

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

JACQUES LOUIS LIONS

**Sur l'approximation des solutions de certains  
problèmes aux limites**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 32 (1962), p. 3-54

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1962\\_\\_32\\_\\_3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1962__32__3_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR L'APPROXIMATION DES SOLUTIONS DE CERTAINS PROBLÈMES AUX LIMITES

*Memoria (\*) di JACQUES LOUIS LIONS (a Nancy)*

## INTRODUCTION

On donne dans ce travail quelques procédés d'approximation de certains problèmes aux limites, procédés dont on démontre la convergence.

Considérons d'abord les problèmes variationnels elliptiques (Chapitre I). L'idée de départ est la suivante: soit à résoudre l'équation

$$(*) \quad Au = f \quad \text{dans un ouvert } \Omega \text{ de } R^n,$$

avec les conditions aux limites

$$(*), \quad B_j u = 0, \quad j = 0, 1, \dots, J.$$

On associe à ce problème une *famille* de problèmes:

$$(**) \quad A_\varepsilon u_\varepsilon = f_\varepsilon \quad \text{dans un ouvert } \tilde{\Omega} \supset \Omega, \tilde{\Omega} \text{ fixe}$$

( $\varepsilon > 0$  destiné à tendre vers 0), avec les conditions aux limites de Dirichlet. Les coefficients de  $A_\varepsilon$  sont ceux de  $A$  dans  $\Omega$  et sont déterminés dans  $\tilde{\Omega} - \Omega$  en fonction de  $A$  et des  $B_j$  (il y a une infinité de choix possibles); ces coefficients sont *discontinus*

---

(\*) Pervenuta in redazione il 13 settembre 1961.

Indirizzo dell'A.: Institut Mathématique, Université, Nancy

dans  $\tilde{\Omega}$  (en fait tous nos résultats supposent les coefficients seulement *mesurables*); pour un choix convenable de  $A_*$ , on montre que la restriction de  $u_*$  à  $\Omega$  converge (dans un sens convenable) vers  $u$ . On a en quelque sorte, *fait passer les conditions aux limites dans les discontinuités des coefficients*. Ce procédé est complètement général; nous en donnons quatre exemples aux n. 1, 2, 3, 4 du Chap. I; on peut varier ces exemples à l'infini. Une fois ramenés au problème de Dirichlet (pour  $A_*$ , dans  $\tilde{\Omega}$ ; on prendra le plus souvent dans ce travail  $\tilde{\Omega} = R^n$ , mais cela n'est nullement indispensable) il suffit d'appliquer un procédé quelconque d'approximation de  $u_*$  — par exemple la méthode des différences finies. Nous détaillons cela aux n. 5 et 6 du Chap. I; il y a des difficultés supplémentaires lorsque les  $B$ , correspondent à un problème de dérivées obliques — nous y reviendrons.

On peut utiliser *simultanément* (lorsqu'il y a lieu) les méthodes présentes en certaines variables et d'autres méthodes en d'autres variables: transformation de Fourier, Hankel, etc., méthode de Galerkin, etc.

Le Chapitre II aborde, par des méthodes analogues, les problèmes aux limites pour les équations d'évolution (problèmes mixtes selon Hadamard). Nous considérons seulement ici les cas paraboliques linéaires; pour les équations du type Schrödinger ou contenant des dérivées du deuxième ordre en  $t$  (et notamment hyperboliques), il suffira d'appliquer simultanément les méthodes de Ladyzenskaya [1] [2] [3] [4] (cf. aussi Prouse [1] [2]) et celles du présent travail. Nous reviendrons ultérieurement sur certaines classes de problèmes non linéaires.

Si l'on a seulement en vue l'approximation par les différences finies de problèmes aux limites elliptiques variés, il y a d'autres méthodes: K. O. Friedrichs, H. B. Keller (communication personnelle), J. Céra (*Sur l'approximation des problèmes aux limites elliptiques* (I) (II), C. R. A. cad. Sc. Paris, 1962) et l'auteur (*Méthodes d'approximation numérique des problèmes aux limites de la Physique Mathématique*, Institut Blaise Pascal, Paris, 1961-62). Pour les problèmes paraboliques et hyperboliques cf. aussi ce dernier travail.

## TABLE DES MATIERES

### INTRODUCTION

#### CHAPITRE I. - PROBLEMES VARIATIONNELS ELLIPTIQUES

1. *Approximation par des problèmes de Dirichlet - Cas du 2ème ordre.*
- 2. *Autres conditions aux limites (I).* - 3. *Autres conditions aux limites (II).*
- 4. *Opérateurs d'ordre supérieur à 2.* - 5. *Approximation par les différences finies.* - 6. *Approximation par les différences finies. Cas des ordres supérieur à 2.*

#### CHAPITRE II. - PROBLEMES D'EVOLUTION

1. *Méthode discrète.* - 2. *Méthode semi-discrète.*

#### BIBLIOGRAPHIE

## CHAPITRE I

### PROBLEMES VARIATIONNELS ELLIPTIQUES

#### 1. Approximation par des problèmes de Dirichlet — Cas du 2ème ordre.

1.1. - Soit  $\Omega$  un ouvert de  $R^n$ , de frontière  $I$ . Pour fixer les idées, supposons que  $\Omega$  est borné, de frontière une variété une fois continûment différentiable de dimension  $n - 1$ ,  $\Omega$  étant d'un seul coté de  $I$ .

Soit  $\Gamma_1$  une portion de  $I$ ,  $\Gamma_2$  le reste de  $I$ .

On considère dans  $\Omega$  des fonctions  $a_{ij}$ ,  $a_0$  avec

$$(1.1) \quad a_{ij}, \quad a_0 \in L^\infty(\Omega); \quad i, j = 1, \dots, n$$

( $L^\infty(\Omega)$  = espace des fonctions mesurables et bornées sur  $\Omega$ ).

A ces fonctions est associé l'opérateur

$$(1.2) \quad A = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + a_0(x).$$

On supposera que, pour tout  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  ( $\zeta_i \in \mathcal{C}$ )

$$(1.3) \quad \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \zeta_j \bar{\zeta}_i \geq \alpha (|\zeta_1|^2 + \dots + |\zeta_n|^2),$$

$$\alpha > 0, \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

et que

$$(1.4) \quad \operatorname{Re} a_0(x) \geq \alpha_0 > 0, \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

On considère le problème aux limites mêlé (ce problème est

posé ci-après de façon plus précise): trouver  $u$  vérifiant

$$(1.5) \quad Au = f \quad \text{dans } \Omega, f \text{ fonction donnée dans } \Omega,$$

avec les conditions aux limites (mêlées):

$$(1.6) \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

et

$$(1.7) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2$$

où

$\cos(n, x_i)$  = ième cosinus directeur de la normale  $n$  à  $\Gamma$ , extérieure à  $\Omega$ .

Notre but, dans ce n<sup>o</sup>, est de montrer que la solution du problème précédent est la limite (dans un sens précisé ci-après) des solutions de certains problèmes *du type Dirichlet*.

1.2. Posons maintenant le problème (1.5), (1.6), (1.7) de façon plus précise.

On désigne comme d'ordinaire par  $L^2(\Omega)$  l'espace des (classes de) fonctions  $f$  de carré sommable sur  $\Omega$ ; pour  $f, g \in L^2(\Omega)$ , on pose

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \|f\|_{L^2(\Omega)} = (f, f)_{L^2(\Omega)}^{1/2}.$$

On désigne par  $H^1(\Omega)$  l'espace des (classes de) fonctions  $u \in L^2(\Omega)$  telles que les *dérivées distributions*  $\partial u / \partial x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  soient dans  $L^2(\Omega)$  (cf. Schwartz [1], Sobolev [1]). Muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2},$$

c'est un espace de Hilbert (voir un résumé des principales propriétés de ces espaces par ex. dans Lions [1]).

On désigne maintenant par  $V$  le sous espace vectoriel fermé de  $H^1(\Omega)$  des fonctions  $u \in H^1(\Omega)$  telles que  $u = 0$  sur  $\Gamma_1$  (Ceci a un sens: cf. par ex. Lions [1]).

Pour  $u, v \in H^1(\Omega)$ , on pose

$$(1.8) \quad a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) D_j u \overline{D_i v} dx + \int_{\Omega} a_0 u \bar{v} dx, \quad D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Il résulte aussitôt de (1.3) et (1.4) que

$$(1.9) \quad \operatorname{Re} a(v, v) \geq \inf(\alpha, \alpha_0) \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega).$$

Comme la forme sesquilineaire  $u, v \rightarrow a(u, v)$  est évidemment continue sur  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  (donc sur  $V \times V$ ), on a (cf. Lions [1], [2]):

$$(1.10) \quad \begin{cases} \text{pour } f \text{ donnée dans } L^2(\Omega) \text{ il existe une fonction } u \in V \\ \text{et une seule, satisfaisant à} \\ a(u, v) = \int_{\Omega} f \bar{v} dx \quad \text{pour tout } v \in V. \end{cases}$$

La solution  $u$  de (1.10) vérifie (1.5) ( $Au$  étant calculé au sens des distributions dans  $\Omega$ ), (1.6) (puisque  $u \in V$ ); et on constate facilement, par des intégrations par parties *formelles* que la condition (1.7) a lieu, dans un sens généralisé (pour une interprétation précise de (1.7) on pourra consulter Lions-Magenes [1]).

C'est maintenant la solution  $u$  de (1.10) que nous allons approcher.

1.3. On introduit des ouverts  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ ;

$$\Omega_2 = C(\overline{\Omega} \cup \overline{\Omega}_1)$$

La frontière de  $\Omega_1$  comprend  $\Gamma_1$  et  $\Sigma$ ;  $\Sigma$  est choisi de façon quelconque dans  $C\bar{\Omega}$ , et, pour fixer les idées, une fois continûment différentiable par morceaux.

Soit  $\varepsilon > 0$  (destiné à tendre vers 0). On introduit les fonctions :

$$(1.11) \quad A_{ij}(x, \varepsilon) = \begin{cases} a_{ij}(x) & \text{dans } \Omega \text{ (p.p)} \\ \delta_{ij}^1 & \text{(symbole de Kronecker) dans } \Omega_1, \\ \varepsilon \delta_{ij}^2 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$$

et

$$(1.12) \quad A_0(x, \varepsilon) = \begin{cases} a_0(x) & \text{dans } \Omega \text{ (p.p)} \\ 1/\varepsilon & \text{dans } \Omega_1 \\ \varepsilon & \text{dans } \Omega_2. \end{cases}$$

On a ainsi des fonctions  $\in L^\infty(R^n)$ . Pour  $u, v \in H^1(R^n)$  on pose :

$$(1.13) \quad \mathcal{A}_\varepsilon(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{R^n} A_{ij}(x, \varepsilon) (D_i u) (D_j \bar{v}) dx + \int_{R^n} A_0(x, \varepsilon) u \bar{v} dx$$

On vérifie aussitôt que :

$$(1.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} \mathcal{A}_\varepsilon(v, v) \geq \alpha \int_{\Omega} \sum_i |D_i v|^2 dx \\ + \int_{\Omega_1} \sum_i |D_i v|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega_2} \sum_i |D_i v|^2 dx \\ + \alpha_0 \int_{\Omega} |v|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_1} |v|^2 dx + 2 \int_{\Omega_2} |v|^2 dx \end{array} \right.$$

Par conséquent,

$$(1.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour chaque } \varepsilon > 0, \text{ il existe une fonction } u_\varepsilon \in H^1(R^n) \\ \text{et une seule, satisfaisant à} \\ \mathcal{A}_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \int_{\Omega} f(x) \overline{v(x)} dx \quad \text{pour tout } v \in H^1(R^n) \end{array} \right.$$



On notera que  $u_\varepsilon$  n'est autre que la solution dans  $H^1(R^n)$  de

$$(1.16) \quad \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_{ij}(x, \varepsilon) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \right) + A_0(x, \varepsilon) u = \tilde{f}$$

où  $\tilde{f} = f$  dans  $\Omega$  et 0 ailleurs; donc  $u_\varepsilon$  est la solution d'un problème de Dirichlet (les conditions aux limites sont ici des conditions de croissance à l'infini — cf. aussi 1.5) relatif à l'opérateur (1.16), opérateur elliptique à coefficients (mesurables) discontinus.

On montre au point suivant que, dans un sens convenable,  $u_\varepsilon$  tend vers  $u$ .

#### 1.4. On va démontrer le

**THÉORÈME 1.1.:** Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la restriction  $(u_\varepsilon)_\Omega$  de  $u_\varepsilon$  à  $\Omega$ , converge dans  $H^1(\Omega)$  faible vers la solution  $u$  du problème (1.10).

