RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ARNESE

Sulla dipendenza dal parametro degli integrali di una equazione differenziale ordinaria del primo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 33 (1963), p. 140-162

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__140_0>

SULLA DIPENDENZA DAL PARAMETRO DEGLI INTEGRALI DI UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORDINARIA DEL PRIMO ORDINE

Nota *) *di* GIUSEPPE ARNESE (*a Bari*) **)

In una nota di parecchi anni fa E. PINI [5] ha dimostrato che se $f(x, y, z)$ è una funzione definita per $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a$, $\alpha < y < \beta$, $|z| < +\infty$, ivi continua e limitata, l'integrale superiore dell'equazione:

$$z(x, y) = z_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y, z(t, y)]dt \tag{I}$$

è semicontinuo superiormente rispetto ad y [1]).

Successivamente F. CAFIERO [2]) ha provato che alla medesima conclusione si perviene nel caso in cui $f(x, y, z)$ è misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad (y, z), risultando, inoltre, $|f(x, y, z)| \leqslant M(x, y)$ con $M(x, y)$ sommabile in $[x_0, x_0 + a]$ per ogni y e monotona rispetto ad y per ogni x.

È noto che tale risultato si è rivelato molto utile, fra l'altro, nello stabilire abbastanza generali teoremi di esistenza per certi

---

*) Pervenuta in redazione il 14 luglio 1962.

Indirizzo dell'A.: Istituto di Analisi matematica, Università, Bari.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R

[1]) Analogamente l'integrale inferiore è semicontinuo inferiormente rispetto ad y e, quindi, se si suppone che per la (I) sussista un teorema di unicità, la sua soluzione è continua rispetto ad y.

[2]) Cfr. [2], pagg. 241-242.

problemi di valori iniziali concernenti l'equazione iperbolica $z_{xy} = g(x, y, z, z_x, z_y)$ in ipotesi di continuità per la funzione g e di sufficiente regolarità per i dati iniziali [3]).

Recentemente G. SANTAGATI [4]) nello studio di un problema di questo tipo, ma in ipotesi più generali per i dati, si è trovato nella necessità di estendere il risultato della PINI ed ha, così, dimostrato che se $f(x, y, z)$ verifica ipotesi analoghe a quelle di CAFIERO, ma con $M(x, y)$ costante, e se $\varphi(y)$ è una funzione quasi continua in (α, β), allora la soluzione dell'equazione:

$$z(x, y) = \varphi(y) + \int_{x_0}^{x} f[t, y, z(t, y)]dt \tag{II}$$

quando per essa valga un teorema di unicità, è misurabile rispetto al parametro y.

Analogamente, nel corso di una ricerca di prossima pubblicazione ed avente lo scopo di stabilire un teorema di esistenza relativo al problema di DARBOUX per l'equazione $z_{xy} = g(x, y, z, z_x, z_y)$ in ipotesi del tipo di quelle di CARATHEODORY per le

[3]) Cfr., ad esempio, C. CILIBERTO, *Il problema di* DARBOUX *per una equazione di tipo iperbolico in due variabili*, Ricerche di Matematica, IV (1955), 15-29; idem, *Su alcuni problemi relativi ad una equazione di tipo iperbolico in due variabili*, Boll. U.M.I. (3), XI (1956), 383-393; F. GUGLIELMINO, *Sul problema di* GOURSAT, Ricerche di Matematica, IX (1960), 91-105; F. GUGLIELMINO, *Sull'esistenza delle soluzioni dei problemi relativi alle equazioni non lineari del tipo iperbolico in due variabili*, Le Matematiche, XIV (1959), 67-80. Applicazioni del teorema della PINI si sono avute anche per certi sistemi di equazioni alle derivate parziali; cfr., in proposito, A. ZITAROSA, *Su alcuni sistemi iperbolici di equazioni a derivate parziali del primo ordine*, Ricerche di Matematica, VIII (1959) 240-270.

[4]) Cfr. G. SANTAGATI, *Il problema di* DARBOUX *per una equazione del secondo ordine di tipo iperbolico*, Le Matematiche, XIV (1959), 115-147. SANTAGATI utilizza, poi, la sua estensione del teorema della PINI per lo studio di certi sistemi analoghi a quelli considerati da ZITAROSA nel lavoro citato in [3]); cfr., a tal proposito, G. SANTAGATI, *Su un problema al contorno per una classe di sistemi iperbolici di equazioni alle derivate parziali del primo ordine*, Le Matematiche, XV (1960).

equazioni ordinarie, mi sono imbattuto nella questione di studiare la dipendenza dal parametro y degli integrali dell'equazione (II) nel caso che $f(x, y, z)$ sia misurabile rispetto ad (x, y) e continua rispetto a z nonchè maggiorata, in valore assoluto, da una funzione $M(x, y)$ superficialmente sommabile.

A tal proposito, in questa nota, dimostro che, nelle ipotesi dette, l'integrale superiore [5]) dell'equazione (II) è misurabile rispetto ad y.

Tale risultato, che, evidentemente, contiene quello di SANTAGATI, trovasi nel n. 3 di questo lavoro. Esso viene dedotto da un altro, contenuto nel n. 2, nel quale pervengo alla medesima conclusione del citato teorema di CAFIERO ma in ipotesi meno restrittive. In tale deduzione è essenziale il lemma V del n. 3 in cui viene messa in luce una proprietà delle funzioni superficialmente misurabili. Il n. 1, infine, è dedicato ad alcuni elementari lemmi preliminari.

1. - Denotiamo con R_x l'intervallo $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a$ $(a > 0)$, con R_y l'intervallo $y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + b$ $(b > 0)$, con J un insieme chiuso contenuto in R_y, con R il rettangolo $R_x \times R_y$ ed infine con R^* l'insieme $R_x \times J$.

Sia $f(x, y, z)$ una funzione quasi ovunque definita nell'insieme

$$S^*: \quad (x, y) \in R^* , \quad -\infty < z < +\infty$$

e sia tale da risultare, per ogni $y \in J$, misurabile rispetto ad x per ogni fissato valore di z e continua rispetto a z per quasi ogni $x \in R_x$.

Denotato con L_c l'intervallo $-c \leqslant x \leqslant c$ $(c > 0)$ e con D_c il rettangolo $R_x \times L_c$, diremo che $f(x, y, z)$ è *quasi continua rispetto a (x, z) in D_c, in modo semiregolare rispetto a z ed uniformemente al variare di $y \in J$* [6]), se, per ogni coppia di numeri

---

[5]) Per quasi ogni $y \in (\alpha, \beta)$ l'integrale superiore dell'equazione (II) esiste ed è definito in tutto l'intervallo $[x_0, x_0 + a]$ perchè sono verificate per $f(x, y, z)$ le ipotesi di CARATHEODORY. Cfr., a tal proposito, [1].

