RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI ZACHER

Sui gruppi risolubili finiti col reticolo dei sottogruppi di composizione dotato di duale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 32 (1962), p. 325-337

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1962__32__325_0>

SUI GRUPPI RISOLUBILI FINITI COL RETICOLO DEI SOTTOGRUPPI DI COMPOSIZIONE DOTATO DI DUALE

Nota (*) *di* GIOVANNI ZACHER (*a Padova*)

In una serie di lavori sul reticolo $L_c(\mathfrak{G})$ dei sottogruppi di composizione di un gruppo finito $\mathfrak{G}$ ([2], [3], [4], [5]), Curzio ha tra l'altro determinato, nell'ambito dei gruppi supersolubili finiti privi di sottogruppi di Sylow ciclici, i gruppi con il reticolo $L_c(\mathfrak{G})$ autoduale.

Lo scopo della Nota presente, e di una successiva, è di estendere in due direzioni lo studio iniziato dal Curzio in [5]. Precisamente di sostituire alla nozione di automorfismo duale quella più generale di isomorfismo duale tra i reticoli dei sottogruppi di composizione di due gruppi $\mathfrak{G}$ e $\overline{\mathfrak{G}}$, e di condurre lo studio nella classe dei gruppi risolubili finiti.

Il risultato centrale della presente Nota è costituito dal teorema 1, che permette di ricondurre la caratterizzazione dei gruppi risolubili finiti $\mathfrak{G}$ che hanno il reticolo $L_c(\mathfrak{G})$ dualmente isomorfo al reticolo dei sottogruppi di composizione di un gruppo risolubile finito $\overline{\mathfrak{G}}$, a quella dei gruppi supersolubili. Ed in una Nota successiva mi propongo di portar a termine la caratterizzazione di questi ultimi.

Le considerazioni dei nn. 1 e 2 sono esposte a parte per conseguire una maggior chiarezza nella successiva deduzione (n. 3) del risultato centrale di questo lavoro.

(*) Pervenuta in redazione il 5 maggio 1962.
Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

Sia detto una volta per sempre che *tutti* i gruppi in considerazione nel presente lavoro sono di *ordine finito.*

1. - È noto [1]) che un reticolo modulare complementato L di dimensione finita è semplice (cioè privo di relazioni di congruenza proprie) se e solo se detti a e b due atomi qualunque di L, l'ideale principale generato da $c = a \cup b$ risulta un reticolo irriducibile. Sia ora $\mathfrak{G}$ un gruppo il cui reticolo $L_c(\mathfrak{G})$ dei sottogruppi di composizione è un reticolo modulare complementato semplice. Allora se $L_c(\mathfrak{G})$ contiene due atomi distinti $\mathfrak{N}_1$ ed $\mathfrak{N}_2$, risulta $\mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_2$ ed il reticolo $L_c(\mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_2)$ è irriducibile se e solo se $\mathfrak{N}_1$ ed $\mathfrak{N}_2$ hanno per ordine un medesimo numero primo p. Ne segue che $\mathfrak{G}$ dovrà essere o un gruppo semplice o un p-gruppo abeliano elementare. Il viceversa è pure immediato. Inoltre osserviamo che se $\mathfrak{G}$ è un p-gruppo abeliano elementare non ciclico, $L_c(\mathfrak{G})$ individua $\mathfrak{G}$ a meno di un isomorfismo. Riassumendo possiamo dunque enunciare la proposizione

I) **Un gruppo $\mathfrak{G}$ ha il reticolo $L_c(\mathfrak{G})$ modulare complementato semplice se e solo se $\mathfrak{G}$ è un gruppo semplice o un p-gruppo abeliano elementare. Ed $L_c(\mathfrak{G})$ individua $\mathfrak{G}$ se (e solo se) la lunghezza del reticolo $L_c(\mathfrak{G})$ è non minore di 2.**

II) **Sia $L_c(\mathfrak{G}) = L_c(\mathfrak{G}_1) \times L_c(\mathfrak{G}_2)$ con $\mathfrak{G}_1$ e $\mathfrak{G}_2$ due sottogruppi normali convenienti di $\mathfrak{G}$. Allora $L_c(\mathfrak{G})$ è dualmente isomorfo al reticolo $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$ dei sottogruppi di composizione di un gruppo $\overline{\mathfrak{G}}$ se e solo se $\overline{\mathfrak{G}}$ contiene due sottogruppi normali $\overline{\mathfrak{G}}_1$ e $\overline{\mathfrak{G}}_2$ con $L_c(\overline{\mathfrak{G}}) = L_c(\overline{\mathfrak{G}}_1) \times L_c(\overline{\mathfrak{G}}_2)$ ed $L_c(\mathfrak{G}_i)$ dualmente isomorfo ad $L_c(\overline{\mathfrak{G}}_i)$ $(i = 1, 2)$.**

Sia $L_c(\mathfrak{G})$ dualmente isomorfo ad $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$. Allora $L_c(\mathfrak{G})$ è isomorfo al reticolo duale $\check{L}_c(\overline{\mathfrak{G}})$ di $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$, per cui è $\check{L}_c(\overline{\mathfrak{G}}) = L'_1 \times L'_2$ con L'_i isomorfo ad $L_c(\mathfrak{G}_i)$.

Ma $L_c(\mathfrak{G}) = \check{L}'_1 \times \check{L}'_2$ comporta che sia $L_c(\overline{\mathfrak{G}}) = L_c(\overline{\mathfrak{G}}_1) \times L_c(\overline{\mathfrak{G}}_2)$ con $\overline{\mathfrak{G}}_1$ e $\overline{\mathfrak{G}}_2$ sottogruppi normali convenienti di $\overline{\mathfrak{G}}$, con $L_c(\overline{\mathfrak{G}}_i)$ isomorfo ad $\check{L}'_i$ [2]). Viceversa se $L_c(\mathfrak{G}_i)$ è dualmente isomorfo ad $L_c(\overline{\mathfrak{G}}_i)$, da $L_c(\mathfrak{G}) = L_c(\mathfrak{G}_1) \times L_c(\mathfrak{G}_2)$ ed $L_c(\overline{\mathfrak{G}}) =$

---

[1]) Vedasi ad es. [1] pp. 120-121.

