

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

C. FOIAS

Essais dans l'étude des solutions des équations de Navier-Stokes dans l'espace. L'unicité et la presque-périodicité des solutions « petites »

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 32 (1962), p. 261-294

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1962__32__261_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ESSAIS DANS L'ÉTUDE DES SOLUTIONS DES
ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES DANS L'ESPACE.
L'UNICITÉ ET LA PRESQUE-PÉRIODICITÉ DES
SOLUTIONS « PETITES ».

Nota () di C. FOIAS (Bucarest)*

Commencé depuis longtemps par J. Leray [13], [14] l'étude des équations (non-stationnaires) de Navier-Stokes est, dans le dernier temps, l'objet de nombreux travaux concernant surtout l'existence et l'unicité des solutions (E. Hopf [7], A. A. Kiselev-O. A. Ladyzenskaya [9], O. A. Ladyzenskaya [11], J. L. Lions-G. Prodi [18], G. Prodi [20], J. L. Lions [15], [16], etc) mais aussi certains problèmes de comportement de ces solutions comme: Stabilité (O. A. Ladyzenskaya [12]), existence des solutions périodiques (quand les forces massiques sont périodiques en t ; voir G. Prodi [21] et I. Judovici [8]). Notre article constitue un essai d'attaquer deux problèmes de comportement global des solutions des équations de Navier-Stokes en dimension 3 notamment l'unicité et la presque-périodicité des solutions des équations de Navier-Stokes, dont l'existence est supposée sur tout l'axe du temps.

Pour préciser les idées, soit $\Omega \subset R^3$ un domaine borné à frontière $\partial\Omega$ de classe C^3 et soit $(u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))$ une solution « turbulente » des équations de Navier-Stokes dans $(-\infty, +\infty) \times \Omega$ c'est-à-dire

$$\int_{\Omega} |u_j(t, x)|^2 dx \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_j(t, x)}{\partial x_k} \right|^2 dx \quad (j, k = 1, 2, 3)$$

(*) Pervenuta in redazione il 21 febbraio 1962.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Bucarest (Romania).

sont localement intégrable (en t), et $(u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))$ vérifie au sens généralisé les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j(t, x)}{\partial t} - \nu \Delta u_j(t, x) + \sum_{k=1}^3 u_k(t, x) \frac{\partial u_j(t, x)}{\partial x_k} &= \\ &= f_j(t, x) + \frac{\partial p(t, x)}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

et

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j(t, x)}{\partial x_j} = 0, \quad x \in \Omega, \quad u(t, x)|_{x \in \partial \Omega} = 0,$$

où $\nu > 0$ est une constante, $f_j(t, x)$ ($j = 1, 2, 3$) sont données d'avance telles que $\int_{\Omega} |f_j(t, x)|^2 dx$ soient localement intégrables

et $p(t, x)$ est une distribution qui en résulte. En essence, nos principaux résultats sont les suivants:

Si elle existe, $(u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))$ est uniquement déterminée par l'une des conditions

$$(I) \quad \int_{-\infty}^T \left(\int_{\Omega} |u_j(t, x)|^p dx \right)^{p/q} dt < \infty \quad (j = 1, 2, 3)$$

pour certains T , p et q tels que $-\infty < T \leq \infty$ et $3 < p \leq \infty$, $\frac{2p}{p-3} < q \leq \infty$, ou

$$(II) \quad \text{vrai max}_{-\infty < t < T} \left(\int_{\Omega} |u_j(t, x)|^p dx \right) < \delta \quad (j = 1, 2, 3)$$

pour certains T et p tels que $-\infty < T \leq \infty$, $3 < p \leq \infty$, où $\delta > 0$ est une constante qui dépend seulement de Ω et p . De plus, si

$$(III) \quad f_j(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{\lambda_m t} f_{j,m}(x) \quad (j = 1, 2, 3)$$

la convergence ayant lieu dans $L^2(\Omega)$ uniformément en t sur $(-\infty, +\infty)$ alors si $(u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))$ vérifie (II) ¹⁾ avec $T = \infty$, on a aussi un développement

$$(III') \quad u_j(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{\mu_j m t} u_{j,m}(x) \quad (j = 1, 2, 3)$$

dans $L^2(\Omega)$, uniformément en t sur $(-\infty, +\infty)$.

