguita ripetendo un ragionamento di Favard [8], ripreso da Amerio [9]; per essa rimandiamo quindi a [9], § 4, c), dato che il procedimento ivi illustrato si estende senza alcuna modificazione al nostro caso.

Dimostriamo che  $\bar{x}(t)$  è  $L^2_0(L^2)$  q.p.; per fare ciò sarà sufficiente far vedere che da ogni successione reale  $\{l_n\}$  è possibile estrarre una sottosuccessione (che diremo ancora  $\{l_n\}$  e che potremo supporre regolare rispetto a  $f(t)$ ) tale che risulti, uniformemente in  $J$ :

$$(2,1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}(t + l_n) \underset{L^2_0(L^2)}{=} z(t).$$

Osserviamo che le funzioni  $\bar{x}(t)$  e  $f(t)$  soddisfano alle ipotesi del teorema 1,4 e che la (2.1) sussiste quindi certamente per ogni  $t \in J$ ;  $z(t)$  è poi l'unica soluzione  $L^2$ -limitata in  $J$  dell'equazione corrispondente al termine noto  $f_i(t)$ .

Supponiamo, per assurda ipotesi, che la (2,1) non sussista uniformemente in  $J$ . Esiste allora un numero  $\chi > 0$  e tre successioni  $\{t_n\}$ ,  $\{\alpha'_n\} \subseteq \{l_n\}$ ,  $\{\alpha''_n\} \subseteq \{l_n\}$  tali che risulti

$$(2,2) \quad \bar{x}(t_n + \alpha'_n) - \bar{x}(t_n + \alpha''_n) \underset{L^2_0(L^2)}{\|} \geq \chi.$$

Per quanto si è detto sopra, possiamo estrarre da  $\{t_n + \alpha'_n\}$  e  $\{t_n + \alpha''_n\}$  due sottosuccessioni (che indicheremo con le medesime notazioni) per le quali si abbia, uniformemente in  $J$ :

$$(2,3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty}^* f(t + t_n + \alpha'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty}^* f(t + t_n + \alpha''_n) \underset{L^2_0(L^2)}{=} f_i(t).$$

ed inoltre, per ogni  $t \in J$ :

$$(2,4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}(t + t_n + \alpha'_n) \underset{L^2_0(L^2)}{=} z_1(t),$$

$$(2,5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}(t + t_n + \alpha''_n) \underset{L^2_0(L^2)}{=} z_2(t).$$

Le funzioni  $z_1(t)$  e  $z_2(t)$  risultano quindi, per il teorema 1,4, soluzioni  $L^2$ -limitate in  $J$  dell'equazione di Navier-Stokes corrispondenti al medesimo termine noto  $f(t)$ .

Per il teorema di unicità deve allora essere

$$(2,6) \quad z_1(t) = z_2(t)$$

e, di conseguenza:

$$(2,7) \quad \begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{x}(t + t_n + \alpha'_n) - \tilde{x}(t + t_n + \alpha''_n)\|_{L_0^2(L^2)} \leq \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{x}(t + t_n + \alpha'_n) - z_1(t)\|_{L_0^2(L^2)} + \\ & + \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{x}(t + t_n + \alpha''_n) - z_2(t)\|_{L_0^2(L^2)} = 0. \end{aligned}$$

La (2,7), scritta per  $t = 0$ , contraddice alla (2,2) ed il teorema è dimostrato.

**TEOREMA 2,2:** *Supponiamo che  $f(t)$  sia  $L_0^2(L^2)$ -q.p. e che risulti*

$$(2,8) \quad \Gamma = \sup_{t \in J} [\|\tilde{x}(\eta)\|_{C^1(t-1, t, L^2)}^{1/\mu} \cdot \|\tilde{x}(t)\|_{L_0^2(H_0^1)}^{1/\mu}] < \min \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right\}$$

*Allora la soluzione  $\tilde{x}(t)$  è  $L^2$ -q.p.*

Ricordiamo anzitutto, che, in virtù del teorema precedente,  $\tilde{x}(t)$  risulta  $L_0^2(L^2)$ -q.p.