[6]) Osserviamo che se $f(x, y, z)$ è, per ogni $y \in J$, misurabile rispetto ad x e continua rispetto a z (per quasi ogni x), per un teorema di G.

positivi ε, ω, è possibile decomporre D_c in un numero finito di insiemi misurabili I_h nonchè associare ad ogni $y \in J$ un insieme $E^{(y)} \subset R_x$ in guisa che mis $E^{(y)} < \varepsilon$ e l'oscillazione di $f(x, y, z)$, qualunque sia $y \in J$, risulti minore di ω in ogni insieme $I_h - E^{(y)} \times L_c$. Facciamo, ora, le seguenti ipotesi:

α) Qualunque sia il numero reale $c > 0$, la funzione $f(x, y, z)$ sia quasi continua rispetto a (x, z) in D_c, in modo semiregolare rispetto a z ed uniformemente al variare di $y \in J$.

β) Sia, in S^*:

$$|f(x, y, z)| \leqslant M(x, y) \tag{1}$$

con $M(x, y)$ non negativa e sommabile (secondo Lebesgue) in R_x, per ogni $y \in J$.

γ) La funzione

$$K(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y)dt$$

sia assolutamente continua rispetto ad x in R_x, uniformemente al variare di $y \in J$: inoltre, sia

$$K(x, y) \leqslant K_0 \qquad \text{per} \quad (x, y) \in R^* \quad (K_0 = \text{cost}) . \tag{2}$$

δ) La funzione

$$F(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} f(t, y, z)dt$$

sia continua rispetto a (x, y) in R^*, per ogni z.

Scorza-Dragoni [6], essa risulta quasi continua in D_c, qualunque sia c, in modo semiregolare rispetto a z; cioè fissato un $y \in J$ e prefissato $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un insieme $E^{(y)} \subset R_x$ avente misura di ε e tale che $f(x, y, z)$ come funzione di (x, z) sia continua in $(R_x - E^{(y)}) \times L_c$. Il concetto da noi qui introdotto appare, quindi, come una ovvia estensione di quello di successione $\{g_n(x, z)\}$ di funzioni egualmente quasi continue in D_c in modo semiregolare rispetto a z, introdotto da G. Stampacchia [7] (pag. 204 e nota [17]) di pag. 213).

Riteniamo utile, ai fini della chiarezza della trattazione, premettere alcuni semplici lemmi.

I. - *Nelle ipotesi fatte, in* β) *e* γ), *sulla funzione* $M(x, y)$, *l'integrale*

$$\int_E M(t, y)dt$$

è una funzione assolutamente continua nella famiglia degli insiemi misurabili $E \subset R_x$, *uniformemente al variare di* $y \in J$.

La dimostrazione di questo lemma si effettua facilmente tenendo presente, oltre le ipotesi fatte, che ogni insieme misurabile di R_x può essere approssimato con insiemi aperti [7]) che lo contengono e che un insieme aperto di R_x può considerarsi come limite di una successione crescente di plurintervalli [8]).

Osserviamo che non si utilizza la (2) dell'ipotesi γ).

II. - *Se* $f(x, y, z)$, *quasi ovunque definita in* S^* *e misurabile rispetto ad* x *per ogni* $y \in J$ *e per ogni* z, *verifica, inoltre, le ipotesi* β), γ), δ), *allora, fissati comunque* z *ed un insieme misurabile* $E \subset R_x$, *la funzione*

$$\Psi(y) = \int_E f(t, y, z)dt$$

è continua in J.

---

[7]) Ci si riferisce, ora ed in seguito, ad insiemi aperti su intervalli (e nel caso di insiemi piani ci si riferirà ad insiemi aperti su rettangoli).

[8]) Per maggior chiarezza esponiamo qui, con qualche dettaglio, la dimostrazione. Per l'ipotesi γ), prefissato $\varepsilon > 0$, può determinarsi un $\delta > 0$ tale che, per ogni gruppo finito π di intervalli di R_x disgiunti la cui somma delle lunghezze sia minore di δ, si abbia $\int_\pi M(t, y)dt < \varepsilon$ per ogni $y \in J$. Pertanto, se A è un qualunque insieme aperto di R_x di misura minore di δ, poichè esso è limite di una successione crescente di plurintervalli di misura necessariamente minore di δ, si ha

$$\int_A M(t,y)dt < \varepsilon$$

per ogni $y \in J$. Da ciò, infine, consegue che, se $E \subset R_x$ è un insieme misurabile con misura minore di δ, poichè può sempre trovarsi un insieme aperto $A \subset R_x$, di misura minore di δ, che lo contiene, risulta $\int_E M(t, y)dt < \varepsilon$.

Dimostrazione. - A causa dell'ipotesi β) e del lemma I si ha, intanto, che, prefissato un numero $\varepsilon > 0$, può determinarsi un altro numero $\delta > 0$ tale che, qualunque sia l'insieme misurabile $I \subset R_x$ di misura minore di δ, si abbia:

$$(3) \qquad \int_I |f(t, y, z)| \, dt < \frac{\varepsilon}{8} \qquad \text{per ogni } z \text{ e per } y \in J .$$

D'altra parte, a causa dell'ipotesi δ), fissato z, può determinarsi un numero $\sigma > 0$ tale che, per

$$|y_1 - y_2| < \sigma , \qquad y_1, y_2 \in J$$

e qualunque siano $x', x'' \in R_x$, si abbia:

$$\left| \int_{x_0}^{x'} [f(t, y_1, z) - f(t, y_2, z)] dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

$$\left| \int_{x_0}^{x''} [f(t, y_1, z) - f(t, y_2, z)] dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e, quindi, per ogni intervallo $l \subset R_x$, anche:

$$\left| \int_l [f(t, y_1, z) - f(t, y_2, z)] dt \right| < \varepsilon .$$

Ciò premesso, se E è un insieme misurabile contenuto in R_x, può trovarsi un plurintervallo π di R_x tale che:

$$(4) \qquad \text{mis} (E - E \cdot \pi) < \delta , \qquad \text{mis} (\pi - E \cdot \pi) < \delta \text{ [9]} .$$