La première partie de cet énoncé (qui donne un résultat d'unicité globale) est contenue dans le théorème 2 de notre travail, tandis que la seconde (qui donne un résultat de presque-périodicité) est contenue dans le théorème 3. Leurs démonstrations exigent une étude détaillée des solutions « turbulentes ». On fait cela par l'intermédiaire d'une formule de la variation des constantes (voir le § 2 et le théorème 1). Mentionnons que certains résultats ont un intérêt en soi, comme par exemple les propositions 3, 4, 5 et 6 (d'ailleurs ce sont ceux qui permettent d'utiliser, dans la démonstration du théorème 3, une méthode donnée auparavant dans [5]).

Il faut remarquer l'interprétation physique que voici des résultats énoncés: *Si l'écoulement d'un fluide possède en chaque moment un nombre de Reynolds assez petit, alors cet écoulement est uniquement déterminé. Si de plus les forces massiques sont presque-périodiques (en temps), il en est de même de l'écoulement.*

Tous ces résultats ne sont pas dépourvus d'objet. On peut aisément en donner des exemples. Toutefois nous n'avons pas pu donner des conditions d'existence des solutions vérifiant une des conditions (I), (II) ou (III), (III').

Enfin, remarquons que M.J.L. Lions a obtenu des résultats semblables en dimension n , par une autre méthode. Toutefois la méthode de ci-dessous s'applique aussi en dimension n sans aucun changement. Il faut seulement généraliser la limitation (20) de *Odqvist* [19] (voir le § 3).

¹⁾ Dans ce cas $(u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))$ ne peut pas vérifier (I) avec $T = \infty$ (voir la proposition 7).

§ 1. Une première « formule de la variation des constantes » pour les solutions « intermédiaires » des équations de Navier-Stokes.

Soit Ω un domaine borné ayant la frontière de classe C^3 de \mathbb{R}^3 , soit $\vec{L}^p = \prod_1^3 L^p(\Omega)$ et soit \vec{L}_1^p l'espace des $\vec{u} \in \vec{L}^p$ tels que $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} \in \vec{L}^p (j = 1, 2, 3)$; les normes (usuelles) dans \vec{L}^p et \vec{L}_1^p seront désignées par $|\cdot|_p$ et $\|\cdot\|_p$ (où $1 \leq p \leq \infty$). Soit \vec{S}^p , resp. \vec{S}_1^p , l'adhérence dans \vec{L}^p , resp. \vec{L}_1^p , de l'ensemble \vec{S}_0^∞ des $\vec{u} = (u_j)$ de $\vec{C}_0^\infty = \prod_1^3 C_0^\infty(\Omega)$ tels que

$$(1) \quad \operatorname{div} \vec{u} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0.$$

Une solution (dans $(a, b) \times \Omega$) des équations de Navier-Stokes sera une fonction $\vec{u}(t)$ à valeurs dans \vec{S}_1^2 de 2-ième puissance localement intégrable et vérifiant, au sens de la théorie des distributions, le système

$$(2) \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} - \nu \Delta u_j + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial (u_j u_k)}{\partial x_k} = f_j + \frac{\partial p}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2, 3),$$

où $\nu > 0$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $\vec{f}(t)$ à valeurs dans \vec{L}^2 et de 2-ième puissance localement sommable, sont donnés d'avance, p est une distribution sur $(a, b) \times \Omega$ et $\Delta = \sum_{j=1}^3 \partial^2 / \partial x_j^2$.

Donnons une autre forme, plus maniable, à (2). Pour cela, soient

$$\vec{\Phi}(t) \in C_0^\infty((a, b); \vec{S}_0^\infty) (\subseteq C_0^\infty((a, b); \vec{C}_0^\infty) = \prod_1^3 C_0^\infty((a, b) \times \Omega)),$$

(\vec{u}, \vec{v}) le produit scalaire dans \vec{L}^2 , $((\vec{u}, \vec{v}))$ la forme bilinéaire $\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j} \right)$ sur \vec{L}_1^2 et enfin

$$(3) \quad b(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \sum_{j,k=1}^3 \int_{\Omega} u_k v_j \frac{\partial w_j}{\partial x_k} dx,$$

chaque fois que les produits sous le signe d'intégration sont dans $L^1(\Omega)$; alors, en tenant compte des définitions de la théorie des distributions, (2) prend la forme

$$(4) \quad \int_a^b (-\vec{u}(t), \vec{\Phi}'(t)) + \nu((\vec{u}(t), \vec{\Phi}(t))) - b(\vec{u}(t), \vec{u}(t), \vec{\Phi}(t))) dt = \int_a^b (f(t), \vec{\Phi}(t)) dt.$$

Ceci montre que les solutions turbulentes de [13], [14] etc, sont des solutions dans le sens de ci-dessus.