[2]) Vedasi Satz 1 in [11]; nel caso risolubile pure teorema III in [4].

$= L_c(\overline{\mathfrak{G}}_1) \times L_c(\overline{\mathfrak{G}}_2))$ segue pure che $L_c(\mathfrak{G})$ è dualmente isomorfo ad $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$.

III) Dati i gruppi $\mathfrak{G}$ e $\overline{\mathfrak{G}}$, se $L_c(\mathfrak{G})$ risulta dualmente isomorfo ad $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$, allora i reticoli $L_c(\mathfrak{G})$ ed $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$ sono modulari.

Infatti è noto [8]) che il reticolo $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$ è un reticolo sottomodulare qualunque sia il gruppo $\mathfrak{G}$. Ma poichè $L_c(\mathfrak{G})$ è dualmente isomorfo al reticolo $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$, risulta $L_c(\mathfrak{G})$ pure sopramodulare, e quindi, nel nostro caso, anche modulare, e modulare quindi anche $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$. E passiamo a dimostrare che

IV) Sia $\mathfrak{G}$ un gruppo risolubile e sia $L_c(\mathfrak{G})$ dualmente isomorfo ad $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$, con $\overline{\mathfrak{G}}$ pure gruppo risolubile. Sia $\mathfrak{N}$ il sottogruppo di $\mathfrak{G}$ unione di tutti gli atomi di $L_c(\mathfrak{G})$ che hanno per ordine un medesimo numero primo p. Allora se φ è un fissato isomorfismo duale tra $L_c(\mathfrak{G})$ ed $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$, risulta $\varphi(\mathfrak{N})$ un sottogruppo caratteristico di $\overline{\mathfrak{G}}$, e il gruppo $\overline{\mathfrak{G}}/\varphi(\mathfrak{N})$ è isomorfo ad $\mathfrak{N}$, per lo meno se $\mathfrak{N}$ non è ciclico.

Possiamo senz'altro supporre $\mathfrak{N} \supset 1$. $\varphi(\mathfrak{N})$ è allora intersezione di sottogruppi normali massimi di $\overline{\mathfrak{G}}$, e quindi è normale in $\overline{\mathfrak{G}}$. $L_c(\overline{\mathfrak{G}}/\varphi(\mathfrak{N}))$ è dualmente isomorfo ad $L_c(\mathfrak{N})$, e poichè $\mathfrak{N}$ è un p-gruppo abeliano elementare (prop. III) è $L_c(\overline{\mathfrak{G}}/\varphi(\mathfrak{N}))$ isomorfo ad $L_c(\mathfrak{N})$. Ma allora per la I, $\overline{\mathfrak{G}}/\varphi(\mathfrak{N})$ è certamente isomorfa ad $\mathfrak{N}$, se $\mathfrak{N}$ non è di ordine primo. E $\varphi(\mathfrak{N})$ in ogni caso, sempre per la I, viene a coincidere con il sottogruppo normale $\overline{\mathfrak{M}}$ di $\overline{\mathfrak{G}}$ intersezione di tutti i sottogruppi normali di $\overline{\mathfrak{G}}$ d'indice un medesimo numero primo q in $\overline{\mathfrak{G}}$, per cui $\overline{\mathfrak{M}} = \varphi(\mathfrak{N})$ è caratteristico in $\overline{\mathfrak{G}}$, ed è $q = p$ certamente se $\mathfrak{N}$ non è ciclico.

Corollario I: Dati i due gruppi risolubili $\mathfrak{G}$ e $\overline{\mathfrak{G}}$, supponiamo che esista un isomorfismo duale φ tra $L_c(\mathfrak{G})$ ed $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$. Allora se $1 = \mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{N}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{N}_t = \mathfrak{N}$ è una catena ascendente di sottogruppi normali di $\mathfrak{G}$, ove $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i-1}$ è definito come il massimo p-sottogruppo normale abeliano elementare di $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_{i-1}$, $\varphi(\mathfrak{N})$ è un sottogruppo caratteristico di $\overline{\mathfrak{G}}$.

Infatti basta applicare la prop. IV agli elementi della predetta catena.

---

[8]) Vedasi ad es. [10].

Rivolgiamo ora ancora la nostra attenzione ad un particolare reticolo L ed al suo duale $\check{L}$, le cui considerazioni ci serviranno nel seguito.

Diremo che un reticolo L è di tipo π, se L ha la seguente struttura: L è di lunghezza finita e l'elemento massimo I di L copre un solo elemento a, mentre l'ideale principale generato da a risulta un reticolo modulare complementato semplice.

Un reticolo $\check{L}$ lo diremo di tipo $\check{\pi}$, se è duale ad un reticolo L di tipo π.

Evidentemente $L\,(\check{L})$ è un reticolo irriducibile. Risulta inoltre

V) Un gruppo risolubile $\mathfrak{G}$ ha il reticolo $L_c(\mathfrak{G})$ di tipo π se e solo se $\mathfrak{G}$ è un gruppo ciclico d'ordine p^2, oppure l'ordine di $\mathfrak{G}$ è del tipo $(\mathfrak{G}) = p^\alpha q$, con p, q numeri primi distinti, $\alpha \geqslant 1$, normale il sottogruppo di Sylow $\mathfrak{G}_p$ relativo al numero primo p, $\mathfrak{G}_p$ abeliano elementare, ed il centro $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ di $\mathfrak{G}$ identico.

Sia $L_c(\mathfrak{G})$ reticolo di tipo π. Allora $\mathfrak{G}$ contiene un solo sottogruppo massimo $\mathfrak{N}$, quindi $\mathfrak{G}$ è irriducibile ed $\mathfrak{N}$ è abeliano elementare d'ordine p^α, per la prop. I. Escluso che $\mathfrak{G}$ sia ciclico d'ordine p^2, l'indice di $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$ sarà un numero primo q, diverso da p, e dunque $(\mathfrak{G}) = p^\alpha q$. Ed in questo caso pure il centro $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ è identico, visto che $\mathfrak{G}$ è irriducibile.

Il viceversa è pure immediato se si osserva che il gruppo $\mathfrak{G}$ ha un solo sottogruppo normale massimo.