Se π consta di p intervalli, per quanto detto innanzi, fissato z,

[9]) Se A è un insieme aperto contenente E tale che mis $(A - E) < \delta$, π sarà un plurintervallo contenuto in A e tale che mis $(A - \pi) < \delta$.

può determinarsi un numero $\sigma = \sigma(\pi)$ tale che, per $|y_1 - y_2| < \sigma$ e per ogni intervallo $l \subset R_x$, sia:

$$\left| \int_l [f(t, y_1, z) - f(t, y_2, z)]dt \right| < \frac{\varepsilon}{2p} \tag{5}$$

Se $\pi = \sum_{k=1}^{p} l_k$ si ha, allora, da (3), (4), (5), per $y_1, y_2 \in J$, $|y_1 - y_2| < \sigma$:

$$\left| \int_E [f(t, y_1, z) - f(t, y_2, z)]dt \right| \leqslant \left| \int_{E - E\cdot\pi} [f(t, y_1, z) - f(t, y_2, z)]dt \right| +$$
$$+ \left| \int_{\pi - E\cdot\pi} [f(t, y_1, z) - f(t, y_2, z)]dt \right| +$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} \left| \int_{l_k} [f(t, y_1, z) - f(t, y_2, z)]dt \right| < \varepsilon \, .$$

Il lemma è così dimostrato.

Diamo, ora, un'altra definizione. Diremo che una funzione $f(x, y, z)$, quasi ovunque definita in S^*, è *quasi limitata nell'insieme*

$$U: \qquad x \in R_x \, , \qquad -\infty < z < +\infty$$

in modo semiregolare rispetto a z ed uniformemente al variare di $y \in J$ [10]) se, comunque si prefissi $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un numero $K > 0$ nonchè associare ad ogni $y \in J$ un insieme $E^{(y)} \subset R_x$ di guisa che mis $E^{(y)} < \varepsilon$ e $|f(x, y, z)| \leqslant K$ per $y \in J$, $x \in R_x - E^{(y)}$, $-\infty < z < +\infty$.

Sussiste, allora, il seguente lemma:

III. - *Se la funzione $f(x, y, z)$, quasi ovunque definita in S^* e misurabile rispetto ad x per ogni $y \in J$ e per ogni z, verifica, inoltre,*

---

[10]) Questo concetto generalizza quello di successione $\{g_n(x, z)\}$ di funzioni egualmente quasi limitate in un rettangolo, in modo semiregolare rispetto a z, introdotto da G. Stampacchia [7] (pag. 204, nota [12])).

le ipotesi β), γ), *essa risulta quasi limitata in* U *in modo semiregolare rispetto a* z *ed uniformemente al variare di* $y \in J$.

Dimostrazione. - In virtù dell'ipotesi β), basterà far vedere che, prefissato $\varepsilon > 0$, si può determinare un numero $K > 0$ nonchè associare ad ogni $y \in J$ un insieme $E^{(y)} \subset R_x$ di guisa che mis $E^{(y)} < \varepsilon$ e $M(x, y) \leqslant K$ per $y \in J$, $x \in R_x - E^{(y)}$.

Se ciò non fosse vero, esisterebbe un $\varepsilon > 0$ tale che, comunque si prenda un intero $n > 0$, potrebbe in corrispondenza essere trovato un $y_n \in J$ in modo che sia

$$\text{mis}\, R_x[M(x, y_n) > n] \geqslant \varepsilon\,.$$

Ma, allora, posto $I_n = R_x[M(x, y_n) > n]$, per l'ipotesi γ) si avrebbe:

$$K_0 \geqslant \int_{R_x} M(t, y_n)dt \geqslant \int_{I_n} M(t, y_n)dt > n \cdot \text{mis}\, I_n \geqslant n \cdot \varepsilon$$

per ogni intero $n > 0$, il che è assurdo.

2. - Consideriamo, ora, l'equazione in z:

$$z = \varphi(y) + \int_{x_0}^{x} f(t, y, z)dt \tag{6}$$

con $\varphi(y)$ funzione continua in J.

Se $f(x, y, z)$, per ogni $y \in J$, risulta continua rispetto a z per quasi ogni $x \in R_x$ e misurabile rispetto ad $x \in R_x$ per ogni z e verifica, inoltre, l'ipotesi β), allora esistono gli integrali superiore ed inferiore $G(x, y)$ e $g(x, y)$ dell'equazione (6) e sono definiti in tutto R_x [11]).

Intendiamo studiare la dipendenza di questi integrali dal parametro y nelle ipotesi fatte nel n. 1. Sussiste, a questo proposito il seguente teorema:

---

[11]) Cfr. [1].

IV. - *Nelle ipotesi* α), β), γ), δ), *l'integrale superiore* (*inferiore*) *dell'equazione* (6) *è semicontinuo superiormente* (*inferiormente*) *rispetto ad* $y \in J$ [12]).

Dimostrazione. - Neghiamo, per assurdo, la semicontinuità superiore di $G(x, y)$ rispetto ad y per il valore $\bar{y}$ di y. Esiste allora un $\varepsilon > 0$ in corrispondenza del quale può determinarsi una

---

[12]) Da questo teorema può dedursi facilmente quello di CAFIERO enunciato nell'introduzione. Denotato con Γ l'intervallo $\alpha < y < \beta$, sia $f(x, y, z)$ definita per $(x, y) \in R_x \times \Gamma$, $| z | < +\infty$, misurabile rispetto ad x per ogni (y, z) e continua rispetto a (y, z) per quasi ogni x; sia inoltre $| f(x, y, z) | \leqslant M(x, y)$ con $M(x, y)$ sommabile in R_x per ogni y e monotona rispetto ad y. Proviamo che in ogni intervallo $\Gamma' \equiv [\alpha', \beta']$ chiuso e contenuto in Γ sono verificate le ipotesi del teorema IV; da ciò conseguirà che l'integrale superiore (inferiore) dell'equazione (6) è semicontinuo superiormente (inferiormente) in ogni Γ' e quindi in Γ. L'ipotesi α) è verificata in quanto, per il citato teorema di SCORZA-DRAGONI [6] valido anche per funzioni con più di due variabili [8] (teor. 1. I, pag. 30), considerato il parallelepipedo $P = R_x \times \Gamma' \times L_c$ e prefissato un numero $\varepsilon > 0$, può determinarsi un insieme, che è lecito supporre aperto, $A_\varepsilon \subset R_x$ di guisa che mis $A_\varepsilon < \varepsilon$ e $f(x, y, z)$ risulti continua (uniformemente) nell'insieme chiuso $(R_x - A_\varepsilon) \times \Gamma' \times L_c$. Anche l'ipotesi β) è verificata. Inoltre, poichè $M(x, y)$ è monotona, per es. crescente, rispetto ad y, si ha, per ogni gruppo finito di intervalli di R_x non sovrapponentisi $[c_i, d_i]$:

$$\sum_i | K(d_i, y) - K(c_i, y) | = \sum_i \left| \int_{c_i}^{d_i} M(t, y) dt \right| \leqslant \sum_i \left| \int_{c_i}^{d_i} M(t, \beta') dt \right|$$

e, poichè $M(x, \beta')$ è sommabile in R_x, segue che è verificata l'ipotesi γ). Per dimostrare, infine, che è verificata l'ipotesi δ) osserviamo che essendo $f(x, y, z)$ continua rispetto alla coppia (y, z) ed inoltre $| f(x, y, z) | \leqslant \leqslant M(x, \beta')$, risulta che la funzione $F(x, y, z)$ è continua rispetto alla coppia (y, z); d'altra parte essa è continua rispetto ad x, uniformemente al variare di (y, z), dato che $| F(x', y, z) - F(x'', y, z) | \leqslant \left| \int_{x'}^{x''} M(t, \beta') dt \right|$.

Pertanto $F(x, y, z)$ è continua rispetto ad (x, y, z) e, quindi, rispetto ad (x, y) per ogni z.

In [21]) daremo un esempio di funzione verificante la ipotesi α), β), γ), δ) senza essere continua rispetto a (y, z).

successione $\{ y_n \}$ con $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \bar{y}$, in modo che si abbia:

$$G(x, y_n) \geqslant G(x, \bar{y}) + \varepsilon \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

in qualche punto di R_x.

Le funzioni della successione $\{ G(x, y_n) \}$ sono egualmente continue in R_x; infatti per l'ipotesi β)

$$| G(x', y_n) - G(x'', y_n) | \leqslant \left| \int_{x'}^{x''} M(t, y_n) dt \right|$$

donde consegue quanto asserito, in virtù dell'ipotesi γ).

Le suddette funzioni sono anche equilimitate in R_x; infatti, sempre a causa delle ipotesi β), γ), si ha:

$$| G(x, y_n) | \leqslant \max_{y \in J} | \varphi(y) | + K_0 . \tag{8}$$

Allora, per il teorema di ASCOLI - ARZELA, dalla successione $\{ G(x, y_n) \}$ se ne può estrarre un'altra, che per semplicità denoteremo con lo stesso simbolo usato per la successione originaria, uniformemente convergente in R_x verso una funzione continua $G_0(x)$. Se riusciamo a provare che $G_0(x)$ è un integrale della (6) relativo al valore $\bar{y}$ del parametro, cadremmo in un assurdo; infatti, per ogni $x \in R_x$ e per n maggiore di un certo indice ν, si ha:

$$| G(x, y_n) - G_0(x) | < \varepsilon$$

donde

$$G(x, y_n) < G_0(x) + \varepsilon \qquad \text{per} \quad n > \nu , \quad x \in R_x ;$$

ma

$$G_0(x) \leqslant G(x, \bar{y}) \qquad \text{per} \quad x \in R_x$$

e quindi

$$G(x, y_n) < G(x, \bar{y}) + \varepsilon \qquad \text{per} \quad n > \nu , \quad x \in R_x$$

in contrasto con la (7).

Proviamo quindi che $G_0(x)$ è un integrale dell'equazione (6) relativo al valore $\overline{y}$.

Poichè

$$G(x, y_n) = \varphi(y_n) + \int_{x_0}^{x} f[t, y_n, G(t, y_n)]dt =$$

$$= \varphi(y_n) + \int_{x_0}^{x} f[t, y_n, G_0(t)]dt +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} \{f[t, y_n, G(t, y_n)] - f[t, y_n, G_0(t)]\}dt$$

mentre, d'altra parte, dal lemma I e dalla disuguaglianza:

$$\left| \int_E \{f[t, y_n, G(t, y_n)] - f[t, y_n, G_0(t)]\}dt \right| \leqslant 2 \int_E M(t, y_n)dt$$

consegue l'equiassoluta continuità degli integrali a primo membro di essa nella famiglia degli insiemi misurabili $E \subset R_x$, è evidente che la dimostrazione del teorema sarà completa se si prova che è possibile estrarre dalla successione $\{y_n\}$ una successione $\{y_{n_k}\}$ tale che

$$\lim_{k \to \infty} \{ f[x, y_{n_k}, G(x, y_{n_k})] - f[x, y_{n_k}, G_0(x)]\} = 0 \tag{9}$$

quasi ovunque in R_x e che, inoltre:

$$\lim_{k \to \infty} \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n_k}, G_0(t)]dt = \int_{x_0}^{x} f[t, \overline{y}, G_0(t)]dt . \tag{10}$$

Proviamo la (9). Posto

$$c = \max_{y \in J} | \varphi(y) | + K_0 + 1 \tag{11}$$

a causa dell'ipotesi α) e del lemma III, la successione $\{f(x, y_n, z)\}$ è costituita da funzioni egualmente quasi-continue ed egualmente quasi limitate in modo semiregolare rispetto a z, nel rettangolo D_c.

Per un teorema di STAMPACCHIA [13]), è possibile estrarre dalla successione $\{f(x, y_n, z)\}$ una successione $\{f(x, y_{n_k}, z)\}$, quasi uniformemente convergente in D_c, in modo semiregolare rispetto a z; pertanto, prefissato $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un insieme aperto $A_1 \subset R_x$ in modo che

$$\text{mis } A_1 < \varepsilon/2$$

e la successione $\{f(x, y_{n_k}, z)\}$ converga uniformemente in $(I - A_1) \times L_c$.

D'altra parte, per un già ricordato teorema di SCORZA-DRAGONI [6] ogni $f(x, y_{n_k}, z)$ è quasi continua in D_c in modo semiregolare rispetto a z e, pertanto, per ogni intero $k > 0$ può trovarsi un insieme aperto $A'_k \subset R_x$ di guisa che

$$\text{mis } A'_k < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

e in $(R_x - A'_k) \times L_c$ la funzione $f(x, y_{n_k}, z)$ sia continua.