Per provare la  $L^2$ -quasi-periodicità di  $\tilde{x}(t)$  basterà far vedere che da ogni successione reale  $\{l_n\}$  è possibile estrarre una sottosuccessione (da dirsi ancora  $\{l_n\}$ ) tale che risulti, uniformemente in  $J$ :

$$(2,8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}(t + l_n) \stackrel{L^2}{=} z(t).$$

Supponiamo, per assurda ipotesi, che ciò non sia. Esisterà allora una successione  $\{\bar{l}_n\}$  che gode della seguente proprietà: in corrispondenza di ogni sottosuccessione  $\{l'_n\}$  di  $\{\bar{l}_n\}$  esistono due sottosuccessioni  $\{\alpha'_n\} \subseteq \{l'_n\}$ ,  $\{\alpha''_n\} \subseteq \{l'_n\}$ , una successione  $\{t_n\}$  ed un numero  $\chi' > 0$  tali che risulti

$$(2,9) \quad \|\tilde{x}(t_n + \alpha'_n) - \tilde{x}(t_n + \alpha''_n)\|_{L^2} > \chi'.$$

Supportremo, nel seguito (come è ovviamente lecito) che  $\{l'_n\}$  sia regolare rispetto a  $f(t)$  ed a  $\tilde{x}(t)$  e che risulti quindi, unifor-



memente in  $J$ :

$$(2,10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \| f(t + t_n + \alpha'_n) - f(t + t_n + \alpha''_n) \|_{L^2_0(L^2)} = 0$$

$$(2,11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \| \tilde{x}(t + t_n + \alpha'_n) - \tilde{x}(t + t_n + \alpha''_n) \|_{L^2_0(L^2)} = 0 .$$

Poniamo inoltre:

$$(2,12) \quad w_n(t) = \tilde{x}(t + t_n + \alpha'_n) - \tilde{x}(t + t_n + \alpha''_n) .$$

Consideriamo ora l'intervallo  $[-1, 0]$  e sia  $t''_n$  il punto di tale intervallo nel quale la funzione continua  $\| w_n(t) \|_{L^2}$  assuma il valore minimo.

Supponiamo, in un primo tempo, che sia  $t''_n < 0$  (il caso  $t''_n = 0$  verrà esaminato in seguito) e poniamo

$$(2,13) \quad \max_{t''_n \leq t \leq 0} \| w_n(t) \|_{L^2} = \| w_n(\bar{t}_n) \|_{L^2} .$$

Per la (2,9) sarà:

$$(2,14) \quad \| w_n(\bar{t}_n) \|_{L^2} \geq \chi' .$$

Applichiamo la (1,13) all'intervallo  $[t''_n, \bar{t}_n]$ . Si ottiene, tenendo presente le (1,43), (2,8):

$$(2,15) \quad \begin{aligned} \| w_n(t''_n) \|_{L^2}^2 &\geq \| w_n(\bar{t}_n) \|_{L^2}^2 + 2\mu \int_{t''_n}^{\bar{t}_n} \| w_n(t) \|_{H^1_0}^2 dt + \\ &- 2 \sqrt{2} \Gamma \| w_n(\bar{t}_n) \|_{L^2}^{1/2} \left\{ \int_{t''_n}^{\bar{t}_n} \| w_n(t) \|_{H^1_0}^2 dt \right\}^{3/4} + \\ &- 2 \| w_n(\bar{t}_n) \|_{L^2} \left\{ \int_{t''_n}^{\bar{t}_n} \| f(t + t_n + \alpha'_n) - f(t + t_n + \alpha''_n) \|_{L^2}^2 dt \right\}^{1/2} \geq \\ &\geq (1 - 2 \sqrt{2} \Gamma) \| w_n(\bar{t}_n) \|_{L^2}^2 + (2\mu - 2 \sqrt{2} \Gamma) \int_{t''_n}^{\bar{t}_n} \| w_n(t) \|_{H^1_0}^2 dt + \\ &- 2 \| w_n(\bar{t}_n) \|_{L^2} \| f(t_n + \alpha'_n) - f(t_n + \alpha''_n) \|_{L^2_0(L^2)} . \end{aligned}$$