V*) Un gruppo risolubile $\mathfrak{G}$ ha il reticolo $L_c(\mathfrak{G})$ di tipo $\check{\pi}$ se e solo se $\mathfrak{G}$ è o un gruppo ciclico d'ordine p^2, o un gruppo non abeliano d'ordine pq, con p, q numeri primi distinti, o il gruppo dei quaternioni.

Sia $L_c(\mathfrak{G})$ di tipo $\check{\pi}$, ed escludiamo che $\mathfrak{G}$ sia ciclico d'ordine p^2, o il gruppo dei quaternioni. Dalla struttura di $L_c(\mathfrak{G})$ segue che $\mathfrak{G}$ contiene un solo sottogruppo di composizione minimo $\mathfrak{N}$, e quindi è un sottogruppo normale $\mathfrak{N}$ di $\mathfrak{G}$ d'ordine primo q, e $\mathfrak{G}$ risulta irriducibile. Dovendo esserci $L_c(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$ un reticolo modulare complementato semplice, sarà $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ un p-gruppo elementare (prop. I) d'ordine p^α con $p \neq q$, avendo escluso che $\mathfrak{G}$ sia ciclico, o gruppo dei quaternioni. Quindi l'ordine $(\mathfrak{G})$ di $\mathfrak{G}$ è del tipo qp^α; poichè $\mathfrak{G}$ è irriducibile, con il sottogruppo di Sylow $\mathfrak{G}_q$ normale, deve essere $\alpha = 1$. Il viceversa è ovvio.

È ora facile vedere che

VI) Se $\mathfrak{G}$ è un gruppo risolubile con $L_c(\mathfrak{G})$ di tipo π ($\breve{\pi}$), allora esiste un gruppo risolubile $\overline{\mathfrak{G}}$ tale che $L_c(\mathfrak{G})$ sia dualmente isomorfo ad $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$ se e solo se $\mathfrak{G}$ è o ciclico d'ordine p^2, o non abeliano d'ordine pq, oppure il gruppo alterno su quattro oggetti (il gruppo dei quaternioni) nel qual caso $\overline{\mathfrak{G}}$ è il gruppo dei quaternioni (il gruppo alterno su quattro oggetti).

Infatti $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$ sarà un reticolo di tipo $\breve{\pi}$ (π), e per concludere basta tenere conto della V e V*.

VII) Se $\mathfrak{G}$ è un gruppo d'ordine p^α e se $L_c(\mathfrak{G})$ è isomorfo al reticolo $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$ di un gruppo $\overline{\mathfrak{G}}$, allora $\overline{\mathfrak{G}}$ ha pure ordine p^α, per cui i reticoli $L(\mathfrak{G})$, $L(\overline{\mathfrak{G}})$ dei sottogruppi di $\mathfrak{G}$ e $\overline{\mathfrak{G}}$ sono isomorfi, se $\mathfrak{G}$ non è ciclico o generalizzato dei quaternioni. Se $\mathfrak{G}$ è il gruppo generalizzato dei quaternioni, $\overline{\mathfrak{G}}$ è isomorfo a $\mathfrak{G}$, se $\overline{\mathfrak{G}}$ è risolubile, mentre se $\mathfrak{G}$ è ciclico, $\overline{\mathfrak{G}}$ è ciclico o gruppo d'ordine $r^\beta q^\gamma (\beta + \gamma = \alpha)$ a sottogruppi di Sylow ciclici e centro identico, ammesso sempre che $\overline{\mathfrak{G}}$ sia risolubile [4]).

Useremo induzione sull'ordine di $\mathfrak{G}$; se $\mathfrak{G}$ contiene almeno un sottogruppo massimo $\mathfrak{M}$, che non sia ciclico, nè generalizzato dei quaternioni, allora se φ è un isomorfismo strutturale tra $L_c(\mathfrak{G})$ ed $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$, $\varphi(\mathfrak{M})$ è un p-gruppo d'ordine $p^{\alpha-1}$, se p^α è l'ordine di $\mathfrak{G}$; ma allora $\varphi(\mathfrak{G}) = \overline{\mathfrak{G}}$ ha ordine p^α, perchè p-gruppo è il gruppo $\varphi(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})) = \overline{\mathfrak{G}}/\varphi(\Phi(\mathfrak{G}))$ (prop. I) che contiene $\varphi(\mathfrak{M})/\varphi(\Phi(\mathfrak{G}))$. In caso contrario, $\mathfrak{G}$ o è ciclico o generalizzato dei quaternioni se non è il gruppo quadrinomio. Se $\mathfrak{G}$ è ciclico, $L_c(\mathfrak{G})$ è una catena, e quindi $\overline{\mathfrak{G}}$ deve avere i sottogruppi di Sylow ciclici, essendo $\overline{\mathfrak{G}}$ risolubile con $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$ distributivo [6]). E dalla caratterizzazione data da Zassenhaus dei gruppi in questione è facile concludere con la tesi [7]). Se poi $\mathfrak{G}$ è generalizzato dei quaternioni tale è $\overline{\mathfrak{G}}$, supposto risolubile, come si vede usando induzione sull'ordine di $\mathfrak{G}$, dato che la cosa è vera se $\mathfrak{G}$ è il gruppo dei quaternioni (prop. V).

---

[4]) Questo teorema nel caso di $\overline{\mathfrak{G}}$ risolubile si trova già in [2].

[5]) Vedasi ad es. [13].

[6]) Vedasi [12].

[7]) Loc. cit. [5]).

VIII) Sia $\mathfrak{G}$ un p-gruppo d'ordine p^α e supponiamo che $L_c(\mathfrak{G})$ sia dualmente isomorfo al reticolo $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$ di un gruppo $\overline{\mathfrak{G}}$. Allora $L_c(\mathfrak{G})$ è autoduale, se $\mathfrak{G}$ non è il gruppo dei quaternioni. Se $\mathfrak{G}$ è il gruppo dei quaternioni, $\overline{\mathfrak{G}}$ è il gruppo alterno su quattro oggetti, supposto $\overline{\mathfrak{G}}$ risolubile; se $\mathfrak{G}$ è ciclico, $\overline{\mathfrak{G}}$ è p-gruppo ciclico, oppure d'ordine $r^\beta q^\gamma (\beta + \gamma = \alpha)$ a sottogruppi di Sylow ciclici e centro $\mathfrak{Z}(\overline{\mathfrak{G}})$ identico, se $\overline{\mathfrak{G}}$ è pure risolubile. Negli altri casi, $\overline{\mathfrak{G}}$ ha pure ordine p^α, con $L(\mathfrak{G})$ ed $L(\overline{\mathfrak{G}})$ isomorfi.