Posto

$$A_\varepsilon = A_1 + \sum_{k=1}^{\infty} A'_k$$

si ha mis $A_\varepsilon < \varepsilon$ e nell'insieme chiuso e limitato $(R_x - A_\varepsilon) \times L_c$ le funzioni $f(x, y_{n_k}, z)$ risultano contemporaneamente continue mentre la successione $\{f(x, y_{n_k}, z)\}$ è uniformemente convergente. Per l'inverso del teorema di ASCOLI - ARZELA le funzioni $f(x, y_{n_k}, z)$ sono, allora, anche equicontinue in $(R_x - A_\varepsilon) \times L_c$. Quindi, prefissato $\omega > 0$, può determinarsi $\delta > 0$ tale che, per $z, \bar{z} \in L_c$, $|z - \bar{z}| < \delta$, sia:

$$(12) \qquad |f(x, y_{n_k}, z) - f(x, y_{n_k}, \bar{z})| < \omega \quad \text{per ogni} \quad x \in R_x - A_\varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots$$

[13]) Cfr. [7], pag. 204.

D'altra parte, fissato $\delta > 0$, può determinarsi un indice ν tale che

$$(13) \qquad | G(x, y_{n_k}) - G_0(x) | < \delta \qquad \text{per} \quad k > \nu \, , \qquad x \in R_x$$

mentre da (8) e da (11) si ha:

$$(14) \qquad | G(x, y_{n_k}) | \, , \qquad | G_0(x) | < c \qquad \text{per} \quad x \in R_x \, , \quad k = 1, 2, \ldots$$

Quindi dalle (12), (13), (14) si deduce

$$| f[x, y_{n_k}, G_0(x)] - f[x, y_{n_k}, G(x, y_{n_k})] | < \omega$$
$$\text{per} \quad k > \nu \, , \qquad x \in R_x - A_\varepsilon$$

e da ciò consegue, in modo ovvio, la (9).

Proviamo, infine, la (10). Prefissiamo un numero $\omega > 0$. Per il lemma I può, in corrispondenza di ω, determinarsi un numero $\eta > 0$ tale che per ogni insieme misurabile $E \subset R_x$ con mis $E < \eta$ si abbia:

$$(15) \qquad \int_E M(t, y) dt < \frac{\omega}{4} \qquad \text{per ogni} \quad y \in J \, .$$

Determinato $\eta > 0$, possiamo in corrispondenza trovare, per quanto innanzi dimostrato, un insieme A_η ed un numero $\delta > 0$ di guisa che mis $A_\eta < \eta$ e, per $z, \bar{z} \in L_c$, $| z - \bar{z} | < \delta$ sia:

$$(16) \quad | f(x, y_{n_k}, z) - f(x, y_{n_k}, \bar{z}) | < \frac{\omega}{6a} \qquad \text{per} \qquad x \in R_x - A_\eta \, ,$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

D'altra parte, essendo $G_0(x)$ una funzione continua e limitata, può rappresentarsi come limite di una successione uniformemente convergente di funzioni semplici $g_p(x)$ [14]. Può, pertanto, trovarsi

[14]) Ogni funzione misurabile è limite di una successione di funzioni semplici, cioè assumenti solo un numero finito di valori, ciascuno su un insieme misurabile; la convergenza è uniforme se la funzione è limitata. Osserviamo che per ogni $x \in R_x$, si ha $| G_0(x) | < c$ e, quindi, per p abbastanza grande si ha anche $| g_p(x) | < c$ per ogni $x \in R_x$.

un indice p tale che

$$(17) \qquad | g_p(x) - G_0(x) | < \delta \qquad \text{per} \quad x \in R_x .$$

Determinato p, denotiamo con l l'intervallo $[x_0, x]$, con $E_1, E_2, \dots, E_h$ le intersezioni di $l - A_\eta$ con gli insiemi misurabili in cui $g_p(x)$ assume i suoi valori $g_1, g_2, \dots, g_h$.

Infine, per il lemma II, può trovarsi un indice ν tale che

$$(18) \qquad \left| \int_{E_i} \{f(t, y_{n_k}, g_i) - f(t, y, g_i)\} dt \right| < \frac{\omega}{6h} \qquad \text{per} \quad k > \nu ,$$

$$i = 1, \dots, h .$$

Si ha, allora, dalla (15), dalla (16), tenuto conto di (14), (17) e [14]), e dalla (18), per $k > \nu$:

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{x_0}^{x} \{f[t, y_{n_k}, G_0(t)] - f[t, \overline{y}, G_0(t)]\} dt \right| \leqslant \\
&\leqslant \left| \int_{l \cdot A_\eta} \{f[t, y_{n_k}, G_0(t)] - f[t, \overline{y}, G_0(t)]dt \right| + \\
&+ \left| \int_{l - A_\eta} \{f[t, y_{n_k}, G_0(t)] - f[t, \overline{y}, G_0(t)]\} dt \right| \leqslant \\
&\leqslant \frac{\omega}{2} + \sum_{i=1}^{h} \left| \int_{E_i} \{f(t, y_{n_k}, g_i) - f(t, \overline{y}, g_i)\} dt \right| + \\
&+ \sum_{i=1}^{h} \int_{E_i} | f[t, y_{n_k}, G_0(t)] - f(t, y_{n_k}, g_i) | \, dt + \\
&+ \sum_{i=1}^{h} \int_{E_i} | f(t, \overline{y}, g_i) - f[t, \overline{y}, G_0(t)] | \, dt \leqslant \\
&\leqslant \frac{\omega}{2} + h \frac{\omega}{6h} + \frac{\omega}{6a} \sum_{i=1}^{h} \operatorname{mis} E_i + \frac{\omega}{6a} \sum_{i=1}^{h} \operatorname{mis} E_i \leqslant \omega .
\end{aligned}$$

Con ciò è dimostrata la (10) e quindi il teorema.

OSSERVAZIONE 1ª. - Nelle stesse ipotesi del teorema IV e se, inoltre, per l'equazione (6) si ha l'unicità per ogni $y \in J$, la soluzione della (6) è continua rispetto al parametro y.

3. - In questa terza parte faremo le seguenti ipotesi:
A) $f(x, y, z)$ sia una funzione quasi ovunque definita nello strato

$$S: \quad (x, y) \in R \,, \qquad -\infty < z < +\infty$$

continua rispetto a z per quasi ogni $(x, y) \in R$ e misurabile in R per ogni z;

B) $$| f(x, y, z) | \leqslant M(x, y)$$

con $M(x, y)$ sommabile in R.