**DÉMONSTRATION:** De la relation  $\operatorname{Re} \mathcal{A}_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \operatorname{Re} \int_\Omega f \bar{u}_\varepsilon \, dx \leq \leq |f|_{L^2(\Omega)} |u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}$  et de (1.14), on déduit:

$$(1.17) \quad u_\varepsilon \text{ est borné dans } H^1(\Omega^*), \quad \Omega^* = \Omega \cup \overset{\circ}{\Gamma}_1 \cup \Omega_1$$

$\overset{\circ}{\Gamma}_1$  désignant l'intérieur de  $\Gamma_1$ ,

$$(1.18) \quad \sqrt{\varepsilon} u_\varepsilon \text{ est borné dans } H^1(\Omega_2),$$

$$(1.19) \quad \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} u_\varepsilon \text{ est borné dans } L^2(\Omega_1).$$

De toute suite  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , on peut donc extraire une suite  $\varepsilon'$  telle que

$$(1.17)' \quad u_{\varepsilon'} \rightarrow \omega \quad \text{dans } H^1(\Omega^*) \text{ faible,}$$

$$(1.18)' \quad \sqrt{\varepsilon'} u_{\varepsilon'} \rightarrow \varphi \quad \text{dans } H^1(\Omega_2) \text{ faible,}$$

$$(1.19)' \quad \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'}} u_{\varepsilon'} \rightarrow \psi \quad \text{dans } L^2(\Omega_1) \text{ faible.}$$

De (1.19)' résulte que  $u_{\varepsilon'} \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega_1)$  faible, ce qui, en

comparant à (1.17)' entraîne

$$(1.20) \quad \omega = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_1 .$$

Prenons alors  $v$  dans  $H^1(R^n)$ , nulle dans  $\Omega_1$ . L'équation (1.15) s'écrit:

$$(1.21) \quad a((u_{\varepsilon'})_{\Omega}, v_{\Omega}) = \varepsilon' \int_{\Omega_1} (\sum_i D_i u_{\varepsilon'} D_i \bar{v} + u_{\varepsilon'} \bar{v}) dx = \int_{\Omega} f \bar{v} dx$$

$$\text{D'après (1.18)', } \left| \varepsilon' \int_{\Omega_1} (\sum_i D_i u_{\varepsilon'} \bar{D}_i \bar{v} + u_{\varepsilon'} \bar{v}) dx \right| = O(\varepsilon'^{1/2}) \quad \text{de}$$

sorte que, utilisant (1.17)', on obtient à la limite de (1.21):

$$(1.22) \quad a(\omega_{\Omega}, v_{\Omega}) = \int_{\Omega} f \bar{v} dx .$$

EN RÉSUMÉ:  $\omega \in H^1(\Omega^*)$ , vérifie (1.20) et sa restriction  $\omega_{\Omega}$  à  $\Omega$  vérifie (1.22) pour tout  $v \in H^1(R^n)$ ,  $v = 0$  dans  $\Omega_1$ .

Du fait que  $\omega \in H^1(\Omega^*)$  et vérifie (1.20) résulte que  $\omega = 0$  sur  $\Gamma_1$ , donc

$$(1.23) \quad \omega_{\Omega} \in V, \quad V \text{ défini au point 1.2.}$$

Soit par ailleurs  $\chi$  une fonction de  $H^1(\Omega)$ , nulle dans un voisinage de  $\Gamma_1$ ; il existe alors une fonction  $v$  de  $H^1(R^n)$ , nulle dans  $\Omega_1$ , et telle que  $v = \chi$  sur  $\Omega$ . Donc (1.22) implique (1.24)

$$(1.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(\omega_{\Omega}, \chi) = \int_{\Omega} f \bar{\chi} dx \quad \text{pour toute } \chi \in H^1(\Omega), \text{ nulle dans} \\ \text{un voisinage (arbitraire) de } \Gamma_1 . \end{array} \right.$$

Comme la classe des fonctions  $\chi$  est dense dans  $V$ , on a donc, par passage à la limite dans (1.24):

$$(1.25) \quad a(\omega_{\Omega}, v) = \int_{\Omega} f \bar{v} dx \quad \text{pour tout } v \in V .$$

Mais par comparaison avec (1.10), on voit que  $\omega_\Omega = u$  et donc  $(u_{\sigma'})_\Omega \rightarrow u$  dans  $H^1(\Omega)$  faible.

Mais  $u$  étant unique, le théorème en résulte.

1.5. On a pris, au point 1.3,  $\Omega_2 = C(\bar{\Omega} \cup \bar{\Omega}_1)$ . On peut également prendre  $\Omega_2$  borné, de frontière extérieure  $\Sigma'$ . Si l'on désigne par  $u_2$  la solution de (1.16) dans  $\Omega_2$ , avec la condition

$$(1.26) \quad u_2 = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma',$$

on a un résultat analogue à celui du Théorème 1.1 (démonstration analogue), et  $u_2$  est cette fois solution d'un problème de Dirichlet au sens usuel, toujours à coefficients discontinus.

## 2. Autres conditions aux limites (I).

2.1. Soit  $\Omega$  comme au n° 1, et  $A$  un opérateur donné dans  $\Omega$  avec (1.2), (1.3) et (1.4).

On donne sur  $\Gamma$  une fonction  $q$  une fois continûment différentiable et  $\geq 0$ .

On veut cette fois approcher la solution  $u$  du problème suivant:

$$(2.1) \quad Au = f, \quad f \text{ donnée dans } L^2(\Omega),$$

avec la condition aux limites

$$(2.2) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_A} = qu \quad \text{sur} \quad \Gamma.$$

Posons ce problème de façon précise. On introduit  $a(u, v)$  par (1.8); on considère ensuite la forme sesquilinéaire continue sur  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ :

$$a(u, v) + \int_{\Gamma} qu \bar{v} \, d\sigma$$

$d\sigma$  désignant l'élément de surface de  $\Gamma$ .

Alors (cf. Lions [1], [2]):

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe une fonction } u \text{ et une seule dans } H^1(\Omega) \text{ telle que} \\ a(u, v) + \int_{\Gamma} qu \bar{v} d\sigma = \int_{\Omega} f \bar{v} dx \text{ pour tout } v \in H^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Le lecteur se convaincra aisément que la solution  $u$  de (2.3) vérifie (2.1) au sens des distributions et (2.2) formellement.

C'est maintenant la solution  $u$  de (2.3) que nous allons approcher. On désigne par  $\theta_\varepsilon$  l'ensemble des  $x \in \Omega$  à distance  $< \varepsilon$  de  $\Gamma$  ( $\varepsilon$  assez petit).

On désigne par  $Q$  une fonction  $\geq 0$ , une fois continûment différentiable dans  $R^n$ , bornée, et telle que

$$(2.4) \quad Q = q \quad \text{sur } \Gamma.$$

On introduit  $A_{ij}(x, \varepsilon)$ ,  $A_0(x, \varepsilon)$  par

$$(2.5) \quad A_{ij}(x, \varepsilon) = \begin{cases} a_{ij}(x) & \text{dans } \Omega \text{ (p.p)} \\ \varepsilon \delta_{ij} & \text{dans } \Omega_1 = C \bar{\Omega} \end{cases}$$

$$(2.6) \quad A_0(x, \varepsilon) = \begin{cases} a_0(x) & \text{dans } \Omega \text{ (p.p)} \\ \varepsilon & \text{dans } \Omega_1. \end{cases}$$

Pour  $u, v$  dans  $H^1(R^n)$ , on pose

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_\varepsilon(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{R^n} A_{ij}(x, \varepsilon) (D_i u) (\overline{D_j v}) dx \\ \quad + \int_{R^n} A_0(x, \varepsilon) u \bar{v} dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\theta_\varepsilon} Qu \bar{v} dx. \end{array} \right.$$

Comme la fonction  $Q$  est  $\geq 0$ , on a:

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} \mathcal{A}_\varepsilon(u, v) \geq \alpha \int_{\Omega} |D_i v|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega_1} |D_i v|^2 dx \\ \quad + \alpha_0 \int_{\Omega} |v|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega_1} |v|^2 dx. \end{array} \right.$$

Par conséquent

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour chaque } \varepsilon > 0, \text{ il existe une fonction } u_\varepsilon \in H^1(R^n) \\ \text{et une seule satisfaisant à} \\ \mathcal{A}_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \int_{\Omega} f(x) \overline{v(x)} \, dx \quad \text{pour tout } v \in H^1(R^n) \end{array} \right.$$

On va maintenant démontrer le

**THÉORÈME 2.1.:** *Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la restriction  $(u_\varepsilon)_\Omega$  de  $u_\varepsilon$  à  $\Omega$  converge dans  $H^1(\Omega)$  faible vers la solution  $u$  du problème (2.9).*

**DÉMONSTRATION**

On constate, comme dans la démonstration du Théorème 1.1., que

$$(2.10) \quad u_\varepsilon \quad \text{est borné dans } H^1(\Omega)$$

$$(2.11) \quad \sqrt{\varepsilon} u_\varepsilon \quad \text{est borné dans } H^1(\Omega_1) ;$$

de toute suite  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  on peut donc extraire une suite  $\varepsilon'$  telle que

$$(2.10)' \quad u_{\varepsilon'} \rightarrow w \quad \text{dans } H^1(\Omega) \text{ faible,}$$

$$(2.11)' \quad \sqrt{\varepsilon'} u_{\varepsilon'} \rightarrow \varphi \quad \text{dans } H^1(\Omega_1) \text{ faible.}$$

Soit  $v$  une fonction une fois continûment différentiable dans  $R^n$  et à support compact. Admettons un instant le

$$\text{LEMME 2.1.: } \frac{1}{\varepsilon'} \int_{\Omega_{\varepsilon'}} \varphi u_{\varepsilon'} \overline{v} \, dx \rightarrow \int_{\Gamma} q w \overline{v} \, d\sigma$$

Comme

$$\varepsilon' \int_{\Omega_1} (\sum_i (D_i u_{\varepsilon'}) (D_i \overline{v}) + u_{\varepsilon'} \overline{v}) \, dx \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \varepsilon' \rightarrow 0$$

on obtient

$$(2.12) \quad a(w, v) + \int_{\Gamma} q w \overline{v} \, dx = \int_{\Omega} f \overline{v} \, dx$$

et ceci pour toute fonction  $v$  une fois continûment différentiable dans  $\overline{\Omega}$  (puisque l'on peut alors prolonger  $v$  à l'espace entier en une fonction une fois continûment différentiable et à support compact). Comme ces fonctions sont denses dans  $H^1(\Omega)$ , on en déduit que (2.12) a lieu pour tout  $v \in H^1(\Omega)$  donc  $w = u$  et ceci démontre le Théorème, sous réserve de la

#### DÉMONSTRATION DU LEMME 2.1.

A l'aide d'une partition de l'unité et d'une carte locale, tout revient à démontrer ceci:

On considère dans  $R^n$  l'ouvert  $R_+^n = \{x \mid x_n > 0\}$ , de frontière  $\Sigma = \{x \mid x_n = 0\}$ ; on considère une suite  $u_j$  de  $H^1(R_+^n)$  telle que  $u_j \rightarrow u$  dans  $H^1(R_+^n)$  faible lorsque  $j \rightarrow \infty$ ; on considère une fonction  $\Phi$  une fois continûment différentiable à support compact dans  $R_+^n$ ; montrer que ( $\sigma_\varepsilon$  désignant l'ouvert  $0 < x_n < \varepsilon$  de  $R_+^n$ ):

$$(2.13) \quad \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\sigma_\varepsilon} u_j(x) \Phi(x) dx \rightarrow \int_{\Sigma} u(x', 0) \Phi(x', 0) dx' \\ \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0, j \rightarrow \infty \quad (x' = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}). \end{cases}$$

Evaluons la différence

$$X_{\varepsilon, j} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\sigma_\varepsilon} u_j(x) \Phi(x) dx - \int_{\Sigma} u(x', 0) \Phi(x', 0) dx'.$$

Alors  $X_{\varepsilon, j} = I + J + K$

$$I = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\sigma_\varepsilon} u_j(x) (\Phi(x) - \Phi(x', 0)) dx' dx_n$$

$$J = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\sigma_\varepsilon} (u_j(x) - u_j(x', 0)) \Phi(x', 0) dx' dx_n$$

$$K = \int_{\Sigma} (u_j(x', 0) - u(x', 0)) \Phi(x', 0) dx'$$

Comme  $|\Phi(x) - \Phi(x', 0)| \leq c_1 x_n$  et comme  $\Phi$  est à support compact, on a :

$$I \leq c_2 \left( \int_{\sigma_\varepsilon \cap k} |u_j(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \text{mes}(\sigma_\varepsilon \cap k), \quad k \text{ compact de } \overline{R_+^n}.$$

Donc  $I \rightarrow 0$ .

Comme  $u_j(x', 0) \rightarrow u(x, 0)$  dans  $L^2(\Sigma)$  faible,  $K \rightarrow 0$ .

Posant  $J = J(\varepsilon, j)$ , on va vérifier que

$$(2.14) \quad \begin{cases} \text{de toutes suites } \varepsilon_n \rightarrow 0, j_n \rightarrow \infty, \text{ on peut extraire } \varepsilon'_n, j'_n \\ \text{telles que } J(\varepsilon'_n, j'_n) \rightarrow 0. \end{cases}$$

Alors, de toutes suites  $\varepsilon_n, j_n$  on pourra extraire  $\varepsilon'_n, j'_n$  avec

$$\frac{1}{\varepsilon'_n} \int_{\sigma_{\varepsilon'_n}} u_{j'_n}(x) \Phi(x) dx \rightarrow \int_{\Sigma} u(x', 0) \Phi(x', 0) dx'$$

et par conséquent  $X_{\varepsilon, j} \rightarrow 0$ .