È intanto $L_c(\mathfrak{G})$ modulare (prop. III), ed inoltre è $L_c(\mathfrak{G}) = L(\mathfrak{G})$. Allora se $\mathfrak{G}$ non è Hamiltoniano, $L(\mathfrak{G})$ è autoduale. Se $\mathfrak{G}$ è Hamiltoniano, ma non dei quaternioni, è $\Phi(\mathfrak{G}) \subset \Omega(\mathfrak{G})$, se $\Omega(\mathfrak{G})$ indica il gruppo unione di tutti i sottogruppi d'ordine p di $\mathfrak{G}$, per cui per la prop. I, è $\overline{\mathfrak{G}}$ pure un 2-gruppo e quindi $L_c(\overline{\mathfrak{G}}) = L(\overline{\mathfrak{G}})$. Ma $L(\mathfrak{G})$ non è dotato di duale [8]). Se $\mathfrak{G}$ è il gruppo dei quaternioni, $\overline{\mathfrak{G}}$ è il gruppo alterno su quattro oggetti, ammesso $\overline{\mathfrak{G}}$ risolubile (prop. IV). Escluso che $\mathfrak{G}$ sia dei quaternioni, $L_c(\mathfrak{G})$ è dunque necessariamente autoduale e quindi $L_c(\mathfrak{G})$ è isomorfo ad $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$. E per concludere basta tener presente la prop. VII.

2. - Passiamo alla dimostrazione di alcuni lemmi.

LEMMA I: *Sia $\mathfrak{M}$ un gruppo d'ordine $p^\alpha q^\beta$, con p, q numeri primi distinti. I sottogruppi di Sylow di $\mathfrak{M}$ siano abeliani elementari, e normale sia il sottogruppo di Sylow $\mathfrak{M}_p$ relativo al numero primo p. Allora $L_c(\mathfrak{M})$ è dualmente isomorfo ad $L_c(\overline{\mathfrak{M}})$ con $\overline{\mathfrak{M}}$ gruppo risolubile se e solo se $\mathfrak{M}$ appartiene ad uno dei seguenti tipi di gruppi:*

a) abeliano

b) prodotto diretto di un gruppo non abeliano d'ordine pq $(p > q)$ per un gruppo abeliano elementare d'ordine $q^{\beta-1}$

c) prodotto diretto di un gruppo non abeliano d'ordine pq $(p > q)$, per un gruppo abeliano elementare d'ordine $p^{\alpha-1}$.

d) il gruppo alterno su quattro oggetti $\mathfrak{A}_4$.

Se $\mathfrak{M}$ appartiene al tipo a), anche $\overline{\mathfrak{M}}$ appartiene al tipo a). Se $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $\mathfrak{M}$ è abeliano, ed $\overline{\mathfrak{M}}$ è isomorfo ad $\mathfrak{M}$. Se $\mathfrak{M}$ appartiene al tipo b) e $\beta > 1$, $\overline{\mathfrak{M}}$ appartiene al tipo c) ed ha ordine $q^\beta r$ con r numero primo minore di q. Se $\mathfrak{M}$ appartiene al tipo c)

---

[8]) Vedasi [9].

ed $\alpha > 1$, $\overline{\mathfrak{M}}$ *appartiene al tipo b) ed ha ordine* sp^{α} *con* s *numero primo maggiore di* p. *Se* $\mathfrak{M}$ *appartiene al tipo d),* $\overline{\mathfrak{M}}$ *è il gruppo dei quaternioni.*

Dimostrazione: Se $\mathfrak{M}$ è abeliano, risulta $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p \times \mathfrak{M}_q$ ed è $L_c(\mathfrak{M}) = L_c(\mathfrak{M}_p) \times L_c(\mathfrak{M}_q)$ [9]). Ma allora anche $\overline{\mathfrak{M}}$ è abeliano se si tiene conto della prop. I e II e del fatto che $\overline{\mathfrak{M}}$ si è supposto risolubile. Sia $\alpha > 1$, $\beta > 1$ e φ un isomorfismo duale tra $L_c(\mathfrak{M})$ ed $L_c(\overline{\mathfrak{M}})$. Per la IV, $\varphi(\mathfrak{M}_p)$ è normale in $\overline{\mathfrak{M}}$ e per la I si ha $\mathfrak{M}_p \simeq \simeq \overline{\mathfrak{M}}/\varphi(\mathfrak{M}_p)$, $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_p \simeq \varphi(\mathfrak{M}_p)$, sicchè $\overline{\mathfrak{M}}$ ha ordine $p^{\alpha}q^{\beta}$ con $\varphi(\mathfrak{M}_p)$ q-gruppo di Sylow normale in $\overline{\mathfrak{M}}$. Facciamo ora vedere che una simile situazione comporta che $\mathfrak{M}$ sia abeliano, ed a tal fine useremo induzione sull'ordine di $\mathfrak{M}$. Indicando con $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M})$ il centro di $\mathfrak{M}$, dobbiamo dimostrare che $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$. Ragioniamo per assurdo supponendo $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}$, e pel momento $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}) \supset 1$. È allora $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \times \mathfrak{Z}(\mathfrak{M})$ e poichè $L_c(\mathfrak{Z}(\mathfrak{M})$ è dualmente isomorfo ad $L_c(\overline{\mathfrak{M}}/\varphi(\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}))$, risulta che $\mathfrak{F}$ e $\varphi(\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}))$ hanno lo stesso ordine $p^{\alpha-\gamma}q^{\beta-\delta}$, se $p^{\gamma}q^{\delta}$ è l'ordine di $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M})$. Ma $\gamma < \alpha$, $\delta < \beta$, quindi $\mathfrak{F}$ è abeliano per l'ipotesi d'induzione; assurdo. Sia dunque $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}) = 1$, e sia $\mathfrak{N}$ un sottogruppo normale minimo di $\mathfrak{M}$. Risulta $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}_p$. Se $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_p$, il centralizzante $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ di $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{M}$ coincide con $\mathfrak{N}$, essendo $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}) = 1$. Se $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}_p$, per $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ sono verificate le ipotesi d'induzione per cui $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ è abeliano. Se allora $\mathfrak{M}_q$ è un sottogruppo di Sylow di $\mathfrak{M}$ relativo al numero primo q, $\mathfrak{N} \cup \mathfrak{M}_q = \mathfrak{F}$ è un gruppo normale in $\mathfrak{M}$. Ne segue che il centralizzante di $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{M}$, deve ancora essere $\mathfrak{M}_p$, appunto perchè $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}) = 1$. Poichè $\mathfrak{N}$ è un sottogruppo normale minimo di $\mathfrak{M}$, il gruppo $\mathfrak{M}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_p \simeq \mathfrak{M}_q$ deve essere ciclico [10]), quindi l'ordine di $\mathfrak{M}$ è $p^{\alpha}q$. Se ora si tiene conto della V e VI e del fatto che $(\mathfrak{M}) = (\overline{\mathfrak{M}})$, ciò non è possibile. Non resta dunque da concludere che sia $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{M})$.