Con le stesse notazioni del n. 1, diremo che $f(x, y, z)$ è *quasi continua nel rettangolo* D_c *del piano* (x, z), *in modo semiregolare rispetto a* z *e quasi uniformemente al variare di* $y \in R_y$ se, prefissato un numero $\varepsilon > 0$, può determinarsi un insieme aperto $A_\varepsilon \subset R_y$ di guisa che mis $A_\varepsilon < \varepsilon$ e la funzione $f(x, y, z)$ sia quasi continua rispetto a (x, z) in D_c in modo semiregolare rispetto a z ed uniformemente al variare di $y \in R_y - A_\varepsilon$.

Sussiste il seguente lemma.

V. - *Nella sola ipotesi* A), *comunque si fissi un numero* $c > 0$, $f(x, y, z)$ ***risulta quasi continua in*** D_c ***in modo semiregolare rispetto a*** z ***e quasi uniformemente al variare di*** $y \in R_y$ [15]).

Dimostrazione. - Prefissiamo un numero $\varepsilon > 0$. Per il citato teorema di SCORZA-DRAGONI [16]) può determinarsi, per ogni intero $k > 0$, un insieme aperto $H_\varepsilon^{(k)} \subset R$ in modo che:

$$\text{mis } H_\varepsilon^{(k)} < \left(\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)^2$$

---

[15]) Riteniamo non privo di interesse rilevare che, nel caso di una funzione $g(x, y)$ misurabile in R e quasi ovunque finita, questo lemma asserisce che $g(x, y)$ è quasi continua rispetto a ciascuna variabile quasi uniformemente al variare dell'altra, risultando ben chiaro cosa con ciò debba intendersi alla luce della definizione data sopra. Si precisa così un classico risultato.

[16]) Cfr. [6], [8] (teor. 1. I, pag. 30).

e $f(x, y, z)$ sia continua in $(R - H_\varepsilon^{(k)}) \times L_c$. Consideriamo, per ogni $y \in R_y$, l'insieme, eventualmente vuoto, $S_k(y)$ degli $x \in R_x$ tali che $(x, y) \in H_\varepsilon^{(k)}$. $S_k(y)$ è un insieme aperto e la funzione mis $S_k(y)$ riesce misurabile in R_y. Pertanto l'insieme:

$$J_\varepsilon^{(k)} = R_y \left[\text{mis}\, S_k(y) \geqslant \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} \right]$$

è misurabile: ovviamente non può essere mis $J_\varepsilon^{(k)} \geqslant \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ altrimenti si avrebbe:

$$\text{mis}\, H_\varepsilon^{(k)} = \int_{R_y} dy \int_{S_k(y)} dx = \int_{R_y} \text{mis}\, S_k(y) dy \geqslant \int_{J_\varepsilon^{(k)}} \text{mis}\, S_k(y) dy \geqslant \left(\frac{\varepsilon}{2^{k-1}} \right)^2 .$$

Pertanto

$$\text{mis}\, J_\varepsilon^{(k)} < \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} , \tag{19}$$

$$\text{mis}\, S_k(y) < \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} \qquad \text{per} \quad y \in R_y - J_\varepsilon^{(k)} . \tag{20}$$

Ovviamente a $J_\varepsilon^{(k)}$ possiamo sostituire un insieme aperto che lo contenga e per il quale sono ancora verificate (19) e (20); tale insieme aperto lo denoteremo ancora con $J_\varepsilon^{(k)}$.

Ciò premesso, osserviamo che è possibile prolungare la funzione continua $f(x, y, z)$ dall'insieme chiuso e limitato $(R - - H_\varepsilon^{(k)}) \times L_c$ a tutto il parallelepipedo $R \times L_c$ in una funzione continua $\bar{f}^{(k)}(x, y, z)$ [17].

Dividiamo, quindi, il rettangolo $R_x \times L_c$ in 4^n rettangoli equali $Q_{n,t}$ $(t = 1, 2, ..., 4^n)$ e poniamo, per ogni fissato $y \in R_y$:

$$\omega_{n,t}^{(k)}(y) = \text{oscillazione di } f(x, y, z) \quad \text{per} \quad (x, z) \in Q_{n,t} - S_k(y) \times L_c \text{ [18]} ,$$

$$\bar{\omega}_{n,t}^{(k)}(y) = \text{oscillazione di } \bar{f}^{(k)}(x, y, z) \quad \text{per} \quad (x, z) \in Q_{n,t} .$$

---

[17]) Ciò si può fare con uno dei ben noti procedimenti classici; cfr., per esempio, C. Caratheodory, Vorlesungen uber reele Funktionen (Berlin, Teubner 1927), 617-620.

[18]) Poniamo $\omega_{n,t}^{(k)}(y) = 0$ per quegli y per cui $S_k(y) = [x_0, x_0 + a]$.

Osserviamo che $\omega_{n,t}^{(k)}(y)$ è sempre finita perchè $f(x, y, z)$, per y fissato, è funzione continua nell'insieme chiuso e limitato $Q_{n,t} - S_k(y) \times L_c$.

Altrettanto dicasi per $\overline{\omega}_{n,t}^{(k)}(y)$. Poichè

$$f(x, y, z) = \overline{f}^{(k)}(x, y, z) \quad \text{per} \quad y \in R_y \,, \quad (x, z) \in Q_{n,t} - S_k(y) \times L_c \,,$$

si ha, ovviamente:

$$\omega_{n,t}^{(k)}(y) \leqslant \overline{\omega}_{n,t}^{(k)}(y) \qquad \text{per} \quad y \in R_y \,.$$

Poniamo, poi

$$\Omega_n^{(k)}(y) = \max[\omega_{n,t}^{(k)}(y) \,, \quad t = 1, 2, \dots, 4^n] \,,$$
$$\overline{\Omega}_n^{(k)}(y) = \max[\overline{\omega}_{n,t}^{(k)}(y) \,, \quad t = 1, 2, \dots, 4^n] \,.$$

Si ha, anche:

$$\Omega_n^{(k)}(y) \leqslant \overline{\Omega}_n^{(k)}(y) \qquad \text{per} \quad y \in R_y \,. \tag{21}$$

Per un teorema di L. CESARI [19]), la funzione $\overline{\Omega}_n^{(k)}(y)$ riesce misurabile in R_y; d'altra parte, per la continuità (uniforme) di $\overline{f}^{(k)}(x, y, z)$ in $R_x \times L_c$, si ha per ogni fissato $y \in R_y$:

$$\lim_{n \to \infty} \overline{\Omega}_n^{(k)}(y) = 0 \,. \tag{22}$$

Per il teorema di SEVERINI - EGOROFF, può quindi trovarsi un insieme aperto $\overline{J}_\varepsilon^{(k)} \subset R_y$ di guisa che

$$\text{mis}\, \overline{J}_\varepsilon^{(k)} < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

e in $R_y - \overline{J}_\varepsilon^{(k)}$ la (22) valga uniformemente. A causa della (21) si ha, anche:

$$\lim_{n \to \infty} \Omega_n^{(k)}(y) = 0 \quad \text{uniformemente in} \quad R_y - \overline{J}_\varepsilon^{(k)} \,. \tag{23}$$

---

[19]) Cfr. [4], nota [13]).