Reste donc à vérifier (2.14). On peut écrire

$$(2.15) \quad \begin{aligned} J(\varepsilon, j) &= \int_{\sigma_\varepsilon} U_{\varepsilon, j}(x) \Phi(x', 0) dx, \quad \varepsilon < 1, \\ U_{\varepsilon, j} &= \frac{1}{\varepsilon} [u_j(x) - u_j(x', 0)] \chi_\varepsilon, \quad \chi_\varepsilon \text{ fonction caractéristique de } \sigma_\varepsilon. \end{aligned}$$

Or

$$U_{\varepsilon, j}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \chi_\varepsilon \int_0^{x_n} \frac{\partial u_j}{\partial x_n}(x', y) dy = \frac{x_n \chi_\varepsilon}{\varepsilon} \left( \frac{1}{x_n} \int_0^{x_n} \frac{\partial u_j}{\partial x_n}(x', y) dy \right);$$

d'après une inégalité de Hardy (Cf. Hardy-Littlewood-Polya, [1])

$$\frac{1}{x_n} \int_0^{x_n} \frac{\partial u_j}{\partial x_n}(x', y) dy \text{ demeure dans un borné de } L^2(R_+^n), \text{ donc } U_{\varepsilon, j}$$

demeure dans un borné de  $L^2(\sigma_1)$ . On peut donc, de toutes suites  $\varepsilon_n, j_n$  extraire  $\varepsilon'_n, j'_n$  de façon que

$$(2.16) \quad U_{\varepsilon'_n, j'_n} \rightarrow U \quad \text{dans} \quad L^2(\sigma_1) \text{ faible}$$

et alors

$$J(\varepsilon'_n, j'_n) \rightarrow \int_{\sigma_1} U(x) \Phi(x', 0) dx .$$

On aura donc le résultat voulu si l'on vérifie que  $U = 0$ ; or, ceci est immédiat,  $U_{\varepsilon'_n, j'_n}$  ayant son support dans la bande  $0 < x_n < \varepsilon'_n$ .

Ceci achève la démonstration du Lemme et du Théorème.

2.3. En combinant les méthodes du n° 1 et du n° 2, on pourra développer de façon analogue, un procédé d'approximation par des « problèmes de Dirichlet » pour le problème

$$\begin{aligned} Au &= f , \\ u &= 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 , \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_A} &= qu \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 . \end{aligned}$$

2.4. De même, comme au point 1.5., n° 1, on peut se ramener à un problème de Dirichlet dans un ouvert borné, au lieu de l'espace entier.

### 3. Autres conditions aux limites (II).

3.1. On veut dans ce n° construire un procédé d'approximation pour une classe de *problèmes de transmission*. Puisque dans les N° précédents les coefficients étaient seulement *mesurables*, les problèmes de transmission entrent dans le cadre précédent. On va développer dans ce N° un procédé un peu différent.

Soit  $\Omega_1$  un ouvert de  $R^n$ ,  $\Omega_2 = C \overline{\Omega_1}$ ,  $\Gamma$  la frontière commune supposée variété une fois continûment différentiable de dimension  $n - 1$ .

On donne  $a_{ij}^{(1)} \in L^\infty(\Omega_1)$ ,  $a_{ij}^{(2)} \in L^\infty(\Omega_2)$ ,  $a_0^{(1)} \in L^\infty(\Omega_1)$ ,  $a_0^{(2)} \in L^\infty(\Omega_2)$ , avec



$$(3.1) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} \sum a_{ij}^{(k)}(x) \xi_j \bar{\xi}_i \geq \alpha^{(k)} (|\xi_1|^2 + \dots + |\xi_n|^2) \text{ p.p. dans } \Omega_k, \\ k = 1, 2, \quad \alpha^{(k)} > 0 \end{cases}$$

et

$$(3.2) \quad \operatorname{Re} a_0^{(k)}(x) \geq \alpha_0^{(k)} > 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega_k, \quad k = 1, 2.$$

Soit  $u_1 \in H^1(\Omega_1)$ ,  $u_2 \in H^1(\Omega_2)$ ; on peut alors définir  $\gamma u_1$  et  $\gamma u_2$ , « traces » de  $u_1$  et  $u_2$  sur  $\Gamma$ ; les fonctions  $\gamma u_1$  et  $\gamma u_2$  sont en particulier dans  $L^2(\Gamma)$  (on peut préciser: cf. p. ex. Lions [1], chap. II). On désigne par  $V$  l'espace des couples  $\{u_1, u_2\}$  tels que

$$(3.3) \quad \begin{cases} q_1 \gamma u_1 + q_2 \gamma u_2 = 0 \\ q_1 \text{ et } q_2 \text{ fonctions une fois continûment différentiable sur } \Gamma. \end{cases}$$

Muni de la norme induite par  $H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ , i.e.

$$(\|u_1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \|u_2\|_{H^1(\Omega_2)}^2)^{1/2}$$

c'est un espace de Hilbert.

Posons

$$(3.4) \quad \begin{cases} a^{(k)}(u_k, v_k) = \sum_{i,j} \int_{\Omega_k} a_{ij}^{(k)}(x) D_j u_k \overline{D_i v_k} dx + \int_{\Omega_k} a_0^{(k)} u_k \overline{v_k} dx, \\ k = 1, 2; \quad u_k, v_k \in H^1(\Omega_k). \end{cases}$$

Grâce à (3.1) et (3.2) on a:

$$(3.5) \quad \begin{cases} \text{il existe un couple } \{u_1, u_2\} \text{ et un seul dans } V, \text{ vérifiant} \\ a^{(1)}(u_1, v_1) + a^{(2)}(u_2, v_2) = \int_{\Omega_1} f_1 \overline{v_1} dx + \int_{\Omega_2} f_2 \overline{v_2} dx \\ \text{pour tout } \{v_1, v_2\} \in V, \quad f_k \text{ donnée dans } L^2(\Omega_k). \\ (k = 1, 2) \end{cases}$$

Interprétons le problème aux limites ainsi résolu. D'abord, si

$$(3.6) \quad A^{(k)} = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}^{(k)}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + a_0^{(k)}(x),$$

alors

$$(3.7) \quad A^{(1)}u_1 = f_1 \text{ dans } \Omega_1, \quad A^{(2)}u_2 = f_2 \text{ dans } \Omega_2.$$

Puisque  $\{u_1, u_2\} \in V$ , on doit avoir (3.3) — et enfin, par des intégrations par parties, on trouve que

$$(3.8) \quad q_2 \frac{\partial u_1}{\partial \nu_{A^{(1)}}} - q_1 \frac{\partial u_2}{\partial \nu_{A^{(2)}}} = 0,$$

où

$$(3.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \nu_{A^{(k)}}} = \sum a_{ij} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \cos(n^{(k)}, x_i) \\ n^{(k)} \text{ normale à } \Gamma \text{ extérieure à } \Omega_k. \end{cases}$$

Il s'agit donc d'un *problème de transmission*. Nous allons approcher la solution de ce problème par des solutions de problèmes de Dirichlet, cette fois pour un *système*.

### 3.2. On introduit

$$(3.10) \quad \begin{cases} A_{ij}^{(1)}(x, \varepsilon) = \begin{cases} a_{ij}^{(1)}(x) & \text{dans } \Omega_1, \text{ p.p} \\ \varepsilon & \text{dans } \Omega_2 \end{cases} \\ A_0^{(1)}(x, \varepsilon) = \begin{cases} a_0^{(1)}(x) & \text{dans } \Omega_1, \text{ p.p} \\ \varepsilon & \text{dans } \Omega_2 \end{cases} \end{cases}$$

$$(3.11) \quad \begin{cases} A_{ij}^{(2)}(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon & \text{dans } \Omega_1 \\ a_{ij}^{(2)}(x) & \text{dans } \Omega_2, \text{ p.p} \end{cases} \\ A_0^{(2)}(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon & \text{dans } \Omega_1 \\ a_0^{(2)}(x) & \text{dans } \Omega_2, \text{ p.p} \end{cases} \end{cases}$$

Puis, pour  $u^*, v^* \in H^1(R^n)$ :

$$(3.12) \quad \mathcal{A}_\varepsilon^{(1)}(u^*, v^*) = \sum_{i,j=1}^n \int_{R^n} A_{ij}^{(1)}(x, \varepsilon) D_i u^* \overline{D_j v^*} dx + \int_{R^n} A_0^{(1)} u^* \overline{v^*} dx$$

et pour  $u^{**}, v^{**} \in H^1(R^n)$ :

$$(3.13) \quad \mathcal{A}_\varepsilon^{(2)}(u^{**}, v^{**}) = \sum_{i,j=1}^n \int_{R^n} A_{ij}^{(2)}(x, \varepsilon) D_i u^{**} \overline{D_j v^{**}} dx + \int_{R^n} A_0^{(2)} u^{**} \overline{v^{**}} dx .$$

On désigne par  $\theta_\varepsilon$  l'ensemble des points  $\in \Omega_1$ , à distance  $< \varepsilon$  de la frontière  $\Gamma$ .

On peut toujours trouver un opérateur linéaire continu:

$$u \rightarrow Su$$

de  $H^1(\Omega_1)$  dans  $H^1(\theta_\varepsilon)$ , tel que

$$Su = u \quad \text{sur} \quad (\Gamma^1) .$$

On introduit maintenant des fonctions  $Q_1, Q_2$ , une fois continûment différentiables dans  $R^n$  et telles que

$$Q_1 = q_1 \text{ sur } \Gamma, \quad Q_2 = q_2 \text{ sur } \Gamma .$$

On pose enfin

$$(3.14) \quad R_\varepsilon(u^*, u^{**}; v^*, v^{**}) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\theta_\varepsilon} (Q_1 v^* + Q_2 S v^{**}) \overline{(Q_1 v^* + Q_2 S v^{**})} dx$$

---

<sup>1)</sup> A l'aide de cartes locales, on se ramène au cas où  $\Gamma$  est un hyperplan; on effectue alors une symétrie par rapport à  $\Gamma$ .

Tout ceci posé, on désigne par  $\{u_\varepsilon^*, u_\varepsilon^{**}\}$  la solution dans  $H^1(R^n) \times H^1(R^n)$  de

$$(3.15) \quad \begin{cases} \mathcal{A}_\varepsilon^{(1)}(u_\varepsilon^*, v^*) + \mathcal{A}_\varepsilon^{(2)}(u_\varepsilon^{**}, v^{**}) + R_\varepsilon(u_\varepsilon^*, u_\varepsilon^{**}; v^*, v^{**}) \\ = \int_{\Omega_1} f_1 v^* dx + \int_{\Omega_2} f_2 v^{**} dx \end{cases}$$

pour tout  $\{v^*, v^{**}\} \in H^1(R^n) \times H^1(R^n)$ .

Comme  $R_\varepsilon(v^*, v^{**}; v^*, v^{**}) \geq 0$ , l'équation (3.15) admet bien une solution unique. On va démontrer le

**THÉORÈME 3.1.:** *Soit  $(u_\varepsilon^*)_{\Omega_1}$  et  $(u_\varepsilon^{**})_{\Omega_2}$  la restriction de  $u_\varepsilon^*$  et  $u_\varepsilon^{**}$  à  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Soit  $\{u_1, u_2\}$  la solution de (3.5). Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a :*

$$\begin{aligned} (u_\varepsilon^*)_{\Omega_1} &\rightarrow u_1 && \text{dans } H^1(\Omega_1) \text{ faible,} \\ (u_\varepsilon^{**})_{\Omega_2} &\rightarrow u_2 && \text{dans } H^1(\Omega_2) \text{ faible.} \end{aligned}$$

**DÉMONSTRATION.**

Comme dans les n° 1 et 2, on constate d'abord que, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^* &\text{ demeure dans un borné de } H^1(\Omega_1), \\ \sqrt{\varepsilon} u^* &\text{ » » » » } H^1(\Omega_2), \\ u^{**} &\text{ » » » » } H^1(\Omega_2), \\ \sqrt{\varepsilon} u_\varepsilon^{**} &\text{ » » » » } H^1(\Omega_1). \end{aligned}$$

De toute suite  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  on peut donc extraire une suite  $\varepsilon'$  telle que

$$(3.16) \quad u_{\varepsilon'}^* \rightarrow \omega_1 \quad \text{dans } H^1(\Omega_1) \text{ faible,}$$

$$(3.17) \quad u_{\varepsilon'}^{**} \rightarrow \omega_2 \quad \text{dans } H^1(\Omega_2) \text{ faible.}$$

Par ailleurs

$$(3.18) \quad \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega_1} |Q_1 u_\varepsilon^* + Q_2 S u_\varepsilon^{**}|^2 dx \leq c_1 ;$$

admettons un instant le

LEMME 3.1.: De (3.16), (3.17) et (3.18) il résulte que

$$(3.19) \quad q_1 w_1 + q_2 w_2 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma.$$

Soit maintenant  $v^*$  et  $v^{**}$  deux fonctions une fois continûment différentiable à support compact dans  $R^n$ , telles que

$$(3.20) \quad q_1 v^* + q_2 v^{**} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma.$$

Admettons un instant le

LEMME 3.2.: Si  $v^*$  et  $v^{**}$  satisfont à (3.20), on a :

$$R_\varepsilon(u_\varepsilon^*, u_\varepsilon^{**}; v^*, v^{**}) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Alors la relation (3.15) donne par passage à la limite :

$$(3.21) \quad a^{(1)}(\omega_1, v^*) + a^{(2)}(\omega_2, v^{**}) = \int_{\Omega_1} f_1 \overline{v^*} dx + \int_{\Omega_2} f_2 \overline{v^{**}} dx$$

Soit maintenant  $\{v_1, v_2\}$ ,  $v_k$  une fois continûment différentiable dans  $\overline{\Omega}_k$ ,  $k = 1, 2$ ,  $v_k$  à support compact, avec  $q_1 v_1 + q_2 v_2 = 0$  sur  $\Gamma$  (en abrégé  $\{v_1, v_2\} \in \mathfrak{U}$ ). Alors on peut prolonger  $v_1$  en  $v^*$  et  $v_2$  en  $v^{**}$  avec (3.20), donc (3.21) donne

$$a^{(1)}(\omega_1, v_1) + a^{(2)}(\omega_2, v_2) = \int_{\Omega_1} f_1 \overline{v_1} dx + \int_{\Omega_2} f_2 \overline{v_2} dx ;$$

comme  $\mathfrak{U}$  est dense dans  $V$ , il en résulte que  $\omega_1 = u_1$ ,  $\omega_2 = u_2$ , et il reste seulement à démontrer les lemmes.