Se $\alpha = 1$, e se $\mathfrak{M}$ non è abeliano, $\mathfrak{M}$ è necessariamente del tipo *b*), ossia $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \times \mathfrak{Z}(\mathfrak{M})$ ove $\mathfrak{F}$ è un gruppo non abeliano d'ordine pq, e $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M})$ è un gruppo abeliano elementare d'ordine $q^{\beta-1}$. Se $\beta > 1$, per la I, IV e VIII, $\overline{\mathfrak{M}}$ ha ordine $q^{\beta}r$, in cui è normale il

---

[9]) Loc. cit. [8]).

[10]) Vedasi, ad es. [6] lemma 3,3.

sottogruppo di Sylow relativo al numero primo q, ed è abeliano elementare. Il gruppo $\mathfrak{F}$ è unico sottogruppo di composizione di ordine pq non abeliano in $\mathfrak{M}$ [11]), sicchè se φ è un isomorfismo duale tra $L_c(\mathfrak{M})$ ed $L_c(\overline{\mathfrak{M}})$, è necessariamente $\overline{\mathfrak{M}} = \varphi(\mathfrak{F}) \times \varphi(\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}))$ con $\varphi(\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}))$ gruppo non abeliano d'ordine q^r con $q > r$ e $\varphi(\mathfrak{F})$ gruppo d'ordine $q^{\beta-1}$, ossia $\overline{\mathfrak{M}}$ è di tipo c). Se $\beta = 1$, allora $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \times$ $\times\ \mathfrak{Z}(\mathfrak{M})$, ed escluso che $\mathfrak{M}$ sia abeliano, è $\mathfrak{F} \neq 1$ con $L_c(\mathfrak{F})$ reticolo di tipo π (prop. V). Ma allora $L_c(\mathfrak{F})$ ha duale solo se $\mathfrak{F}$ ha ordine pq, oppure è il gruppo alterno su quattro oggetti. Se $\alpha > 1$, il primo caso si tratta come sopra per concludere che $\overline{\mathfrak{M}}$ è di tipo b) d'ordine sp^α con s numero primo maggiore di p. Sia invece $\mathfrak{F}$ il gruppo alterno su quattro oggetti $\mathfrak{A}_4$. Dimostriamo che è $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}) = 1$. Infatti da $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}) \supset 1$, poichè $\mathfrak{A}_4$ è l'unico sottogruppo di composizione di $\mathfrak{M}$ isomorfo ad $\mathfrak{A}_4$ [11]), segue che $\overline{\mathfrak{M}} = \varphi(\mathfrak{A}_4) \times$ $\times\ \varphi(\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}))$ ed $\overline{\mathfrak{M}}$ risulta un gruppo Hamiltoniano (prop. I e IV), non isomorfo a quello dei quaternioni. Ma tale gruppo non ha il reticolo $L_c(\overline{\mathfrak{M}})$ dotato di duale (prop. VIII). È poi facile vedere che se $\mathfrak{M}$ è di tipo b), $L_c(\mathfrak{M})$ è dualmente isomorfo ad un gruppo di tipo c) e viceversa. E con ciò il lemma è completamente dimostrato.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente lemma fondamentale

LEMMA II: *Siano $\mathfrak{G}$ e $\overline{\mathfrak{G}}$ due gruppi risolubili con $L_c(\mathfrak{G})$ dualmente isomorfo ad $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$. Allora se gli eventuali 2-gruppi normali di $\mathfrak{G}$ sono ciclici, il gruppo $\mathfrak{G}$ è supersolubile.*

Per la dimostrazione, useremo di nuovo induzione sull'ordine di $\mathfrak{G}$.

Sia $\Phi(\mathfrak{G})$ il sottogruppo di Frattini di $\mathfrak{G}$. Se $\Phi(\mathfrak{G}) \supset 1$, il gruppo $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ è un gruppo privo di 2-gruppi normali non ciclici [12]). Ma allora per l'ipotesi d'induzione $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ è supersolubile, e quindi pure $\mathfrak{G}$ [13]). Sia dunque $\Phi(\mathfrak{G}) = 1$; allora il sottogruppo di Fitting $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ di $\mathfrak{G}$ (cioè il massimo sottogruppo speciale

---

[11]) Loc. cit. [5]).
[12]) Vedasi Satz 10 in [7].
[13]) Vedasi Satz 10 in [8].