Posto

$$A_\varepsilon^{(k)} = \overline{J}_\varepsilon^{(k)} + J_\varepsilon^{(k)} \, ,$$

si ha:

$$\text{mis}\, A_\varepsilon^{(k)} < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

e, a causa di (20),

$$\text{(24)} \qquad \text{mis}\, S_k(y) < \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} \qquad \text{per} \qquad y \in R_y - A_\varepsilon^{(k)}$$

mentre in $R_y - A_\varepsilon^{(k)}$ la (23) vale ancora uniformemente.

Posto

$$A_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} A_\varepsilon^{(k)}$$

si ha:

$$\text{mis}\, A_\varepsilon < \varepsilon$$

A_ε risultando, inoltre, aperto; in $R_y - A_\varepsilon$ la (23) vale uniformemente, comunque si fissi k; in $R_y - A_\varepsilon$ sussiste la (24), comunque si fissi k.

Tenendo presente tutto ciò siamo in grado di provare che $f(x, y, z)$ è quasi continua in D_x in modo semiregolare rispetto a z, uniformemente al variare di $y \in R_y - A_\varepsilon$, completando così la dimostrazione del lemma.

Prefissiamo, a tal fine, due altri numeri $\sigma > 0$, $\eta > 0$; determiniamo poi k in modo che

$$\frac{\varepsilon}{2^{k-1}} < \sigma \, ;$$

quindi determiniamo un indice ν tale che

$$\Omega_n^{(k)}(y) < \eta \qquad \text{per} \quad n > \nu \, , \qquad y \in R_y - A_\varepsilon \, .$$

Fissato un intero $n > \nu$, si ha, infine:

$$| f(x', y, z') - f(x'', y, z'') | \leqslant \Omega_n^{(k)}(y) < \eta \qquad \text{per} \quad y \in R_y - A_\varepsilon$$

ove
$$(x', z')\ ,\quad (x'', z'') \in Q_{n,t} - S_k(y) \times L_c \qquad (t = 1, 2, \dots, 4^n)$$
risultando, d'altra parte
$$\text{mis } S_k(y) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \sigma\ .$$

Poichè le precedenti conclusioni sussistono anche quando i rettangoli $Q_{n,t}$ vengono sostituiti dai corrispondenti rettangoli $Q^*_{n,t}$ semiaperti superiormente su D_c, e poichè i $Q^*_{n,t}$ sono disgiunti, resta provato quanto sopra asserito.

Osservazione 2ª. - Non vi è nessuna modifica da apportare alla dimostrazione per estendere il lemma V al caso di funzioni $f(x, y, w_1, \dots, w_n)$ definite per $(x, y) \in R$, $|w_1|, \dots, |w_n| < +\infty$, misurabili in R per ogni $(w_1, \dots, w_n)$ e continue rispetto a $(w_1, \dots, w_n)$ per quasi ogni $(x, y) \in R$.

Dimostriamo, ora, un altro lemma.

VI. - *Nelle ipotesi* A), B), *prefissato* $\varepsilon > 0$, *può determinarsi un insieme aperto* $A_\varepsilon \subset R_y$ *tale che* mis $A_\varepsilon < \varepsilon$ *e al variare di* $y \in R_y - A_\varepsilon$ *siano verificate per* $f(x, y, z)$ *le ipotesi* α), β), γ), δ) del n. 1 [20]).

---

[20]) Questo lemma ci permette di dare l'esempio di cui s'è fatto cenno alla fine di [12]). Consideriamo la funzione
$$f(x, y, z) = \frac{\text{sen } z}{\sqrt[3]{(x - y)^2}}$$
quasi ovunque definita in S: $(x, y) \in R \equiv [0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1]$, $|z| < +\infty$. Tutti i punti per cui $x = y$ sono singolari per la funzione. A norma del lemma VI, può trovarsi nell'intervallo $[0, 1]$ un insieme chiuso J, di misura prossima quanto vogliamo ad 1, tale che al variare di $y \in J$ siano verificate le ipotesi α), β), γ), δ). Ovviamente, però,
$$f(x, y, z)$$
non risulta continua rispetto ad (y, z), per $y \in J$ e $|z| < +\infty$, quando si fissi x in modo arbitrario. Se consideriamo l'equazione
$z = \int_0^x f(t, y, z)dt + \frac{\pi}{2}$ ove $f(x, y, z)$ è la funzione innanzi definita, poichè vi è unicità per ogni y, l'osservazione 1ª ci permette di affermare che la soluzione $z(x, y)$ è continua rispetto ad y in J. In questo caso, peraltro,

essa risulta continua in tutto l'intervallo $0 \leqslant y < 1$ in quanto si ha:

$$z(x, y) = 2 \operatorname{arctg} exp[3(\sqrt[3]{(x-y)} + \sqrt[3]{y})] .$$

Dimostrazione. - In virtù del lemma V, qualunque sia l'intero $n > 0$, posto $L_n = [-n, n]$ si può determinare un insieme aperto $A'_n \subset R_y$ in modo che mis $A'_n < \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$ e $f(x, y, z)$ sia quasi continua in $R_x \times L_n$, in modo semiregolare rispetto a z ed uniformemente al variare di $y \in R_y - A'_n$. Posto

$$A' = \sum_{n=1}^{\infty} A'_n$$

si ha

$$\text{mis } A' < \frac{\varepsilon}{2}$$

e $f(x, y, z)$, comunque si prenda il numero $c > 0$, risulta quasi continua in D_c in modo semiregolare rispetto a z ed uniformemente al variare di $y \in R_y - A'$.

D'altra parte, poichè $M(x, y)$ è sommabile in R, la funzione

$$K(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y) dt$$

è assolutamente continua rispetto ad $x \in R_x$ per quasi ogni $y \in R_y$ e misurabile rispetto a $y \in R_y$ per ogni $x \in R_x$.

Allora, per un teorema di CAFIERO [21]) $K(x, y)$ è una funzione quasi uniformemente assolutamente continua rispetto ad x; cioè, prefissato un numero $\varepsilon > 0$, può determinarsi un insieme aperto $A^* \subset R_y$ di guisa che

$$\text{mis } A^* < \frac{\varepsilon}{4}$$

e $K(x, y)$ risulti assolutamente continua rispetto ad x uniformemente al variare di y in $R_y - A^*$. A causa del teorema di SCORZA-

[21]) Cfr. [3], pag. 231.