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.1.

Posons  $F_\varepsilon = Q_1 u_\varepsilon^* + Q_2 S u_\varepsilon^{**}$ .

Remplaçons  $\varepsilon'$  par  $\varepsilon$ . On a donc une suite de fonctions  $F_\varepsilon$  de  $H^1(\Omega_1)$  avec

$$F_\varepsilon \rightarrow F \quad \text{dans} \quad H^1(\Omega_1) \text{ faible}$$

et

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\sigma_\varepsilon} |F_\varepsilon(x)|^2 dx \leq c_1$$

Il faut montrer que, dans ces conditions,  $F = 0$  sur  $\Gamma$ .

A l'aide de cartes locales, on se ramène au cas où  $\Omega_1$  coïncide avec  $R_+^n$ , les  $F_\varepsilon$  ayant leur support dans un compact fixe  $K$  et avec, cette fois,

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\sigma_\varepsilon} |F_\varepsilon(x)|^2 dx \leq c_1, \quad G_\varepsilon = \{x \mid 0 < x_n < \varepsilon\}.$$

On peut écrire

$$F_\varepsilon(x) = F_\varepsilon(x', 0) + H_\varepsilon(x), \quad x' = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$$

où

$$H_\varepsilon(x) = \int_0^{x_n} \frac{\partial F_\varepsilon}{\partial x_n}(x', y) dy.$$

D'après l'inégalité de Hardy, déjà utilisée,  $(1/x_n)H_\varepsilon(x)$  est bornée dans  $L^2(R_+^n)$ , donc à fortiori

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{G_\varepsilon} |H_\varepsilon(x)|^2 dx \leq c_2.$$

Par conséquent  $\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{G_\varepsilon} |F_2(x', 0)|^2 dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma} |F_\varepsilon(x', 0)|^2 dx' \leq c_2$  ( $\Sigma = \{x \mid x_n = 0\}$ ); comme  $F(x', 0) \rightarrow F_\varepsilon(x', 0)$  dans  $L^2(\Sigma)$ , on a nécessairement  $F(x', 0) = 0$  ce qui démontre le Lemme.

Notons que nous avons implicitement démontré ceci: si  $v^*$  et  $v^{**}$  sont une fois continûment différentiables dans  $R^n$  avec (3.20), alors

$$(3.22) \quad \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\sigma_\varepsilon} |Q_1 v^* + Q_2 S v^{**}|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

En effet on se ramène à  $F \in H^1(R_+^n)$ , avec  $F(x', 0) = 0$ ; donc  $\frac{F}{x_n} \in L^2(R_+^n)$  et

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int |F|^2 dx \leq \int_{G_\varepsilon} |F/x_n|^2 dx \rightarrow 0 \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.2.

Tenant compte de (3.18) on a:

$$|R_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon^{**}; v^*, v^{**})| \leq c_1 \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\theta_\varepsilon} |Q_1 v^* + Q_2 S v^{**}|^2 dx$$

et le résultat suit d'après (3.22).

Le Théorème 3.1 est complètement démontré.

3.3. Le procédé est général: pour un problème variationnel elliptique de transmission à  $k$  milieux, on se ramène à un système à  $k$  dimensions.

#### 4. Opérateurs d'ordre supérieur à 2.

4.1. Soit encore  $\Omega$  un ouvert de  $R_n$  comme au n° 1. On considère  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  comme au n° 1. Désignant par  $\Delta$  le Laplacien, on considère le problème aux limites suivant:

trouver  $u$  dans  $\Omega$ , solution de

$$(4.1) \quad \Delta^2 u + u = f, \quad f \text{ donnée dans } \Omega,$$

avec

$$(4.2) \quad u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

( $\partial/\partial n$  désigne la dérivée normale à  $\Gamma_1$ , dirigée vers l'extérieur de  $\Omega$  pour fixer les idées), et

$$(4.3) \quad \Delta u = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} \Delta u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2.$$

Nous posons au point suivant ce problème de façon précise.

4.2. On désigne (cf. Lions [1], chap. II) par  $\mathcal{K}(\Delta; \Omega)$  l'espace des fonctions  $u \in L^2(\Omega)$  telles que  $\Delta u \in L^2(\Omega)$ ; si  $u, v \in \mathcal{K}(\Delta, \Omega)$  on posera

$$(u, v)_{\mathcal{K}(\Delta; \Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}$$

ce qui munit  $\mathcal{K}(\Delta; \Omega)$  d'une structure d'espace de Hilbert.

Pour  $u \in \mathcal{K}(\Delta; \Omega)$ , on peut définir  $u$  sur  $\Gamma$  et  $\partial u / \partial n$  sur  $\Gamma$  (cf. Lions-Magenes [1]). En fait  $u|_{\Gamma}$  et  $\partial u / \partial n|_{\Gamma}$  sont des distributions sur  $\Gamma$ . Dans ces conditions, on peut définir  $V$  comme le sous-espace (fermé) de  $\mathcal{K}(\Delta; \Omega)$  consistant en les  $u$  tels que  $u|_{\Gamma}$  et  $\partial u / \partial n|_{\Gamma}$  soient nuls sur l'intérieur  $\Gamma_1^{\circ}$  de  $\Gamma_1$ .

Il existe alors une fonction  $u \in V$  et une seule, telle que

$$(4.4) \quad \int_{\Omega} (\Delta u)(\overline{\Delta v}) dx + \int_{\Omega} u \bar{v} dx = \int_{\Omega} f \bar{v} dx \quad \text{pour tout } v \in V,$$

$f$  étant donné dans  $L^2(\Omega)$ .

C'est maintenant la solution  $u$  de (4.2) que nous approchons par des solutions de problèmes de Dirichlet dans l'espace entier.

4.3. On introduit  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  comme au n° 1; puis les fonctions:

$$(4.5) \quad A_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega \\ 1 & \text{dans } \Omega_1 \\ \varepsilon & \text{dans } \Omega_2. \end{cases}$$

et

$$(4.6) \quad B_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega \\ 1/\varepsilon & \text{dans } \Omega_1 \\ \varepsilon & \text{dans } \Omega_2. \end{cases}$$

Pour  $u, v \in \mathcal{K}(\Delta; R^n)$ , on pose

$$(4.7) \quad \mathcal{A}_{\varepsilon}(u, v) = \int_{R^n} A_{\varepsilon}(x) \Delta u \overline{\Delta v} dx + \int_{R^n} B_{\varepsilon}(x) u \bar{v} dx.$$



On désigne par  $u_\varepsilon$  la solution (unique) dans  $\mathcal{K}(\Delta; R^n)$  de

$$(4.8) \quad \mathcal{A}_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \int_{\Omega} f \bar{v} \, dx, \quad v \in \mathcal{K}(\Delta, R^n).$$

La restriction  $(u_\varepsilon)_\Omega$  de  $u_\varepsilon$  à  $\Omega$  appartient à l'espace  $\mathcal{K}(\Delta; \Omega)$ .

Par des méthodes analogues à celles des n° précédents, on démontre le:

**THÉORÈME 4.1.:** *Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $(u_\varepsilon)_\Omega$  converge dans  $\mathcal{K}(\Delta; \Omega)$  faible vers la solution  $u$  du problème (4.4).*

## 5. Approximation par les différences finies.

5.1. On veut donner dans ce n° un procédé d'approximation par les différences finies de la solution du problème (1.10).

On introduit une fois pour toutes  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  comme au n° 1, point 1.3.

On introduit le vecteur  $h = \{h_1, \dots, h_n\}$ ;  $|h| = (h_1^2 + \dots + h_n^2)^{1/2}$  est destiné à tendre vers 0. On désigne par  $\mathcal{R}_h$  le réseau

$$\{m_1 h_1, \dots, m_n h_n\}, \text{ les } m_i \text{ étant des entiers } \geq 0 \text{ ou } < 0.$$

Le point courant de  $\mathcal{R}_h$  est désigné par  $M$ , donc

$$M = \{m_1 h_1, \dots, m_n h_n\}.$$

On pose:

$$(5.1) \quad Q_h = [0, h_1] \times [0, h_2] \times \dots \times [0, h_n]$$

alors

$$(5.2) \quad M + Q_h = [m_1 h_1, (m_1 + 1)h_1] \times \dots \times [m_n h_n, (m_n + 1)h_n]$$

Par analogie avec ce qui a été fait au n° 1, point 1.3, on introduit les fonctions:

$$(5.3) \quad A_{ij}(x, h) = \begin{cases} a_{ij}(x) & \text{dans } \Omega \\ \delta_i^j & \text{dans } \Omega_1 \\ |h| \delta_i^j & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$$

$$(5.4) \quad A_0(x, h) = \begin{cases} a_0(x) & \text{dans } \Omega \\ \frac{1}{|h|} & \text{dans } \Omega_1 \\ |h| & \text{dans } \Omega_2. \end{cases}$$

On pose

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ij}(M, h) &= \frac{1}{|Q_h|} \int_{M+Q_h} A_{ij}(x, h) dx \\ \tilde{A}_0(M, h) &= \frac{1}{|Q_h|} \int_{M+Q_h} A_0(x, h) dx \end{aligned}$$

Désignons par  $u_h(M)$  une fonction définie sur le réseau  $R_h$  et à valeurs complexes. On pose:

$$(5.5) \quad \nabla_i u_h(M) = \frac{1}{h_i} [u_h(M + \{0, \dots, 0, h_i, 0, \dots, 0\}) - u_h(M)]$$

ou plus brièvement

$$(5.5)' \quad \nabla_i u_h(M) = \frac{1}{h_i} [u_h[M + h_i] - u_h(M)]$$

On désigne enfin par  $l^2(\mathcal{R}_h)$  l'espace des fonctions (ou suites)  $u_h(M)$  telles que

$$(5.6) \quad \sum_{M \in \mathcal{R}_h} |u_h(M)|^2 < \infty$$

C'est un espace de Hilbert. Pour  $u_h, v_h \in l^2(\mathcal{R}_h)$  on pose (comparer à (1.13)):

$$(5.7) \quad \begin{cases} \mathcal{A}_h(u_h, v_h) = \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \sum_{i,j=1}^n \tilde{A}_{ij}(M, h) \nabla_i u_h(M) \overline{\nabla_j v_h(M)} |Q_h| \\ \quad + \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \tilde{A}_0(M, h) u_h(M) \overline{v_h(M)} |Q_h|. \end{cases}$$

On vérifie sans difficulté l'inégalité suivante:

$$(5.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} \mathcal{A}_h(v_h, v_h) \geq \alpha \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \left( \sum_i |\nabla_i v_h(M)|^2 \operatorname{mes}(\Omega \cap \{M + Q_h\}) \right) \\ + \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \left( \sum_i |\nabla_i v_h(M)|^2 \operatorname{mes}(\Omega_1 \cap \{M + Q_h\}) \right) \\ + |h| \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \left( \sum_i |\nabla_i v_h(M)|^2 \operatorname{mes}(\Omega_2 \cap \{M + Q_h\}) \right) \\ + \alpha_0 \sum_{M \in \mathcal{R}_h} (|v_h(M)|^2 \operatorname{mes}(\Omega \cap \{M + Q_h\})) \\ + \frac{1}{|h|} \sum_{M \in \mathcal{R}_h} (|v_h(M)|^2 \operatorname{mes}(\Omega_1 \cap \{M + Q_h\})) \\ + |h| \sum_{M \in \mathcal{R}_h} (|v_h(M)|^2 \operatorname{mes}(\Omega_2 \cap \{M + Q_h\})) \end{array} \right.$$

où  $\operatorname{mes}(X) =$  mesure de l'ensemble (mesurable)  $X$ .

De cette inégalité et d'une variante du lemme des projections (cf. par ex. Lions [2]) il résulte qu'il existe une fonction  $u_h(M)$  et une seule dans  $\mathcal{L}^2(\mathcal{R}_h)$ , vérifiant

$$(5.9) \quad \mathcal{A}_h(u_h, v_h) = \sum_{M \in \mathcal{R}_h} F_h(M) \overline{v_h(M)} h_1 \dots h_n \quad \text{pour tout } v_h \in \mathcal{L}^2(\mathcal{R}_h)$$

où  $F_h$  est donnée dans  $\mathcal{L}^2(\mathcal{R}_h)$ .