normale di $\mathfrak{G}$), sarà prodotto diretto di p-gruppi abeliani elementari [14]). Se allora $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ è d'ordine pari, il sottogruppo di Sylow $\mathfrak{P}$ relativo al numero primo 2 di $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ è d'ordine 2, ed a $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ si applicano le ipotesi d'induzione, per cui $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ e quindi pure $\mathfrak{G}$ è supersolubile. Possiamo dunque supporre $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ d'ordine dispari. Facciamo ora vedere che se succede che comunque si fissi un sottogruppo di Sylow $\mathfrak{P}$ di $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ ha al più 2-gruppi normali ciclici, $\mathfrak{G}$ è supersolubile. Infatti se $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ ha almeno 2 sottogruppi di Sylow distinti $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, poichè $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_i$ è supersolubile, tale è pure $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{G}$. Sia invece $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ un p-gruppo $\mathfrak{P}$ d'ordine p^α; esiste in $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ un q-gruppo, $q \neq p$, normale abeliano elementare $\mathfrak{M}/\mathfrak{P}$, con $L_c(\mathfrak{M})$ dualmente isomorfo al reticolo dei sottogruppi di composizione di un gruppo risolubile (corollario I). Per il lemma I, e tenuto conto che $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ è un p-gruppo, sarà $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \times \mathfrak{Z}(\mathfrak{M})$ con $\mathfrak{F}$ gruppo non abeliano d'ordine pq, e $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M})$ p-gruppo abeliano d'ordine $p^{\alpha-1}$. $\mathfrak{F}$ è un sottogruppo caratteristico di $\mathfrak{M}$, e quindi il sottogruppo di Sylow normale $\mathfrak{F}_p$ di $\mathfrak{F}$ relativo al numero p è normale in $\mathfrak{G}$, ed a $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}_p$ si possono applicare le ipotesi d'induzione per cui $\mathfrak{G}$ è ancora supersolubile. Resta dunque da esaminare il caso che $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ abbia un sottogruppo di Sylow $\mathfrak{P}$, per cui $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ contenga 2-gruppi non ciclici. Il caso che in $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ non vi siano 2-gruppi abeliani elementari non ciclici comporta che in $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ esista un gruppo $\mathfrak{N}/\mathfrak{P}$ normale che sia dei quaternioni. Se $\mathfrak{M}/\mathfrak{P}$ è il centro di $\mathfrak{N}/\mathfrak{P}$, $L_c(\mathfrak{M})$ è dualmente isomorfo al reticolo dei sottogruppi di composizione di un gruppo risolubile. Pertanto è (lemma I) $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \times \mathfrak{Z}(\mathfrak{M})$ con $\mathfrak{F}$ gruppo non abeliano d'ordine $2p$, avendo escluso che $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ sia d'ordine pari; e il sottogruppo di Sylow $\mathfrak{F}_p$ relativo al numero primo p di $\mathfrak{F}$ è normale in $\mathfrak{G}$. Ora se a è un elemento d'ordine 2 di $\mathfrak{F}$, esso sarà contenuto in un 2-sottogruppo di Sylow $\mathfrak{N}_2$ di $\mathfrak{N}$ che è dei quaternioni, e nel gruppo $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_2 \cup \mathfrak{F}_p$, a è nel centro di $\mathfrak{F}$, quindi $\mathfrak{F}$ doveva essere abeliano: assurdo. In $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ esiste dunque un 2-gruppo abeliano elementare non ciclico $\mathfrak{M}/\mathfrak{P}$, con $L_c(\mathfrak{M})$ dualmente isomorfo al reticolo dei sot-

---

[14]) Loc. cit. [12]) Satz 12.

togruppi di composizione di un gruppo risolubile. Poichè $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ è d'ordine dispari, $\mathfrak{M}$ non può essere abeliano come dovrebbe essere pel lemma I. Quindi pure questo caso non può presentarsi, ed il lemma è completamente dimostrato.

Corollario II: Se $\mathfrak{G}$ è d'ordine dispari, $\mathfrak{G}$ è supersolubile.

Se $\mathfrak{G}$ è un p-gruppo, con $\Omega(\mathfrak{G})$, come già detto, si indicherà il sottogruppo di $\mathfrak{G}$ unione di tutti i gruppi minimi; ed $\Omega(\mathfrak{G})$ è abeliano elementare se $L(\mathfrak{G})$ è modulare. Premesso ciò, dimostriamo che

IX: Se $\mathfrak{G}$ è un gruppo risolubile dotato della seguente struttura: $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} \cup \mathfrak{G}_q$ con $\mathfrak{N}$ un sottogruppo proprio di Hall normale e $\mathfrak{G}_q$ un gruppo di Sylow di $\mathfrak{G}$ relativo al numero primo q; se $\Omega(\mathfrak{G}_q)$ è normale in $\mathfrak{G}$ e non è ciclico, allora $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{G}_q$, supposto che $L_c(\mathfrak{G})$ sia dualmente isomorfo al reticolo dei sottogruppi di composizione di un gruppo risolubile $\overline{\mathfrak{G}}$.

Sia φ un isomorfismo duale tra $L_c(\mathfrak{G})$ ed $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$. Il gruppo $\varphi(\mathfrak{N})$ risulta normale in $\overline{\mathfrak{G}}$ (corollario I) ed è $L_c(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$ dualmente isomorfo ad $L_c(\varphi(\mathfrak{N}))$. Ne segue che $\varphi(\mathfrak{N})$ è un q-gruppo con $L(\varphi(\mathfrak{N}))$ isomorfo ad $L(\mathfrak{G}_q)$ (prop. VIII). Al gruppo di Frattini $\Phi(\varphi(\mathfrak{N}))$ corrisponde mediante φ^{-1} il gruppo $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{N}$ di $\mathfrak{G}$ tale che $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ è l'unione dei gruppi d'ordine q di $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, e quindi nel caso specifico è $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \times \Omega(\mathfrak{G}_q)$. Ne segue che $L_c(\mathfrak{N} \times \Omega(\mathfrak{G}_q))$ è dualmente isomorfo ed $L_c(\overline{\mathfrak{G}}/\Phi(\varphi(\mathfrak{N}))$. Ne segue che (prop. II) $\mathfrak{G}/\Phi(\varphi(\mathfrak{N}))$ si spezza nel prodotto diretto di un q-gruppo ed un gruppo d'ordine primo con q[15]). In $\overline{\mathfrak{G}}$ è dunque normale il sottogruppo di Sylow relativo al numero primo q, $\overline{\mathfrak{G}}_q$, ed è $\varphi(\mathfrak{N}) = \overline{\mathfrak{G}}_q$. (corollario I, prop. VIII). Ma $\overline{\mathfrak{G}}/\Phi(\overline{\mathfrak{G}}_q) = \overline{\mathfrak{G}}_q/\Phi(\overline{\mathfrak{G}}_q) \times \mathfrak{C}/\Phi(\overline{\mathfrak{G}}_q)$ comporta che sia $\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{G}}_q \times \mathfrak{F}$ e quindi pure $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_q \times \mathfrak{N}$.