Se perciò è

$$(2,16) \quad \Gamma \leq \min \left\{ \frac{1-\tau}{2\sqrt{2}}, \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right\} \quad (0 < \tau < 1),$$

si ottiene dalla (2,15), tenendo presente la (2,14):

$$(2,17) \quad \|w_n(t_n'')\|_{L^2}^2 \geq \tau \chi'^2 - 2 \|w_n(\bar{t}_n)\|_{L^2} \|f(t_n + \alpha_n') - f(t_n + \alpha_n'')\|_{L_0^2(L^2)}.$$

Dalle (2,17), (2,10) segue, per  $n \geq \bar{n}$  sufficientemente grande:

$$(2,18) \quad \|w_n(t_n'')\|_{L^2}^2 \geq \frac{\tau \chi'^2}{2}$$

e, di conseguenza:

$$(2,19) \quad \int_{-1}^0 \|w_n(t)\|_{L^2}^2 dt = \|\bar{x}(t_n + \alpha_n') - \bar{x}(t_n + \alpha_n'')\|_{L_0^2(L^2)}^2 \geq \frac{\tau}{2} \chi'^2,$$

relazione che è in contrasto con la (2,11), scritta per  $t = 0$ .

Se poi è  $t_n'' = 0$ , si ha immediatamente, per  $n \geq \bar{n}$ .

$$(2,20) \quad \int_{-1}^0 \|w_n(t)\|_{L^2}^2 dt \geq \frac{1}{2} \chi'^2.$$

Si perviene così, in ogni caso ad un assurdo e la  $L^2$ -convergenza uniforme in  $J$  della successione  $\bar{x}(t + l_n)$  è provata.

Il teorema è quindi dimostrato.

**TEOREMA 2,3:** *Supponiamo che  $f(t)$  sia  $L_0^2(L^2)$ -q.p. Allora ogni soluzione  $\bar{x}(t)$  che sia  $L^2$ -q.p. è anche  $L_0^2(H_0^1)$ -q.p.*

Posto infatti  $w_{j,k}(t) = \bar{x}(t + l_j) - \bar{x}(t + l_k)$ , vale la relazione,

dedotta, come la (2,15), dalle (1,13), (1,43), (2,8):

$$\begin{aligned}
 (2,21) \quad & 2\mu \int_{t-1}^t \|w_{j,k}(\eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta \leq \|w_{j,k}(t-1)\|_{L^2}^2 + \|w_{j,k}(t)\|_{L^2}^2 + \\
 & + 2\sqrt{2} \Gamma \max_{t-1 \leq \eta \leq t} \|w_{j,k}(\eta)\|_{L^2}^{1/2} \left\{ \int_{t-1}^t \|w_{j,k}(\eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta \right\}^{3/4} + \\
 & + 2 \max_{t-1 \leq \eta \leq t} \|w_{j,k}(\eta)\|_{L^2} \left\{ \int_{t-1}^t \|f(\eta + l_j) - f(\eta + l_k)\|_{L^2}^2 d\eta \right\}^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Dalla (2,21) segue immediatamente la tesi.

Possiamo infine dare, in base ai teoremi dimostrati sopra, una condizione sufficiente per l'esistenza di una soluzione q.p. Vale il seguente teorema.