On veut maintenant démontrer que la fonction  $u_h$  réalise — dans un sens à préciser — une approximation de la solution  $u$  du problème (1.10) — lorsque l'on prend dans (5.9):

$$(5.10) \quad F_h(M) = \frac{1}{|Q_h|} \int_{\Omega \cap \{M + Q_h\}} f(x) dx$$

5.2. A la suite  $u_h(M) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{R}_h)$  on associe la fonction

$$(5.11) \quad \pi_h u_h(x) = u_h(M) \quad \text{dans } M + \overset{\circ}{Q}_h$$

On définit ainsi  $\pi_h u_h$  sauf sur les hyperplans  $x_i = m_i h_i$ ; donc, en particulier,  $\pi_h u_h$  est définie presque partout; la fonction  $\pi_h u_h$

est dans  $L^2(R^n)$  et

$$(5.12) \quad \int_{R^n} |\pi_h u_h(x)|^2 dx = \sum_{M \in \mathcal{R}_h} |u_h(M)|^2 |Q_h|$$

On va maintenant démontrer le:

**THÉORÈME 5.1.:** Soit  $u_h(M) \in \mathcal{P}(\mathcal{R}_h)$  la solution de (5.9), la fonction  $F_h(M)$  étant donnée par (5.10). On définit ensuite  $\pi_h u_h$  dans  $L^2(R^n)$  par (5.11). Soit enfin  $(\pi_h u_h)_\Omega$  la restriction de  $\pi_h u_h$  à  $\Omega$ . Dans ces conditions,

$$(5.13) \quad (\pi_h u_h)_\Omega \rightarrow u \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible, lorsque } |h| \rightarrow 0$$

où  $u$  est la solution de (1.10).

**DÉMONSTRATION:** Comme on le vérifie facilement:

$$\sum_{M \in \mathcal{R}_h} \frac{|F_h(M)|^2 |Q_h|^2}{\text{mes}(\Omega \cap \{M + Q_h\})} \leq \int_{\Omega} |f|^2 dx$$

Le deuxième membre de (5.9) est alors majoré par

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \frac{|F_h(M)|^2 |Q_h|^2}{\text{Mes}(\Omega \cap \{M + Q_h\})} \right)^{1/2} \left( \sum_{M \in \mathcal{R}_h} |v_h(M)|^2 \text{mes}(\Omega \cap \{M + Q_h\}) \right)^{1/2} \\ & \leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \sum_{M \in \mathcal{R}_h} |v_h(M)|^2 \text{mes}(\Omega \cap \{M + Q_h\}) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Faisant  $v_h = u_h$  dans (5.9), tenant compte de (5.8) et de l'inégalité précédente, on obtient:

$$(5.14) \quad \sum_{M \in \mathcal{R}_h} |u_h(M)|^2 \text{mes}(\Omega \cap \{M + Q_h\}) \leq c_1$$

(les  $c_i$  désignant des constantes indépendantes de  $h$ ), puis

$$(5.15) \quad \sum_{M \in \mathcal{R}_h} |u_h(M)|^2 \text{mes}(\Omega_1 \cap \{M + Q_h\}) \leq c_2 |h|$$

$$(5.16) \quad \sum_{M \in \mathcal{R}_h} |u_h(M)|^2 \text{mes}(\Omega_2 \cap \{M + Q_h\}) \leq c_3 |h|$$

$$(5.17) \quad \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \sum_{j=1}^n |\nabla_j u_h(M)|^2 \text{mes}((\Omega \cap \Omega_1) \cap \{M + Q_h\}) \leq c_4$$

$$(5.18) \quad \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \sum_{j=1}^n |\nabla_j u_h(M)|^2 \text{mes}(\Omega_2 \cap \{M + Q_h\}) \leq c_5 / |h| .$$

Si l'on introduit  $\pi_h u_h$ , définie par (5.11), il résulte de (5.14), (5.15) et (5.16) que

$$(5.14)' \quad \int_{\Omega} |\pi_h u_h(x)|^2 dx \leq c_1$$

$$(5.15)' \quad \int_{\Omega_1} |\pi_h u_h(x)|^2 dx \leq c_2 |h|$$

$$(5.16)' \quad \int_{\Omega_2} |\pi_h u_h(x)|^2 dx \leq c_3 / |h| .$$

Posons ensuite

$$(5.19) \quad \pi_h(\nabla_j u_h)(x) = w_{h,j}(x) .$$

Il résulte de (5.17) et (5.18) que

$$(5.17)' \quad \sum_j \int_{\Omega \cap \Omega_1} |w_{h,j}(x)|^2 dx \leq c_4$$

$$(5.18)' \quad \sum_j \int_{\Omega_2} |w_{h,j}(x)|^2 dx \leq c_5 / |h| .$$

On déduit de tout cela que, de toute suite  $h^{(\alpha)} \rightarrow 0$  on peut extraire une suite  $h^{(\beta)} = h'$  telle que :

$$(5.20) \quad \pi_{h'} u_{h'} \rightarrow \omega \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega \cup \Omega_1 \cup \overset{\circ}{\Gamma}_1) \text{ faible,}$$

$$(5.21) \quad w_{h',j} \rightarrow w_j \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega \cup \Omega_1 \cup \overset{\circ}{\Gamma}_1) \text{ faible}$$

et ceci résultant de (5.15)' avec

$$(5.22) \quad \omega = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_1 .$$

Admettons pour le moment le

LEMME 5.1.: Dans  $\Omega \cup \Omega_1 \cup \overset{\circ}{\Gamma}_1$  on a :

$$w_j = \frac{\partial \omega}{\partial x_j}.$$

Alors

$$\omega \in H^1(\Omega \cup \Omega_1 \cup \overset{\circ}{\Gamma}_1)$$

ce qui, joint à (5.22) entraîne

$$(5.23) \quad \omega = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1.$$

On va maintenant démontrer que  $\omega$  coïncide sur  $\Omega$  avec la solution  $u$  de (1.10).

Nous prenons une fonction  $v$  une fois continûment différentiable dans  $R^n$ , à support compact et nulle dans  $\Omega_1$  (en abrégé:  $v \in \mathcal{V}$ ); par restriction à  $\mathcal{R}_h$ ,  $v$  définit  $v(M) \in l^2(\mathcal{R}_h)$ . On prend dans (5.9)  $v_h(M) = v(M)$ , et on remplace  $\tilde{A}_{ij}(M, h)$  par sa valeur. La relation s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \sum_{i,j} \int_{M+Q_h} A_{ij}(x, h) dx \nabla_i u_h(M) \overline{\nabla_j v(M)} \\ + \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \int_{M+Q_h} A_0(x, h) dx u_h(M) \overline{v(M)} = \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \int_{\Omega \cap \{M+Q_h\}} f(x) dx \overline{v(M)}. \end{aligned}$$

Introduisons

$$(5.24) \quad \begin{cases} g(x) = v(M) & \text{dans} \quad M + Q_h \\ g_i(x) = \nabla_i v(M) & \text{dans} \quad M + Q_h. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \int_{M+Q_h} A_{ij}(x, h) w_{h,i}(x) \overline{g_j(x)} dx \\ + \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \int_{M+Q_h} A_0(x, h) \pi_h u_h(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \int_{\Omega \cap \{M+Q_h\}} f(x) \overline{g(x)} dx \end{aligned}$$

ou encore

$$(5.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^n} A_{ij}(x, h) w_{h,i}(x) \overline{g_i(x)} dx + \int_{\mathbb{R}^n} A_0(x, h) \pi_h u_h(x) \overline{g(x)} dx \\ = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx . \end{array} \right.$$

On va démontrer successivement les

LEMME 5.2.: Lorsque  $h' \rightarrow 0$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} A_{ij}(x, h') w_{h',i}(x) \overline{g_i(x)} dx \rightarrow \int_{\Omega} a_{ij}(x) w_j(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx .$$

LEMME 5.3.: Lorsque  $h' \rightarrow 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} A_0(x, h') \pi_h u_h(x) \overline{g(x)} dx \rightarrow \int_{\Omega} a_0(x) \omega(x) \overline{v(x)} dx .$$

LEMME 5.4.: Lorsque  $h \rightarrow 0$

$$\int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) \overline{v(x)} dx$$

( $g$  dépend de  $h!$ ).

DÉMONSTRATION DU LEMME 5.2.:

On a:

$$\int_{\mathbb{R}^n} A_{ij}(x, h') w_{h',i}(x) \overline{g_i(x)} dx = Y_{h'} + Z_{h'}$$

où

$$Y_{h'} = \int_{\mathbb{R}^n} A_{ij}(x, h') w_{h',i}(x) (\overline{g_i} - \overline{D_i v}) dx$$

$$Z_{h'} = \int_{\mathbb{R}^n} A_{ij}(x, h') w_{h',i}(x) \overline{D_i v} dx .$$

De l'expression de  $A_{i,j}(x, h)$  il résulte que

$$| Y_{h'} | \leq c_6 \left( \int_{\Omega \cap \Omega_1} | g_i(x) - D_i v(x) |^2 dx \right)^{1/2} \\ + c_6 | h' | \left( \int_{\Omega_1} | w_{h',j} |^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega_1} | g_i(x) - D_i v(x) |^2 dx \right)^{1/2}$$

Tenant compte de (5.18)', on aura en particulier  $Y_{h'} \rightarrow 0$  si

$$\int_{R^n} | g_i(x) - D_i v(x) |^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad h' \rightarrow 0,$$

$g_i$  étant définie dans (5.24). Ceci résulte du fait que  $D_i v$  est continue et à support compact.

Considérons maintenant  $Z_{h'}$ . Comme  $v$  est nulle sur  $\Omega_1$ , on a :

$$Z_{h'} = Z_{h'}^* + Z_{h'}^{**}, \quad \text{avec}$$

$$Z_{h'}^* = \int_{\Omega} a_{i,j}(x) w_{h',j}(x) \overline{D_i v} dx$$

$$Z_{h'}^{**} = | h' | \int_{\Omega} w_{h',j}(x) \overline{D_i v(x)} dx \delta'_i.$$

De (5.21) résulte que  $Z_{h'}^* \rightarrow \int_{\Omega} a_{i,j}(x) w_{j,i}(x) \overline{D_i v(x)} dx$ .

Enfin, d'après (5.18)',  $Z_{h'}^{**} = O(| h' |^{1/2}) \rightarrow 0$ , donc le Lemme 5.2 est démontré.

DÉMONSTRATION DU LEMME 5.3. :

On a :

$$\int_{R^n} A_0(x, h') \tau_{h'} u_{h'}(x) \overline{g(x)} dx = S_{h'} + T_{h'}$$



où

$$S_{h'} = \int_{\mathbb{R}^n} A_0(x, h') \tau_{h'} u_{h'}(x) (\overline{g(x)} - \overline{v(x)}) dx,$$

$$T_{h'} = \int_{\mathbb{R}^n} A_0(x, h') \tau_{h'} u_{h'}(x) \overline{v(x)} dx.$$

Comme  $v$  est nulle sur  $\Omega_1$ , on a :

$$T_{h'} = \int_{\Omega} a_0(x) \tau_{h'} u_{h'}(x) \overline{v(x)} dx + |h'| \int_{\Omega_2} \tau_{h'} u_{h'}(x) \overline{v(x)} dx;$$

d'après (5.16)' le deuxième terme est  $O(|h'|^{1/2})$ , de sorte qu'avec (5.20) :

$$T_{h'} \rightarrow \int_{\Omega} a_0(x) \omega(x) \overline{v(x)} dx$$

et le Lemme 5.3 résulte de ce que

$$(5.26) \quad S_{h'} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad |h'| \rightarrow 0.$$

Démontrons ce dernier point.

On note d'abord que

$$\left| \int_{\Omega} A_0(x, h') \tau_{h'} u_{h'}(x) (\overline{g(x)} - \overline{v(x)}) dx \right| \leq c_7 \left( \int_{\Omega} |g(x) - v(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

et, comme  $v$  est continue à support compact :

$$(5.27) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |g(x) - v(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad |h| \rightarrow 0.$$

Puis

$$\left| \int_{\Omega_2} A_0(x, h') \tau_{h'} u_{h'}(x) (\overline{g(x)} - \overline{v(x)}) dx \right| \leq c_8 |h'|^{1/2} \left( \int_{\Omega_2} |g(x) - v(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

ce qui  $\rightarrow 0$  avec  $|h'|$ . Par conséquent, (5.26) est démontré puisque,  $v$  étant nulle dans un voisinage de  $\Omega_1$ ,  $g$  sera nulle sur  $\Omega$ , pour  $|h|$  assez petit, de sorte que

$$(5.28) \quad \int_{\Omega_1} A_0(x, h') \pi_{h'} u_{h'}(x) \overline{g(x)} \, dx = 0 \quad \text{pour } |h'| \text{ assez petit.}$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 5.4.:

Résulte de (5.27).