Dimostriamo infine il seguente

LEMMA III: *Sia $\mathfrak{G}$ un gruppo d'ordine $p^\alpha 2^\beta$, non supersolubile, con $L_c(\mathfrak{G})$ dualmente isomorfo ad $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$, ove $\overline{\mathfrak{G}}$ è un gruppo risolubile. Allora, o $\mathfrak{G}$ è il gruppo alterno su quattro oggetti $\mathfrak{A}_4$, nel qual caso $\overline{\mathfrak{G}}$ è il gruppo dei quaternioni, oppure $\mathfrak{G}$ è il gruppo ot-*

---

[15]) Vedasi loc. cit. in [3]).

tenuto da quello dei quaternioni ampliandolo mediante un automorfismo d'ordine 3, *nel qual caso* $\overline{\mathfrak{G}}$ *è isomorfo a* $\mathfrak{G}$.

Useremo induzione sull'ordine di $\mathfrak{G}$.

Poichè $\mathfrak{G}$ non è supersolubile, in $\mathfrak{G}$ esiste un 2-gruppo normale massimo $\mathfrak{P}$ che non è ciclico (lemma II). Sia $\Phi(\mathfrak{P})$ il gruppo di Frattini di $\mathfrak{P}$ che pel momento supponiamo diverso dall'identità. Poichè $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{P})$ non è supersolubile, per ipotesi d'induzione dovrà essere $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{P})$ il gruppo alterno su quattro oggetti $\mathfrak{A}_4$. Il gruppo $\mathfrak{G}$ ha dunque in questo caso ordine 32^β con il gruppo di Sylow $\mathfrak{G}_2$ relativo al numero 2 normale e non ciclico. Ma allora se $\mathfrak{G}_2$ non è il gruppo dei quaternioni, e quindi $\mathfrak{G}$ necessariamente il gruppo ottenuto da quello dei quaternioni ampliandolo mediante un automorfismo d'ordine 3, indicato con φ un isomorfismo duale tra $L_c(\mathfrak{G})$ ed $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$, il gruppo $\overline{\mathfrak{G}}/\varphi(\mathfrak{G}_2)$ è un 2-gruppo (prop. VIII), e $\varphi(\mathfrak{G}_2)$ è normale minimo in $\overline{\mathfrak{G}}_1$ d'ordine primo. Ora da $\mathfrak{G} \supset \supset \mathfrak{G}_2 \supset \Phi(\mathfrak{G}_2) \supset 1$ segue $\overline{\mathfrak{G}} \supset \varphi(\Phi(\mathfrak{G}_2)) \supset \varphi(\mathfrak{G}_2) \supset 1$, ove $\varphi(\Phi(\mathfrak{G}_2))$ è il gruppo dei quaternioni in quanto $L_c(\varphi(\Phi(\mathfrak{G}_2)))$ è dualmente isomorfo ad $L_c(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G}_2))$. Quindi $\overline{\mathfrak{G}}$ è un 2-gruppo (prop. VIII), non ciclico. Ne segue che $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_4$ che è contro l'ipotesi $\Phi(\mathfrak{G}_2) \neq 1$.

Resta il caso che $\Phi(\mathfrak{P})$ sia il gruppo identico. Nel gruppo supersolubile $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$, consideriamo il sottogruppo unione di tutti i p-gruppi normali minimi. Sia esso $\mathfrak{M}/\mathfrak{P}$. Allora il gruppo $\mathfrak{M}$ è o abeliano oppure il gruppo $\mathfrak{A}_4$ (lemma II), e la prima circostanza si presenta se non sono ciclici i sottogruppi di Sylow di $\mathfrak{G}$ relativi al numero primo p. Se $\mathfrak{M}$ è abeliano, è $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p \times \mathfrak{P}$, e poichè $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}_p$ non può essere supersolubile, è $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}_p = \mathfrak{A}_4$, che comporta che in $\mathfrak{G}$ il sottogruppo di Sylow $\mathfrak{G}_2$ sia normale e $\mathfrak{P} = \mathfrak{G}_2$. Ma allora per la IX $\mathfrak{G}$ dovrebbe essere speciale, contro ipotesi.

Deve dunque essere $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ d'ordine $3^\alpha 2^\gamma$ a sottogruppi di Sylow relativi al numero 3 ciclici, supersolubili e privo di 2-gruppi normali. Ne segue che il centralizzante di $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{G}$, è $\mathfrak{P}$ stesso, gruppo quadrinomio, che comporta che sia $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_4$, oppure il gruppo simmetrico $\mathfrak{S}_4$ su quattro oggetti. Ma è facile vedere che $L_c(\mathfrak{S}_4)$ non può essere dualmente isomorfo al reticolo dei sottogruppi di composizione di un gruppo risolubile $\overline{\mathfrak{G}}$. È pure facile vedere che se $\mathfrak{G}$ è il gruppo ottenuto da quello dei quaternioni ampliandolo mediante un automorfismo d'ordine 3, $L_c(\mathfrak{G})$ è autoduale. È ciò completa la dimostrazione del lemma.