Dans tout ce qui suit, il s'agira seulement des solutions « *intermédiaires* », c'est-à-dire des solutions $\vec{u}(t)$ des équations de Navier-Stokes telles que ²⁾

$$(5) \quad \vec{u}(t) \in \mathfrak{J}_s((a, b)) = \bigcup_{\infty > p > 3} \bigcup_{q > (2p/p-3)} L^q((a, b); \vec{L}^p).$$

LEMME 1: Soit $\vec{u}(t) \in \mathfrak{J}_s((a, b))$ une solution des équations de Navier-Stokes. Il existe un ensemble de mesure nulle $N(\vec{u}) \subset (a, b)$ dépendant seulement de \vec{u} tel que pour tout $s, t \in (a, b)$, $s < t$ et $s, t \notin N(\vec{u})$, on ait

$$(6) \quad (\vec{u}(t), \vec{\Phi}_0(t)) = (\vec{u}(s), \vec{\Phi}_0(s)) + \int_s^t (f(\tau), \vec{\Phi}_0(\tau)) d\tau + \int_s^t ((\vec{u}(\tau), \vec{\Phi}_0'(\tau)) - \nu((\vec{u}(\tau), \vec{\Phi}_0(\tau))) - b(\vec{u}(\tau), \vec{\Phi}_0(\tau), \vec{u}(\tau))) d\tau$$

quelle que soit $\vec{\Phi}_0(t) \in C^1([s, t]; \vec{S}_1^2)$ (Ici, $C^1([s, t], \vec{S}_1^2)$ désigne l'espace des fonctions à valeurs dans \vec{S}_1^2 définies et continument dérivables sur $[s, t]$).

²⁾ Pour un espace de Banach X nous désignerons par $L^p((a, b); X)$ ($1 < p < \infty$) l'espace des fonctions définies sur l'intervalle $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$, à valeurs dans X et de p -ième puissance sommable.

Avant de démontrer ce lemme, quelques remarques nous seront nécessaires.

Soit $\vec{u} \in \mathcal{S}_0^\infty$ et soit $u_j \in C_0^\infty(\Omega)$ une composante de \vec{u} . Nous avons (en désignant par \hat{u}_j , la transformée de Fourier de u_j)

$$\begin{aligned} \|u_j\|_{L^{2p/(p-2)}(\Omega)} &\leq C_1 \|\hat{u}_j\|_{L^{2p/(p+2)}(\mathbb{R}^n)} = C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}_j(\lambda)|^{2p/(p+2)} d\lambda \right)^{(p+2)/2p} \leq \\ &\leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\lambda|^2) |\hat{u}_j(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\lambda}{(1 + |\lambda|^2)^{p/2}} \right)^{1/p} = \\ &= C_2 \|u_j\|_{L_1^2(\Omega)} \quad \text{pour } p > 3 \end{aligned}$$

donc

$$(7) \quad \|\vec{u}\|_{2p/(p-2)} \leq C_3 \|\vec{u}\|_2$$

pour tout $\vec{u} \in \mathcal{S}_0^\infty$ et $p > 3$. Ici $C_3 = C_3(p)$ est une constante qui ne dépend pas de \vec{u} .

D'autre part de l'inégalité de Holder on déduit

$$(8) \quad \left. \begin{aligned} &|b(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \\ &|b(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})| \end{aligned} \right\} \leq C_4 \|\vec{u}\|_p \|\vec{v}\|_{2p/(p-2)} \|\vec{w}\|_2$$

quelque soient $\vec{u} \in \vec{L}^p$, $\vec{v} \in \vec{L}^{2p/(p-2)}$ et $\vec{w} \in \vec{L}_1^2$, et $2 \leq p \leq \infty$. Ces remarques faites passons à la démonstration du lemme 1.