Des Lemmes précédents et de (5.25) (où l'on prend  $h = h'$ ), il résulte:

$$(5.29) \quad \sum_{i,j} \int_{\Omega} a_{ij}(x) w_j(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Omega} a_0(x) \omega(x) \overline{v(x)} \, dx = \int_{\Omega} f(x) \overline{v(x)} \, dx.$$

Utilisant le Lemme 5.1 et (5.23), on voit que (avec les notations du n° 1, point 1.2):

$$(5.30) \quad \omega \in V \quad \text{et} \quad a(\omega, v) = \int_{\Omega} f \overline{v} \, dx \quad \text{pour tout} \quad v \in \mathcal{V}.$$

Or soit  $\chi$ , une fois continûment différentiable dans  $\overline{\Omega}$ , nulle dans un voisinage (variable avec  $\chi$ ) de  $\Gamma_1$ ; il existe alors  $v \in \mathcal{V}$  avec  $v = \chi$  dans  $\Omega$ ; de la sorte

$$a(\omega, \chi) = \int_{\Omega} f \overline{\chi} \, dx$$

et comme les fonctions  $\chi$  sont denses dans  $V$ , on déduit de (5.30) que

$$(5.31) \quad \omega \in V \quad \text{et} \quad a(\omega, v) = \int_{\Omega} f \overline{v} \, dx \quad \text{pour tout} \quad v \in V.$$

Donc  $\omega = u$  et ceci achève la démonstration du Théorème 5.1 sous réserve de la

DEMONSTRATION DU LEMME 5.1.:

Soit  $\varphi$  une fonction indéfiniment différentiable à support compact dans  $\Omega \cup \Omega_1 \cup \dot{I}_1$ . Soit  $\Phi$  la fonction égale à  $\varphi$  dans  $\Omega \cup \Omega_1 \cup \dot{I}_1$  et à 0 ailleurs. Il faut démontrer que

$$\int_{\Omega \cup \Omega_1 \cup \dot{I}_1} w_j(x) \varphi(x) dx = X_j = - \int_{\Omega \cup \Omega_1 \cup \dot{I}_1} w \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx .$$

Or

$$\begin{aligned} X_j &= \lim_{R^n} \int w_{h',j}(x) \Phi(x) dx \\ &= \lim_{M \in \mathfrak{R}_h} \sum w_{h',j}(M) \int_{M+Q_h} \Phi(x) dx \\ &= \lim_{M \in \mathfrak{R}_h} \sum u_{h'}(M) \int_{M+Q_h} \left( \frac{\Phi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j - h_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - \Phi(x)}{h_j} \right) dx \\ &= \lim_{R^n} \int \pi_{h'} u_{h'}(x) \Phi_j(x) dx \end{aligned}$$

où

$$\Phi_j(x) = h_j^{-1} [\Phi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j - h_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - \Phi(x)] .$$

Pour  $|h'|$  assez petit,  $\Phi_j$  est nulle hors de  $\Omega \cup \Omega_1 \cup \dot{I}_1$  donc

$$X_j = \lim_{\Omega \cup \Omega_1 \cup \dot{I}_1} \int \pi_{h'} u_{h'} \Phi_j(x) dx$$

Or  $\Phi_j \rightarrow -\partial\varphi/\partial x_j$  uniformément et le résultat suit d'après (5.20). Le Théorème 5.1 est complètement démontré.

5.3. On a donc approché  $u$  par la solution  $u_h$  d'un problème de Dirichlet dans l'espace entier. Utilisant le point 1.5 du n° 1, on peut également approcher  $u$  par les solutions  $u_h$  d'un problème

de Dirichlet usuel. Par exemple, on prendra pour  $\Omega_2$  un cube et on considèrera l'équation (5.9) sur les  $u_n(M)$ ,  $v_n(M)$  dans l'espace des suites (finies) définies sur les points du réseau intérieurs au cube  $\Omega_2$  et nulles aux points frontières.

5.4. On a ainsi démontré la convergence (au sens de  $L^2$ ) du procédé d'approximation (5.9) vers la solution du problème mêlé

$$(1.5) \quad Au = f$$

avec

$$(1.6) \quad u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1$$

$$(1.7) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_A} \quad \text{sur} \quad \Gamma_2.$$

Si  $\Gamma_2$  est vide, il s'agit du problème de Dirichlet — mais le procédé d'approximation donné ici ne coïncide pas tout à fait avec le procédé d'approximation usuel.

## 6. Approximation par les différences finies. Cas des ordres supérieurs à 2.

On va indiquer brièvement dans ce n° comment on peut approcher par les différences finies la solution du problème (4.4), n° 4.

Les notations sont celles du n° 5.

On introduit

$$(6.1) \quad \tilde{A}_n(M) = \frac{1}{|Q_n|} \int_{M+Q_n} A_{|n|}(x) dx$$

$$(6.2) \quad \tilde{B}_n(M) = \frac{1}{|Q_n|} \int_{M+Q_n} B_{|n|}(x) dx$$

où  $A_{|n|}$  et  $B_{|n|}$  sont définis par (4.5) et (4.6).

Soit  $\mu_n$  une mesure, somme finie de masses ponctuelles en des points du réseau  $\mathfrak{R}_n$ , le support de  $\mu_n$  étant contenu dans une

boule de centre l'origine et de rayon  $c_h, c_h$  tendant vers 0 avec  $|h|$ .  
On suppose que

$$(6.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour toute fonction } v \text{ deux fois continûment différentiable} \\ \text{à support compact dans } R^n, \mu_{h^*} v \rightarrow \Delta v \text{ uniformément.} \end{array} \right.$$

Pour une fonction  $f$  donnée sur  $R_h$  on pose

$$(6.4) \quad \Delta_h f = \mu_{h^*} f ;$$

si  $f$  est donné sur  $\mathcal{R}_h$ , alors  $\Delta_h f(M)$  sera définie sur  $\mathcal{R}_h$ .

On désigne par  $u_h(M) \in L^2(\mathcal{R}_h)$  la solution (unique) de l'équation :

$$(6.5) \quad \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \tilde{A}_h(M) \Delta_h u_h(M) \overline{\Delta_h v_h(M)} h_1 \dots h_n \\ + \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \tilde{B}_h(M) u_h(M) \overline{v_h(M)} h_1 \dots h_n = \sum_{M \in \mathcal{R}_h} F_h(M) \overline{v_h(M)} h_1 \dots h_n$$

pour toute fonction  $v_h(M) \in L^2(\mathcal{R}_h)$ .

On introduit ensuite, comme au n° 5,

$$(6.6) \quad \pi_h u_h(x) = u_h(M) \quad \text{dans} \quad M + Q_h .$$

On montre alors, par des considérations analogues à celles du n° 5, le

**THÉORÈME 6.1.:** *Lorsque  $|h| \rightarrow 0$ , la restriction  $(\pi_h u_h)_\Omega$  de  $\pi_h u_h$  à  $\Omega$  converge dans  $L^2(\Omega)$  faible vers la solution  $u$  du problème (4.4).*

**REMARQUE 6.1.**

Naturellement on peut, comme à la Remarque 5.3, approcher  $u$  par les solutions d'un problème de Dirichlet usuel dans un ouvert  $\Omega_2$  borné.

## CHAPITRE II.

### PROBLEMES D'EVOLUTION

#### 1. Méthode discrète.

##### 1.1. LE PROBLÈME À APPROCHER.

On considère un ouvert  $\Omega$  de  $R^n$  comme au Chap. I, n° 1, dont la frontière  $\Gamma$  est divisée en deux parties  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

On considère le cylindre  $\Omega \times (0, +\infty)$  dans l'espace  $R_x^n \times R_t$ . Dans  $\Omega \times (0, \infty)$  on donne des fonctions  $a_{ij}(x, t)$  telles que

$$(1.1) \quad \begin{cases} a_{ij}(x, t) \in L^\infty(\Omega \times (0, \infty)), \\ \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \zeta_j \bar{\zeta}_i \geq \alpha (|\zeta_1|^2 + \dots + |\zeta_n|^2), \quad \alpha > 0, \text{ p.p.} \end{cases}$$

On désire donner un procédé d'approximation de la solution  $u(x, t)$  du problème suivant (posé ci-après de façon précise):

$$(1.2) \quad - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t),$$

où  $f$  est une fonction donnée dans  $\Omega \times (0, \infty)$ .

Avec les conditions aux limites

$$(1.3) \quad \begin{cases} u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_{A(t)}} = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, +\infty), \end{cases}$$

où

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_{A(t)}} = \sum_{i,j} a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_i), \quad n \text{ normale à } \Gamma \text{ extérieure à } \Omega,$$

et la condition initiale

$$(1.4) \quad u(x, 0) = 0.$$

Posons maintenant ce problème en toute rigueur.

On introduit comme au Chapitre I, n° 1, l'espace  $V$  des  $u \in H^1(\Omega)$  tels que  $u = 0$  sur  $\Gamma_1$ . De façon générale, si  $\chi$  est un espace de Banach, de norme  $\|f\|_\chi$ , on désigne par  $L^2(a, b; \chi)$  l'espace des (classes de) fonction  $t \rightarrow f(t)$  mesurables dans  $(a, b)$  à valeurs dans  $\chi$ , telles que

$$\int_a^b \|f(t)\|_\chi^2 dt < \infty ;$$

muni de la norme  $\left(\int_a^b \|f(t)\|_\chi^2 dt\right)^{1/2}$  c'est un espace de Banach (et un espace de Hilbert si  $\chi$  est un espace de Hilbert).

On montre (cf. Lions [1], chap. IV et VI) qu'il existe une fonction  $u$  et une seule telle que

$$(1.5) \quad u \in L^2(0, T; V) \quad \text{pour tout } T \text{ fini,}$$

et qui vérifie

$$(1.6) \quad \begin{cases} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega \times (0, \infty)} a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x, t) dx dt - \int_{\Omega \times (0, \infty)} u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dx dt \\ = \int_{\Omega \times (0, \infty)} f(x, t) \overline{\varphi(x, t)} dx dt \end{cases}$$

pour toute fonction  $\varphi$  telle que

$$(1.7) \quad \begin{cases} \varphi \in L^2(0, T; V) \quad \text{pour tout } T \text{ fini,} & \varphi \text{ étant nulle pour } \\ & t \geq T_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) & \left(\text{i.e. } \int_{\Omega \times (0, \infty)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 dx dt < \infty\right). \end{cases}$$

La fonction  $f$  est donnée dans  $\Omega \times (0, \infty)$ , appartenant à  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  pour tout  $T$  fini.

La solution  $u$  de (1.5) (1.6) vérifie (1.2) au sens des distributions, la première condition (1.3) parce que  $u$  est à valeurs dans  $V$  et la deuxième condition (1.3) et (1.4) à un sens faible (intégrer par parties dans (1.6); voir détails dans Lions [1], Chap. IV à VI).

C'est en définitive la solution de (1.5) (1.6) que nous allons approcher.

Effectuons la *réduction préliminaire* suivante: par changement de  $u$  en  $e^{\lambda t}u$ , on peut toujours remplacer (1.6) par

$$(1.6)' \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega \times (0, \infty)} a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x, t) \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x, t)} dx dt + \lambda \int_{\Omega \times (0, \infty)} u \bar{\varphi} dx dt - \\ - \int_{\Omega \times (0, \infty)} u \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} dx dt = \int_{\Omega \times (0, \infty)} f \bar{\varphi} dx dt, \end{array} \right.$$

$\lambda$  étant un nombre  $> 0$  fixé.

## 1.2. NOTATIONS.

On introduit le réseau  $\mathcal{R}_n$  comme au Chap. I, n° 5 — puis une subdivision  $0, k, \dots, pk, \dots$  en  $t$ ; on désigne par  $\mathcal{R}_{n,k}$  le réseau de point générique,

$$P = \{M, pk\} = \{m_1 h_1, \dots, m_n h_n, pk\},$$

$m_i$ , entier de signe quelconque,  $p$  entier  $> 0$ .

On pose:

$$Q_{n,k} = [0, h_1] \times [0, h_2] \times \dots \times [0, h_n] \times [0, k].$$

On introduit les fonctions

$$(1.8) \quad A_{ij}(x, t; h) = \begin{cases} a_{ij}(x, t) & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ \delta_i^j & \text{dans } \Omega_1 \times (0, \infty), \\ |h| \delta_i^j & \text{dans } \Omega_2 \times (0, \infty), \end{cases}$$





1.4. LE RÉSULTAT PRINCIPAL.

On introduit la fonction  $w_h^k(x, t)$  par

$$(1.14) \quad w_h^k(x, t) = u_h^k(M, pk) \quad \text{dans} \quad \{M, pk\} + Q_{h,k}.$$

On va démontrer le

THÉORÈME 1.1.: *Lorsque  $h, k \rightarrow 0$ , la restriction  $(w_h^k)_\Omega$  de  $w_h^k$  à  $\Omega \times (0, \infty)$  converge dans  $L^2(\Omega \times (0, T))$  faible vers la solution  $u$  de (1.5) (1.6)', et ceci pour  $T$  fini quelconque.*

DÉMONSTRATION.

Pour simplifier l'écriture, on posera, au début de la démonstration,  $u_h^k = u$ .

Prenons dans (1.13),  $v_h(M) = u_h^k(M, pk) = u(M, pk)$ . Notons ceci :

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \{ [u(M, pk) - u(M, (p-1)k)] \overline{u(M, pk)} \} = \\ = |u(M, pk) - u(M, (p-1)k)|^2 + \\ + |u(M, pk)|^2 - |u(M, (p-1)k)|^2, \end{aligned}$$

de sorte que,

$$(1.15) \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{p_0} [u(M, pk) - u(M, (p-1)k)] \overline{u(M, pk)} \geq 0$$

quel que soit  $p_0$ .