3. - Passiamo a dimostrare il teorema principale della presente nota, e precisamente

TEOREMA I: *Siano* $\mathfrak{G}$ *e* $\overline{\mathfrak{G}}$ *due gruppi risolubili con* $L_c(\mathfrak{G})$ *dualmente isomorfo ad* $L_c(\overline{\mathfrak{G}})$. *Allora,* $\mathfrak{G}$ *è il prodotto diretto di due sottogruppi di Hall,* $\mathfrak{G} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{F}$ *con* $\mathfrak{C}$ *supersolubile ed* $\mathfrak{F}$, *se non è il gruppo identico, è il gruppo alterno su quattro oggetti* $\mathfrak{A}_4$, *oppure il gruppo* $\mathfrak{Q}$ *ottenuto a partire dal gruppo dei quaternioni ampliandolo mediante un automorfismo d'ordine* 3. *Se* $\mathfrak{F}$ *è il gruppo* $\mathfrak{A}_4$, $\overline{\mathfrak{G}}$ *è supersolubile ed è dato da* $\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{C}} \times \overline{\mathfrak{F}}$, *con* $\overline{\mathfrak{C}}$ *gruppo d'ordine dispari ed* $L_c(\overline{\mathfrak{C}})$ *dualmente isomorfo ad* $L_c(\mathfrak{C})$, *mentre* $\overline{\mathfrak{F}}$ *è il gruppo dei quaternioni, e viceversa. Se* $\mathfrak{F}$ *è il gruppo* $\mathfrak{Q}$, *allora* $\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{C}} \times \mathfrak{F}$, *con* $\overline{\mathfrak{C}}$ *sottogruppo di Hall supersolubile ed* $L_c(\overline{\mathfrak{C}})$ *dualmente isomorfo ad* $L_c(\mathfrak{C})$, *mentre* $\overline{\mathfrak{F}}$ *è isomorfo ad* $\mathfrak{F}$.

Per la dimostrazione di nuovo useremo induzione sull'ordine di $\mathfrak{G}$.

Sia $\mathfrak{G}$ non supersolubile. Allora esiste un 2-gruppo normale massimo $\mathfrak{P}$ non ciclico in $\mathfrak{G}$, mentre il gruppo $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ è supersolubile (lemma II). Siano $p_1, p_2, \ldots, p_t$ i numeri primi distinti, se ci sono, diversi da 2 e 3, che dividono l'ordine di $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$. Allora esiste in $\mathfrak{G}$ un gruppo normale $\mathfrak{H} = \mathfrak{C}\mathfrak{P}$, con $\mathfrak{C}$ di Hall in $\mathfrak{G}$ relativo ai numeri primi distinti $p_1, p_2, \ldots, p_t$. $L_c(\mathfrak{G})$ è dualmente isomorfo al reticolo dei sottogruppi di composizione di un gruppo risolubile $\overline{\mathfrak{G}}$ (corollario I); per l'ipotesi d'induzione, $\mathfrak{G}$ deve essere supersolubile, quindi $\mathfrak{G} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{P}$. Se $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$ fosse supersolubile, tale sarebbe pure $\mathfrak{G}$, perchè lo è $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ ed è $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{P} = 1$. Essendo dunque $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$ non supersolubile, pel lemma III risulta $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$ o il gruppo $\mathfrak{A}_4$, o il gruppo $\mathfrak{Q}$. In ogni caso dunque $\mathfrak{P}$ è sottogruppo di Sylow di $\mathfrak{G}$. Sia $\mathfrak{P}$ il gruppo quadrinomio. Allora $\varphi(\mathfrak{C})$ è sottogruppo normale di $\mathfrak{G}$ ed è il gruppo dei quaternioni. Da $\mathfrak{C} \cup \mathfrak{P} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{P}$, che è massino in $\mathfrak{G}$, segue $\varphi(\mathfrak{C}) \cap \varphi(\mathfrak{P}) = \Phi(\varphi(\mathfrak{C}))$ e poichè $L_c(\overline{\mathfrak{G}}/\Phi(\varphi(\mathfrak{C})))$ è dualmente isomorfo ad $L_c(\mathfrak{P} \times \mathfrak{C})$, si conclude (prop. II e loc. cit. 2)) che $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{A}_4$. Se invece $\mathfrak{P}$ è il gruppo dei quaternioni, il gruppo $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{P})$ non è supersolubile e quindi da $\mathfrak{C}\Phi(\mathfrak{P})/\Phi(\mathfrak{P}) \times \mathfrak{F}/\Phi(\mathfrak{P})$, con $\mathfrak{F}/\Phi(\mathfrak{P}) = \mathfrak{A}_4$, segue che $\mathfrak{G} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{Q}$. E la conclusione del teorema oramai non è difficile

TEOREMA II: *Se $\mathfrak{G}$ è un gruppo risolubile, se $L_c(\mathfrak{G})$ è autoduale, allora è $\mathfrak{G} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{Q}$, con $\mathfrak{C}$ sottogruppo di Hall, supersolubile con $L_c(\mathfrak{C})$ autoduale e $\mathfrak{Q}$, se non è il gruppo identico, è il gruppo ottenuto da quello dei quaternioni ampliandolo mediante un automorfismo d'ordine* 3.

Si tenga presente il teorema I, la prop. II e il fatto che $L_c(\mathfrak{A}_4)$ non è autoduale, mentre lo è $L_c(\mathfrak{Q})$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BIRCKHOFF, G.: *Lattice theory*. Colloquium Publ., vol. XXV, 1948.

[2] CURZIO, M.: *Sul reticolo dei sottogruppi di composizione di alcuni gruppi finiti*. Boll. UMI. Serie III, Anno XII, 1957.

[3] CURZIO, M.: *Sui gruppi φ-isomorfi a un gruppo speciale finito*. Rend. Acc. Sc., Napoli, Serie 4, vol. 24, 1957.

[4] CURZIO, M.: *Sui sottogruppi di composizione dei gruppi finiti*. Ricerche di Mat., vol. 7, 1958.

[5] CURZIO, M.: *Sui gruppi supersolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è autoduale*. Le Matematiche, vol. 12, 1957.

[6] FEIT, W.: *On the structure of Frobenius groups*. Canad. J. Math., vol. 9, 1957.

[7] GASCHÜTZ, W.: *Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen*. Math. Z. vol. 58, 1953.

[8] HUPPERT, B.: *Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen*. Math. Z., vol. 60, 1954.

[9] SUZUKI, M.: *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*. Ergeb. der Math. Heft 10, 1956.

[10] TAMASCHKE, O.: *Die Kongruenzrelationen im Verband der zugänglichen Subnormalteiler*. Math. Z., vol. 75, 1961.

[11] TAMASCHKE, O.: *Gruppen mit reduziblen Subnormalteilerverband*. Math. Z., vol. 75, 1961.

[12] ZAPPA, G.: *Sui gruppi finiti risolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo*. Boll. UMI, Serie III, Anno XI, 1956.

[13] ZASSENHAUS, H.: *Theory of Groups*. Chelsea Publ. C., New York, 1958.