**TEOREMA 2.4:** *Supponiamo che  $f(t)$  sia  $L_0^2(L^2)$ -q.p. e che risulti:*

$$\begin{aligned}
 (2,22) \quad & K = \sup_{t \in J} \|f(t)\|_{L^2} < \left[ \frac{\nu^3}{\mu} \left( \frac{\nu}{2} + 1 \right) \right]^{-(1/4)} \min \left\{ \frac{(1-\alpha)\mu^{3/4}}{3\sqrt{2}}, \right. \\
 & \left. \frac{\sqrt[4]{\alpha}\mu}{\sqrt{2\varrho}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Allora esiste una soluzione  $\tilde{x}(t)$ , ed una sola, che sia  $L^2$ -q.p. e  $L_0^2(H_0^1)$ -q.p.

Osserviamo infatti che, se è soddisfatta la (2,22), esiste, per il corollario 1,1, una ed una sola soluzione  $\tilde{x}(t)$   $L^2$ -limitata in  $J$ .

Sono perciò verificate le ipotesi ammesse, all'inizio del presente paragrafo, sull'unicità della soluzione limitata.

Perchè la soluzione  $\tilde{x}(t)$  sia  $L^2$ -q.p. e  $L_0^2(H_0^1)$ -q.p. basterà, per i teoremi 2,2 e 2,3 che sia soddisfatta la (2,8).

Se vale la (2,22) si ha, d'altra parte, per le (1,67), (1,68), (1,69):

$$\sup_{t \in J} \left[ \|x(\eta)\|_{C^0(t-1,t;L^2)}^{1/2} \|x(t)\|_{L_0^2(H_0^1)}^{1/2} \right] < \min \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\mu}{\sqrt{2}} \right\}$$

e, di conseguenza, la (2,8) è certamente verificata.

NOTA (aggiunta durante la correzione delle bozze): Uno studio delle soluzioni quasi-periodiche dell'equazione di Navier-Stokes in più di due dimensioni è stato recentemente effettuato da C. Foias nel lavoro « Essais dans l'étude des solutions des équations de Navier-Stokes dans l'espace. L'unicité et la presque-périodicité des solutions petites » (Rend. Sem. Mat. Padova, vol. XXXII 1962)). In questo lavoro Foias dimostra che, se  $f(t)$  è  $L^2$ - $q.p.$  e se esiste una soluzione  $\tilde{x}(t)$  tale che, per un certo  $p$ , con  $3 < p \leq \infty$ , risulti

$$\sup_{t \in J} \|\tilde{x}(t)\|_{L^p} < K_{p\Omega}$$

( $K_{p\Omega}$  essendo una quantità che dipende solamente da  $\Omega$  e da  $p$ ), allora  $\tilde{x}(t)$  è  $L^2$ - $q.p.$

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] TRUESDELL C.: *Notes on the history of the general equations of hydrodynamics*. Am. Math. Monthly, 60 (1953).
- [2] PRODI G.: *Rassegna di ricerche intorno alle equazioni di Navier-Stokes*. Univ. di Trieste, quaderno n° 2.
- [3] AMERIO L.: *Sulle equazioni lineari quasi-periodiche negli spazi hilbertiani*. Note I e II, Acc. Naz. Lincei, XXXI (1961).
- [4] PRODI G.: *Qualche risultato riguardo alle equazioni di Navier-Stokes nel caso bidimensionale*. Rend. Sem. Mat. Padova, XXX (1960).
- [5] LADYZENSKAJA O. A.: *Soluzioni in grande del problema al contorno per l'equazione di Navier-Stokes in due variabili spaziali*. Dokl Akad. Nauk SSSR, 123 (1958).
- [6] LIONS J. L.: *Sur la régularité et l'unicité des solutions turbulentes des équations de Navier-Stokes*. Rend. Sem. Mat. Padova, XXX (1960).
- [7] HOPF E.: *Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen*. Math. Nachr., 4 (1951).
- [8] FAVARD J.: *Leçons sur les fonctions presque-périodiques*. Gauthier-Villars (1933).
- [9] AMERIO L.: *Sulle equazioni differenziali quasi-periodiche astratte*. Ric. di Mat. IX (1960).
- [10] LIONS J. L. e PRODI G.: *Un théorème d'existence et d'unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2*. C.R. Acad. Sci., t. 248 (1959).