Il est évident que l'espace $C^1([s, t]; \vec{S}_0^\infty)$ des fonctions définies sur $[s, t]$ à valeurs dans \vec{S}_0^∞ et continument dérivables (par rapport à la topologie de \vec{C}_0^∞), est dense dans $C^1([s, t]; \vec{S}_1^2)$. En vertu de (7) et (8) il en résulte qu'il suffit de démontrer (6)

seulement pour telles fonctions. Soit donc $\vec{\Phi}_0(\tau) \in C^1([s, t]; \vec{S}_0^\infty)$ et soit $e(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ telle que $e(t) \geq 0$, $e(t) = e(-t)$ pour tout t , $e(t) = 0$ pour $|t| \geq 1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e(t) dt = 1$. Soit $e_\delta(t) = \delta^{-1} e(\delta^{-1}t)$,

$\delta > 0$. La fonction ³⁾

$$\vec{\Phi}_\delta(\tau) = e_\delta * \vec{\Phi}_0^*(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e_\delta(\tau - \sigma) \vec{\Phi}_0^*(\sigma) d\sigma$$

appartient, pour $\delta < \min \{s - a, b - t\}$ à $C_0^\infty((a, b); \vec{S}_0^\infty)$. Par conséquent, de (4) on déduit (en tenant aussi compte de la relation évidente: $b(\vec{u}(t), \vec{u}(t), \vec{\Phi}_\delta(t)) = -b(\vec{u}(t), \vec{\Phi}_\delta(t), \vec{u}(t))$)

$$(4^1) \quad \int_a^b (-(\vec{u}(\tau), \vec{\Phi}_\delta(\tau)) + v(\vec{u}(\tau), \vec{\Phi}_\delta(\tau))) + b(\vec{u}(\tau), \vec{\Phi}_\delta(\tau), \vec{u}(\tau))) d\tau = \\ = \int_a^b (f(\tau), \vec{\Phi}_\delta(\tau)) d\tau.$$

Mais, évidemment,

$$\vec{\Phi}_\delta'(\tau) = e_\delta(\tau - s) \vec{\Phi}_0'(s) - e_\delta(\tau - t) \vec{\Phi}_0'(t) + e_\delta * \vec{\Phi}_0^{*'}(\tau), \\ e_\delta * \vec{\Phi}_0^{*'}(\tau) \rightarrow \vec{\Phi}_0^{*'}(\tau) \quad \text{dans } L^1((a, b); \vec{S}^1), \\ e_\delta * \vec{\Phi}_0^*(\tau) \rightarrow \vec{\Phi}_0^*(\tau) \quad \text{dans } L^r((a, b); \vec{S}_1^r)$$

pour tout $1 \leq r < \infty$ et par conséquent, aussi dans $L^r((a, b); \vec{S}^{2p/(p-1)})$ quels que soient $1 \leq r < \infty$ et $3 < p \leq \infty$; en tenant compte de l'hypothèse faite sur $\vec{u}(t)$ on déduit que

$$b(\vec{u}(\tau), \vec{\Phi}_\delta(\tau), \vec{u}(\tau)) \rightarrow b(\vec{u}(\tau), \vec{\Phi}_0(\tau), \vec{u}(\tau))^*$$

dans $L^1((a, b))$, donc de (4¹) il résulte

$$(9) \quad \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^b (e_\delta(\tau - t) (\vec{u}(\tau), \vec{\Phi}_\delta(t)) - e_\delta(\tau - s) (\vec{u}(\tau), \vec{\Phi}_\delta(s))) d\tau = \\ = \int_s^t ((f(\tau), \vec{\Phi}_0(\tau)) + (\vec{u}(\tau), \vec{\Phi}_0'(\tau)) - v(\vec{u}(\tau), \\ \vec{\Phi}_0(\tau))) - b(\vec{u}(\tau), \vec{\Phi}_0(\tau), \vec{u}(\tau))) d\tau.$$

³⁾ Où l'astérisque désignera la fonction obtenue en prolongeant la fonction (donnée sur (a, b)) sur tout E^1 en lui donnant la valeur 0 en dehors de (a, b) .

Il nous reste de calculer la limite du premier membre de l'égalité (9). Pour cela, soit $t_0 \in (a, b)$; alors pour δ assez petit on a

$$(10) \quad \left| \int_a^b e_\delta(t - t_0) \vec{u}(t) dt - \vec{u}(t_0) \right|_2 \\ \leq (2 \sup e(t)) \frac{1}{2\delta} \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |\vec{u}(t) - \vec{u}(t_0)|_2 dt$$

et comme $\vec{u}(t) (\in \vec{L}^2)$ est localement intégrable, il existe (en vertu du théorème de Lebesgue sur la dérivation de l'intégrale indéfinie d'une fonction numérique (voir [6]) un ensemble de mesure nulle $N(\vec{u}) \subset (a, b)$ tel que pour tout $t_0 \notin N(\vec{u})$ on ait

$$(10^1) \quad \frac{1}{2\delta} \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |\vec{u}(\tau) - \vec{u}(t_0)|_2 d\tau \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad \delta \rightarrow 0.$$

La relation (6), s'ensuit maintenant de (9) et des relations (10)-(10¹) où l'on prend $t_0 = s$ et t . Ceci achève la démonstration du lemme.