On note maintenant que (cf. Chap. I, n° 5):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \sum_{i,j} \tilde{A}_{ij}(M, pk; h, k) \nabla_j u(M, pk) \overline{\nabla_i u(M, pk)} h_1 \dots h_n k \geq \\ \geq \alpha_1 \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \sum_j |\nabla_j u(M, pk)|^2 \operatorname{mes}((\Omega \cup \Omega_1) \cap \{M + Q_h\}) k + \\ + |h| \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \sum_j |\nabla_j u(M, pk)|^2 \operatorname{mes}(\Omega_2 \cap \{M + Q_h\}) \cdot k, \end{aligned}$$

où  $\alpha_1 = \inf. (\alpha, 1)$ ,

et que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_{M \in \mathcal{R}_\lambda} \tilde{A}_0(M; h) |u(M, pk)|^2 h_1 \dots h_n k &\geq \\ &\geq \lambda \sum_{M \in \mathcal{R}_\lambda} |u(M, pk)|^2 \operatorname{mes}(\Omega \cap \{M + Q_\lambda\}) \cdot k + \\ &+ 1/|h| \sum_{M \in \mathcal{R}_\lambda} |u(M, pk)|^2 \operatorname{mes}(\Omega_1 \cap \{M + Q_\lambda\}) \cdot k + \\ &+ |h| \sum_{M \in \mathcal{R}_\lambda} |u(M, pk)|^2 \operatorname{mes}(\Omega_2 \cap \{M + Q_\lambda\}) \cdot k. \end{aligned}$$

On note ensuite que

$$\sum_{M \in \mathcal{R}_\lambda} \frac{(h_1 \dots h_n)^2 k}{\operatorname{mes}(\Omega \cap \{M + Q_\lambda\})} |F_k^2(M, pk)|^2 \leq \int_{pk}^{(p+1)k} \int_{\Omega} |f(x, t)|^2 dx dt$$

de sorte que le deuxième membre de (1.13), lorsqu'on y remplace  $v_\lambda(M)$  par  $u(M, pk)$ , est majoré en module par

$$\left( \int_{pk}^{(p+1)k} \int_{\Omega} |f(x, t)|^2 dx dt \right)^{1/2} \times \left( \sum_{M \in \mathcal{R}_\lambda} |u(M, pk)|^2 \operatorname{mes}(\Omega \cap \{M + Q_\lambda\}) \cdot k \right)^{1/2}.$$

On en déduit que

$$(1.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=0}^{p_0} \sum_{M \in \mathcal{R}_\lambda} |u(M, pk)|^2 \operatorname{mes}(\Omega \cap \{M + Q_\lambda\}) \cdot k < \\ \leq \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{p_0 k} \int_{\Omega} |f(x, t)|^2 dx dt \end{array} \right.$$

puis

$$(1.17) \quad \sum_{p=0}^{p_0} \sum_{M \in \mathcal{R}_\lambda} |u(M, pk)|^2 \operatorname{mes}(\Omega_1 \cap \{M + Q_\lambda\}) \cdot k \leq c_1 |h|$$

(les  $c_i$  désignant des constantes, dépendant de

$$\int_0^{p_0 k} \int_{\Omega} |f(x, t)|^2 dx dt),$$

$$(1.18) \quad \sum_{p=0}^{p_0} \sum_{M \in \mathfrak{R}_h} |u(M, pk)|^2 \text{mes} (\Omega_2 \cap \{M + Q_h\}) k \leq c_2 |h| ,$$

$$(1.19) \quad \sum_{p=0}^{p_0} \sum_{M \in \mathfrak{R}_h} \sum_j |\nabla_j u(M, pk)|^2 \text{mes} ((\Omega \cup \Omega_1) \cap \{M + Q_h\}) \cdot k \leq c_3 ,$$

$$(1.20) \quad \sum_{p=0}^{p_0} \sum_{M \in \mathfrak{R}_h} \sum_j |\nabla_j u(M, pk)|^2 \text{mes} (\Omega_2 \cap \{M + Q_h\}) k \leq C_4 / |h| .$$

Ceci vaut quel que soit  $p_0$  fini.

On introduit maintenant les fonctions suivantes :

$$(1.21) \quad w_h^k(x, t) = u_h^k(M, pk) (= u(M, pk)) \text{ dans } \{M, pk\} + Q_{hk} ,$$

$$(1.22) \quad w_{h,i}^k(x, t) = \nabla_i u_h^k(M, pk) (= \nabla_i u(M, pk)) \text{ dans } \{M, pk\} + Q_{hk} .$$

Il résulte des relations (1.16) à (1.20) que :

$$(1.16)' \quad \int_{\Omega \times (0, \tau)} |w_h^k|^2 dx dt \leq c_5 ,$$

$$(1.17)' \quad \int_{\Omega \times (0, \tau)} |w_h^k|^2 dx dt \leq c_5 |h| ,$$

$$(1.18)' \quad \int_{(\Omega_2 \times (0, \tau))} |w_h^k|^2 dx dt \leq c_5 / |h| ,$$

$$(1.19)' \quad \int_{(\Omega \cup \Omega_1) \times (0, \tau)} \sum_j |w_{h,i}^k|^2 dx dt \leq c_5 ,$$

$$(1.20)' \quad \int_{\Omega_2 \times (0, \tau)} \sum_j |w_{h,i}^k|^2 dx dt \leq c_5 / |h| ;$$

tout ceci pour  $T$  fini quelconque.

On en déduit ceci : de toute suite  $h^{(n)} \rightarrow 0$ ,  $k^{(n)} \rightarrow 0$ , on peut extraire une suite  $h^{(\beta)} = h'$ ,  $k^{(\beta)} = k'$ , telle que

$$(1.23) \quad w_{h'}^{k'} \rightarrow w \quad \text{dans} \quad L^2((\Omega \cup \Omega_1 \cup \tilde{\Gamma}_1) \times (0, T)) \text{ faible,}$$

$$(1.24) \quad w = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_1 \times (0, T) ,$$

$$(1.25) \quad w_{h',i}^{k'} \rightarrow w_i \quad \text{dans} \quad L^2((\Omega \cup \Omega_1 \cup \tilde{\Gamma}_1) \times (0, T)) \text{ faible.}$$

On vérifie, de la même façon qu'au Lemme 5.1, Chap. I, que

$$(1.26) \quad \begin{cases} w_i = \frac{\partial w}{\partial x_i} & \text{dans l'ouvert } (\Omega \cup \overset{\circ}{I}_1 \cup \Omega_1) \times ]0, T[ , \\ T & \text{fini quelconque.} \end{cases}$$

Par conséquent, avec les notations du point 1.1:

$$(1.27) \quad w \in L^2(0, T; V) \quad \text{pour tout } T \text{ fini.}$$

Soit maintenant une fonction  $\varphi$  ayant les propriétés:

$$(1.28) \quad \varphi(x, t) = \varphi \text{ est une fois continûment différentiable à support compact dans } \mathbb{R}_x^n \times [0, \infty[ , \equiv 0 \text{ dans un voisinage de } \Omega_1 \times [0, \infty[ .$$

Posons:

$$\Phi_h^k(x, t) = \varphi(M, pk) \quad \text{dans } \{M, pk\} + Q_{h,k} ,$$

$$\Phi_{h,i}^k(x, t) = \frac{1}{h_i} [\varphi(M + h_i, pk) - \varphi(M, pk)] \quad \text{dans } \{M, pk\} + Q_{hk} ,$$

et

$$\Psi_h^k(x, t) = \frac{1}{k} [\varphi(M, (p+1)k) - \varphi(M, pk)] \quad \text{dans } \{M, pk\} + Q_{hk}$$

Nous prenons dans (1.13)  $v_h(M) = \varphi(M, pk)$ ; nous remplaçons les  $\tilde{A}_{ij}$ ,  $\tilde{A}_0$  par leurs valeurs (1.10), (1.11), et nous sommes de  $p = 1$  à  $p = p_0$ ; il vient:

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{p_0} \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \sum_{ij} \int_{\{M, pk\} + Q_{hk}} A_{ij}(x, t; h) \nabla_j u_i^k(M, pk) \overline{\varphi(M, pk)} \, dx \, dt + \\ & + \sum_{p=1}^{p_0} \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \int_{\{M, pk\} + Q_{hk}} A_0(x; h) u_0^k(M, pk) \overline{\varphi(M, pk)} \, dx \, dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{p=0}^{p_0-1} \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \int_{\{M, \rho k\} + Q_{hk}} B_0(x; h) u_h^k(M, \rho k) \frac{\overline{\varphi(M, \rho k)} - \overline{\varphi(M, (p+1)k)}}{k} dx dt \\
 & + \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \tilde{B}_0(M; h) u_h^k(M, p_0 k) \overline{\varphi(M, p_0 k)} h_1 \dots h_n = \\
 & = \sum_{p=0}^{p_0} \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \int_{\Omega \cap (\{M, \rho k\} + Q_{hk})} f(x, t) \overline{\varphi(M, \rho k)} dx dt .
 \end{aligned}$$

On choisit  $p_0$  assez grand pour que  $\varphi(M, p_0 k) = 0$  pour tout  $M$  (ce qui est loisible puisque  $\varphi$  est à support compact). Utilisant les fonctions  $\Phi_h^k$ ,  $\Phi_{h,i}^k$  et  $\Psi_h^k$ , il vient :

$$(1.29) \left\{ \begin{aligned}
 & \sum_{ij} \int_{\mathbb{R}^n \times (0, \infty)} A_{ij}(x, t; h) w_{h,i}^k(x, t) \overline{\Phi_{h,i}^k(x, t)} dx dt + \\
 & + \int_{\mathbb{R}^n \times (0, \infty)} A_0(x; h) w_h^k(x, t) \overline{\Phi_h^k(x, t)} dx dt - \\
 & - \int_{\mathbb{R}^n \times (0, \infty)} B_0(x; h) w_h^k(x, t) \overline{\Psi_h^k(x, t)} dx dt = \int_{\Omega \times (0, \infty)} f(x, t) \overline{\Phi_h^k(x, t)} dx dt .
 \end{aligned} \right.$$

On utilise (1.29) avec  $h = h'$ ,  $k = k'$ , et on passe à la limite. Comme  $\varphi$  est nulle dans un voisinage de  $\Omega_1 \times (0, \infty)$ , la fonction  $\Phi_{h,i}^k$  sera également nulle sur  $\Omega_1 \times (0, \infty)$  pour  $|h|$  assez petit; alors

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^n \times (0, \infty)} A_{ij}(x, t; h) w_{h,i}^k(x, t) \overline{\Phi_{h,i}^k(x, t)} dx dt = \\
 & = \int_{\Omega \times (0, \infty)} a_{ij}(x, t) w_{h,i}^k(x, t) \overline{\Phi_{h,i}^k(x, t)} dx dt + \\
 & + |h| \int_{\Omega_1 \times (0, \infty)} w_{h,i}^k(x, t) \overline{\Phi_{h,i}^k(x, t)} dx dt .
 \end{aligned}$$

Utilisant (1.20'), on voit que la deuxième intégrale est  $o(|h|^{1'2})$ ; comme  $\varphi$  est à support compact, la première intégrale est en

fait étendue à  $\Omega \times (0, T)$ ,  $T$  fini; de (1.25), (1.26) et de ce que  $\Phi_{h',t}^{k'} \rightarrow \partial\varphi/\partial x_i$  dans  $L^2(\Omega \times (0, T))$  fort, il résulte que

$$(1.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathbb{R}^n \times (0, \infty)} A_{i,j}(x, t; h') w_{h',t}^{k'}(x, t) \overline{\Phi_{h',t}^{k'}} dx dt \rightarrow \\ \rightarrow \int_{\Omega \times (0, \infty)} a_{i,j}(x, t) \frac{\partial w}{\partial x_j} \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}} dx dt . \end{array} \right.$$

Ensuite, toujours pour  $|h'|$  assez petit,

$$(1.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathbb{R}^n \times (0, \infty)} A_0(x; h') w_{h',t}^{k'}(x, t) \overline{\Phi_{h',t}^{k'}} dx dt = \\ = \lambda \int_{\Omega \times (0, \infty)} w_{h',t}^{k'}(x, t) \overline{\Phi_{h',t}^{k'}} dx dt + O(|h'|^{1/2}) \rightarrow \\ \rightarrow \lambda \int_{\Omega \times (0, \infty)} w(x, t) \overline{\varphi(x, t)} dx dt . \end{array} \right.$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \times (0, \infty)} B_0(x; h') w_{h',t}^{k'}(x, t) \overline{\Psi_{h',t}^{k'}} dx dt &= \\ &= \int_{\Omega \times (0, \infty)} w_{h',t}^{k'}(x, t) \overline{\Psi_{h',t}^{k'}} dx dt + O(|h'|^{1/2}) \end{aligned}$$

et comme  $\Psi_{h',t}^{k'} \rightarrow (\partial\varphi/\partial t)$  dans  $L^2(\Omega \times (0, T))$  fort, on a :

$$(1.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathbb{R}^n \times (0, \infty)} B_0(x; h') w_{h',t}^{k'}(x, t) \overline{\Psi_{h',t}^{k'}} dx dt \rightarrow \\ \rightarrow \int_{\Omega \times (0, \infty)} w(x, t) \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}(x, t) dx dt . \end{array} \right.$$

Utilisant (1.30), (1.31), (1.32) dans (1.29) (pour  $h = h'$ ,  $k = k'$ )

on obtient:

$$(1.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,j} \int_{\Omega \times (0, \infty)} a_{ij}(x, t) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx dt + \lambda \int_{\Omega \times (0, \infty)} w \bar{\varphi} dx dt - \\ - \int_{\Omega \times (0, \infty)} w \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} dx dt = \int_{\Omega \times (0, \infty)} f \bar{\varphi} dx dt \end{array} \right.$$

et ceci pour toute fonction  $\varphi$  satisfaisant à (1.28).