DRAGONI [6] possiamo scegliere A^* in modo che $K(x, y)$ risulti continua e quindi limitata in $R_x \times (R_y - A^*)$ [22].

Infine, consideriamo la funzione

$$F(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} f(t, y, z) dt .$$

Ovviamente, tenendo presente l'ipotesi B), $F(x, y, z)$ risulta continua rispetto ad x, per quasi ogni y, uniformemente al variare di z; d'altra parte, sempre per B) essa è continua rispetto a z e quindi è continua rispetto alla coppia (x, z) per quasi ogni $y \in R_y$. Inoltre, per ogni (x, z), ancora per B), $F(x, y, z)$ è misurabile rispetto ad y. Allora, per il già citato teorema di SCORZA-DRAGONI per funzioni con più di due variabili [23]), per ogni intero $n > 0$, posto $L_n = [-n, n]$, è possibile determinare un insieme aperto $A''_n \subset R_y$ in modo che

$$\text{mis } A''_n < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$$

e $F(x, y, z)$ sia continua in $R_x \times (R_y - A''_n) \times L_n$.

Posto

$$A'' = \sum_{n=1}^{\infty} A''_n$$

si ha

$$\text{mis } A'' < \frac{\varepsilon}{4}$$

[22]) Consegue di qui e dal lemma III che prefissato $\varepsilon > 0$ può determinarsi un insieme $A_\varepsilon \subset R_y$ di guisa che mis $A_\varepsilon < \varepsilon$ e $f(x, y, z)$ sia quasi limitata in U: $x \in R_x$, $|z| < +\infty$, in modo semiregolare rispetto a z ed uniformemente al variare di $y \in R_y - A_\varepsilon$. Può esprimersi ciò dicendo, con terminologia analoga ad altra già usata in questo lavoro, che se $f(x, y, z)$ verifica le ipotesi A), B) essa è *quasi limitata in U, in modo semiregolare rispetto a z e quasi uniformemente al variare di $y \in R_y$.*

Analogo risultato sussiste evidentemente per funzioni

$$f(x, y, w_1, \dots, w_n)$$

soddisfacenti alle ipotesi dell'osservazione 2ª nonchè maggiorate in valore assoluto da una funzione $M(x, y)$ sommabile in R.

[23]) Cfr. [16]).

e, comunque si fissi $c > 0$, $F(x, y, z)$ risulta continua in $R_x \times (R_y - A'') \times L_c$.

In conclusione, se poniamo

$$A_\varepsilon = A' + A^* + A''$$

A_ε risulta aperto, di misura minore di ε, e quando si fa variare y in $R_y - A_\varepsilon$, da quanto s'è detto si deduce che $f(x, y, z)$ verifica le ipotesi α), β), γ) e δ).

Ritorniamo a considerare l'equazione (6) con $f(x, y, z)$ verificante ora le ipotesi A), B) e con $\varphi(y)$ misurabile e quasi ovunque finita in R_y.

Per quasi ogni $y \in R_y$ esistono gli integrali superiore ed inferiore $G(x, y)$, $g(x, y)$ di (6) e sono definiti in tutto R_x [24]).

Siamo ora in grado di dimostrare facilmente il teorema seguente che rappresenta lo scopo principale di questo lavoro.

VII. - *Nelle ipotesi* A), B) *e con* $\varphi(y)$ *misurabile e quasi ovunque finita in* R_y, *gli integrali superiore ed inferiore della* (6) *sono funzioni misurabili di* y *in* R_y, *per ogni* $x \in R_x$.

Dimostrazione. - Prefissato $\varepsilon > 0$, a norma del lemma VI, possiamo determinare un insieme aperto $A'_\varepsilon \subset R_y$ in modo che mis $A'_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}$ e, quando $y \in R_y - A'_\varepsilon$, $f(x, y, z)$ verifichi le ipotesi α), β), γ), δ).

D'altra parte, per il teorema di LUSIN, possiamo determinare un'altro insieme aperto $A''_\varepsilon \subset R_y$ in modo che mis $A''_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}$ e $\varphi(y)$ sia continua in $R_y - A''_\varepsilon$.

Posto $A_\varepsilon = A'_\varepsilon + A''_\varepsilon$, essendo verificate, al variare di y in $J = R_y - A_\varepsilon$ le ipotesi del teorema IV, si conclude che $G(x, y)$, $g(x, y)$ sono funzioni semicontinue di y in $R_y - A_\varepsilon$.

Questo basta per ritenere dimostrato il teorema.

OSSERVAZIONE 3ª - Nelle ipotesi del teorema VII e se, inoltre, l'equazione (6) ammette una sola soluzione per quasi ogni y, tale soluzione è misurabile rispetto al parametro y.

---

24) Cfr. [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] Cafiero F.: *Sui teoremi di unicità relativi ad una equazione differenziale ordinaria del primo ordine*, Giornale Mat. di Battaglini, vol. 78 (1948), 10-41 (in particolare pagg. 13-19).

[2] Cafiero F.: *Sui problemi ai limiti relativi ad una equazione differenziale ordinaria del primo ordine e dipendente da un parametro*, Rend. Sem. Mat. Padova, vol. 18 (1949), 239-257.

[3] Cafiero F.: *Sulle funzioni misurabili rispetto ad una ed assolutamente continue rispetto ad un'altra variabile*, Ricerche di Mat., vol. I (1952), 227-240.

[4] Cesari L.: *Sul teorema di densità in senso forte*, Ann. Sc. Normale Sup. di Pisa, vol. VIII (1939), 301-307.

[5] Pini E.: *Sulla continuità degli integrali dell'equazione* $y' = f(x, y, \gamma)$ *rispetto ai valori iniziali*, Rend. Ist. Lombardo Sc. e Lett., s. II vol. 63 (1930), 531-534.

[6] Scorza-Dragoni G.: *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*, Rend. Sem. Mat. Padova, vol. XVII (1948), 102-106.

[7] Stampacchia G.: *Criteri di compattezza per gli insiemi di funzioni continue rispetto alle variabili separatamente*, Rend. Sem. Mat. Padova, vol. XIX (1950), 201-213.

[8] Stampacchia G.: *Sopra una classe di funzioni in n variabili*, Ricerche di Mat., vol. I (1952), 27-54.