Par passage à la limite on en déduit que (1.33) a lieu pour toute fonction  $\varphi$  satisfaisant à (1.7); d'après l'unicité de la solution de (1.6), on en déduit que  $w = u$ , ce qui achève la démonstration du Théorème 1.1.

1.5. Comme à la remarque 5.3, Chap. I, n° 5, on peut également se ramener au cas où  $\Omega_2$  est borné, les conditions aux limites sur la frontière de  $\Omega_2$  étant celles de Dirichlet.

1.6. On peut considérer des pas variables dans le temps (cf. aussi Douglas-Gallie [1]); il n'y a de complications nouvelles que d'écriture — Même chose d'ailleurs pour les variables d'espace et les résultats du Chapitre I.

1.7. Voici l'analogie « continu » du Théorème 1.1.

Désignons par  $u_\varepsilon(x, t) = u_\varepsilon$  la solution du problème suivant:

$$(1.34) \quad u_\varepsilon \in L^2(0, T; H^1(R^n)) \quad \text{pour tout } T \text{ fini,}$$

$$(1.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,j} \int_{R^n \times (0, \infty)} A_{ij}(x, t; \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} dx dt + \int_{R^n \times (0, \infty)} A_0(x, t; \varepsilon) u_\varepsilon \bar{\varphi} dx dt - \\ - \int_{R^n \times (0, \infty)} B_0(x, t; \varepsilon) u_\varepsilon \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} dx dt = \int_{\Omega \times (0, \infty)} f \bar{\varphi} dx dt, \end{array} \right.$$

pour toute fonction  $\varphi$  telle que  $\varphi \in L^2(0, T; H^1(R^n))$  pour tout  $T$  fini,  $\varphi$  étant nulle pour  $t \geq T_0$ , et  $[d\varphi/dt] \in L^2(0, T; L^2(R^n))$ .

Dans ces condition:

**THÉORÈME 1.2.:** *Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la restriction  $(u_\varepsilon)_\Omega$  de  $u_\varepsilon$  à  $\Omega \times (0, \infty)$  converge dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  faible vers la solution  $u$  de (1.5), (1.6)', et ceci pour tout  $T$  fini.*



Dans le cas où  $\Gamma_1 = \Gamma$ , ce résultat a quelque analogie avec H. Yamabe [1].

1.8. Le même genre de méthodes s'applique aux problèmes analogues mais dans des ouverts *non cylindriques* (cf. Lions [3]) pour les conditions aux limites de Dirichlet.

Notons aussi que des résultats analogues aux précédents sont valables pour *tous les problèmes d'évolution associés aux problèmes considérés au Chapitre I*. On obtient ainsi par exemple un procédé d'approximation convergent pour la solution de

$$\begin{aligned} \Delta^2 u + \frac{\partial u}{\partial t} &= f \\ u, \frac{\partial u}{\partial n} &\text{ nuls sur } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ \Delta u, \frac{\partial \Delta u}{\partial n} &\text{ nuls sur } \Gamma_2 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Tout ceci se généralise pour des opérateurs (ou des systèmes) paraboliques d'ordre quelconque en  $x$ .

## 2. Méthode semi-discrète.

2.1. On introduit cette fois (les données et les notations sont les mêmes que dans le n° précédent) les fonctions

$$(2.1) \quad \tilde{A}_{ij}(M, t; h) = \frac{1}{h_1 \dots h_n} \int_{M+Q_h} A_{ij}(x, t; h) dx$$

qui sont mesurables en  $t$ .

On désigne par  $u_n(M, t)$  la solution du système

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{M \in \mathcal{R}_h} \tilde{B}_0(M; h) \left( \frac{d}{dt} u_n(M, t) \right) \overline{v_n(M)} + \\ &+ \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \tilde{A}_0(M; h) u_n(M, t) \overline{v_n(M)} + \\ &+ \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \sum_{i,j} \tilde{A}_{ij}(M, t; h) \nabla_i u_n(M, t) \overline{\nabla_j v_n(M)} = \sum_{M \in \mathcal{R}_h} F_n(M, t) \overline{v_n(M)} \end{aligned} \right.$$

avec

$$(2.3) \quad u_h(M, 0) = 0 \quad \text{pour tout } M,$$

où  $v_h(M) \in L^2(\mathcal{R}_h)$ ,  $u_h(M, t) \in L^2(\mathcal{R}_h)$  et où

$$(2.4) \quad f_h(M, t) = \frac{1}{h_1 \dots h_n} \int_{\Omega \cap \{M + Q_h\}} f(x, t) dx.$$

REMARQUE 2.1.:

Le système (2.2) (2.3) est un système infini d'équations différentielles en  $t$ , admettant une solution unique avec  $u_h(M, t) \in L^2(\mathcal{R}_h)$ . Si l'on se ramène au cas où  $\Omega_2$  est borné (cf. point 1.5 du n° précédent), on aura un système fini d'équations différentielles en  $t$ .

On introduit la fonction

$$(2.5) \quad w_h(x, t) = u_h(M, t) \quad \text{dans } M + Q_h.$$

On va démontrer le

THÉORÈME 2.1.: Lorsque  $h \rightarrow 0$ , la restriction  $(w_h)_\Omega$  de  $w_h$  à  $\Omega \times (0, \infty)$  converge dans  $L^2(\Omega \times (0, T))$  faible vers la solution  $u$  de (1.5) (1.6)' (n° 1), et ceci pour  $T$  fini quelconque.

DÉMONSTRATION:

Notons que

$$\sum_{M \in \mathcal{R}_h} (h_1 \dots h_n)^2 \frac{1}{\text{mes}(\Omega \cap \{M + Q_h\})} |F_h(M, t)|^2 \leq \int_{\Omega} |f(x, t)|^2 dx;$$

si nous prenons dans (2.2)

$$v_h(M) = u_h(M, t)$$

et que nous multiplions par  $h_1 \dots h_n$ , nous obtenons pour le deuxième membre la majoration

$$\left( \int_{\Omega} |f(x, t)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \sum_{M \in \mathcal{R}_h} |u_h(M, t)|^2 \text{mes}(\Omega \cap \{M + Q_h\}) \right)^{1/2}.$$

Nous prenons la partie réelle des deux membres et intégrons de 0 à  $T$ ; il vient pour le premier membre:

$$\begin{aligned}
 (1/2) \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \tilde{B}_0(M, h) |u_h(M, T)|^2 h_1 \dots h_n + \\
 + \int_0^T \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \tilde{A}_0(M; h) h_1 \dots h_n |u_h(M, t)|^2 dt + \\
 + \int_0^T \operatorname{Re} \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \sum_{i,j} \tilde{A}_{i,j}(M, t; h) \nabla_j u_h(M, t) \overline{\nabla_i u_h(M, t)} h_1 \dots h_n dt
 \end{aligned}$$

et l'on en déduit

$$(2.6) \quad \int_0^T \sum_{M \in \mathcal{R}_h} |u_h(M, t)|^2 \operatorname{mes}(\Omega \cap \{M + Q_h\}) dt \leq c_1,$$

$$(2.7) \quad \int_0^T \sum_{M \in \mathcal{R}_h} |u_h(M, t)|^2 \operatorname{mes}(\Omega_1 \cap \{M + Q_h\}) dt \leq c_2 |h|,$$

$$(2.8) \quad \int_0^T \sum_{M \in \mathcal{R}_h} |u_h(M, t)|^2 \operatorname{mes}(\Omega_2 \cap \{M + Q_h\}) dt \leq c_3 |h|,$$

$$(2.9) \quad \int_0^T \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \sum_j |\nabla_j u_h(M, t)|^2 \operatorname{mes}((\Omega \cup \Omega_1) \cap \{M + Q_h\}) dt \leq c_4,$$

$$(2.10) \quad \int_0^T \sum_{M \in \mathcal{R}_h} \sum_j |\nabla_j u_h(M, t)|^2 \operatorname{mes}(\Omega_2 \cap \{M + Q_h\}) dt \leq c_5 |h|,$$

les  $c_i$  étant des constantes dépendant de  $T$ .

Si l'on introduit  $w_{h,i}(x, t)$  par

$$(2.11) \quad w_{h,i}(x, t) = \nabla_j u_h(M, t) \quad \text{dans} \quad M + Q_h,$$

on a donc

$$(2.6)' \quad \int_{\Omega \times (0, T)} |w_h(x, t)|^2 dx dt \leq c_1,$$

$$(2.7)' \quad \int_{\Omega_1 \times (0, T)} |w_h(x, t)|^2 dx dt \leq c_2 |h|,$$

$$(2.8)' \quad \int_{\Omega_2 \times (0, T)} |w_h(x, t)|^2 dx dt \leq c_3 |h|,$$

$$(2.9)' \quad \int_{(\Omega \cup \Omega_1) \times (0, T)} |w_{h,i}(x, t)|^2 dx dt \leq c_1,$$

$$(2.10)' \quad \int_{\Omega_2 \times (0, T)} |w_{h,i}(x, t)|^2 dx dt \leq c_5 |h|.$$

On raisonne alors comme au n° précédent. De toute suite  $h^{(\alpha)}$  tendant vers 0 on peut extraire une suite  $h^{(\beta)} = h'$  telle que

$w_{h'} \rightarrow w$  dans  $L^2((\Omega \cup \Omega_1) \times (0, T))$  faible,  $T$  fini quelconque,  
 $w_{h',j} \rightarrow w_j$  dans  $L^2((\Omega \cup \Omega_1) \times (0, T))$  faible.

avec

$$w = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_1 \times (0, T).$$

On vérifie encore que

$$w_j = \frac{\partial w}{\partial x_j}.$$

On prend dans (2.2)  $v_h(M) = \varphi(M, t)$ ,  $\varphi$  étant donnée avec (1.28) (n° précédent), et on termine comme au n° précédent.

2.2. Le même genre de méthode s'applique à tous les problèmes d'évolution associés aux problèmes considérés au chapitre I.

## BIBLIOGRAPHIE

- J. DOUGLAS, Jr. [1]: *A survey of Numerical Methods for parabolic differential equations. Advances in Computers - Vol. II 1961.* p. 1-52.
- J. DOUGLAS, Jr. et T. M. GALLIE [1]: *Variable time steps in the solution of the heat equation by a difference equation.* Proc. Amer. Math. Soc. (1955), pp. 787-793.
- HARDY-LITTLEWOOD-POLYA [1]: *Inequalities.* Cambridge Univ. Press. 1934.
- O. A. LADYZENSKAYA [1]: *Problèmes mixtes pour les équations hyperboliques.* Moscou (1953).
- , [2]: *Sur la solution des équations opérationnelles non stationnaires.* Mat. Sbornik., t. 39 (81) (1956), pp. 491-524.
- , [3]: *Sur les équations opérationnelles non stationnaires.* Mat. Sbornik., t. 45 (87) (1958), pp. 123-158.
- , [4]: *La méthode des différences finies dans la théorie des équations aux dérivées partielles.* Ouspéhi Mat. Nauk., t. XII (77) (1957), pp. 123-148.
- J. L. LIONS [1]: *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites.* Springer, Collection Jaune, t. 111, 1961.
- , [2]: *Problèmes aux limites en théorie des distributions.* Acta Math., t. 94 (1955), pp. 13-153.
- , [3]: *Sur les problèmes mixtes pour certains systèmes paraboliques dans des ouverts non cylindriques,* Annales Institut Fourier, 7 (1957), pp. 143-182.
- J. L. LIONS et E. MAGENES [1]: *Problèmes aux limites non homogènes, (I), (III), (IV), (V), ...* Annali Scuola Normale Sup. di Pisa, à partir de 1960; (II) Annales Inst. Fourier, t. 11 (1961), p. 137-178.
- W. LITTMAN [1]: *Résolution du problème de Dirichlet par la méthode des différences finies.* C. R. Acad. Sc. Paris., t. 247 (1958), pp. 2270-2272.
- G. PROUSE [1]: *Sulla risoluzione del problema misto...* Annali di Mat., Vol. XLVI (1958), p. 313-342.
- , [2]: *Sul problema misto per l'equazione quasi-lineare delle onde.* Annali di Mat., Vol. LII (1960), p. 47-78.
- L. SCHWARTZ [1]: *Théorie des distributions.* Paris, Hermann, t. I (1950), t. II (1951).
- S. L. SOBOLEV [1]: *Applications de l'Analyse fonctionnelle à la Physique Mathématique.* Moscou, Léninegrad (1950).
- H. YAMABE [1]: *Kernel functions of diffusion equations (I).* Osaka Math. Journal, Vol. IX (1957), pp. 201-214.