Considérons maintenant l'opérateur de Laplace Δ défini sur \vec{S}_0^∞ . Il existe un (et un seul) opérateur autoadjoint Δ^\wedge (dans \vec{S}^2) dont le domaine est inclus dans \vec{S}_1^2 (En effet, dans \vec{S}^2 , l'opérateur $I - \Delta$ défini sur \vec{S}_0^∞ , I étant l'opérateur identité de \vec{S}^2 , est symétrique et $((I - \Delta)\vec{u}, \vec{u}) \geq (\vec{u}, \vec{u})$, $\vec{u} \in \vec{S}_0^\infty$. Soit $(I - \Delta)^\wedge$ l'extension classique de Friedrichs (voir [22], Ch. VIII) de $I - \Delta$, c'est-à-dire l'opérateur autoadjoint (en \vec{S}^2) dont le domaine est inclus dans l'adhérence de \vec{S}_0^∞ suivant la norme $((I - \Delta)\vec{u}, \vec{u})^{1/2} = \|\vec{u}\|_2$, donc dans \vec{S}_1^2 . Δ^\wedge sera $I - (I - \Delta)^\wedge$).

Le problème mixte suivant

$$(11) \quad \frac{\partial u_j(t, x)}{\partial t} = \nu \Delta u_j(t, x), \quad u_j(0, x) = a_j(x) \quad (j = 1, 2, 3)$$

où $\{u, (t, \cdot)\} \in \vec{S}_1^2$ et $\{a, (\cdot)\} \in \vec{S}^2$, correspond à l'équation différentielle (dans \vec{S}^2)

$$(11^1) \quad \vec{u}'(t) = \nu \Delta \vec{u}(t), \quad \vec{u}(0) = \vec{a}, \quad t > 0.$$

La solution de (11¹) est donnée par

$$(12) \quad \vec{u}(t) = E(t)\vec{a}$$

où $E(t)$ est l'opérateur qui correspond à l'opérateur autoadjoint Δ (dont le spectre est inclus dans $(-\infty, 0]$) par

$$(12^1) \quad E(t) = \exp(\nu t \Delta) = \int_{-\infty}^0 e^{\nu \lambda t} dE_\lambda \quad (t \geq 0),$$

$\{E_\lambda\}$ étant la famille spectrale de Δ (en ce qui concerne ces faits simples de calcul fonctionnel, voir [22], Ch. IX). Soit A l'opérateur autoadjoint > 0 , racine carrée de $I - \Delta$. Alors ([10], Ch. I § 4), \mathcal{D}_A est l'adhérence de \vec{S}_0^∞ suivant la norme $((I - \Delta)\vec{u}, \vec{u})^{1/2} = \|\vec{u}\|_2$, donc

$$(13) \quad \mathcal{D}_A = \vec{S}_1^2 \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\|_2 = \|Au\|_1, \quad \vec{u} \in \vec{S}_1^2.$$

De cette manière, si $\vec{a} \in \vec{S}_0^\infty$, on a

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{E(t)\vec{a} - E(s)\vec{a}}{t - s} - E(s)\Delta\vec{a} \right\|_2 = \\ & = \left\| \frac{E(t)A\vec{a} - E(s)A\vec{a}}{t - s} - \frac{d}{dt} E(t)A\vec{a} \Big|_{t=s} \right\|_2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

pour $t \rightarrow s$, quel que soit $s \in [0, \infty)$, donc $E(t)\vec{a} \in C^1([0, \infty); \vec{S}_1^2)$.

Nous avons maintenant la possibilité de donner « la première formule de la variation des constantes » pour les solutions intermédiaires des équations de Navier-Stokes.

PROPOSITION 1: Soit $\vec{u}(t) \in \mathcal{J}_s((a, b))$ une solution des équations de Navier-Stokes. Alors, pour tous $s, t \in (a, b)$, $s, t \notin N(\vec{u})$ et $s < t$, on a

$$(14) \quad (\vec{u}(t), \vec{a}) = (\vec{u}(s), E(t-s)\vec{a}) + \int_s^t ((\vec{f}(\tau), E(t-\tau)\vec{a}) - b(\vec{u}(\tau), E(t-\tau)\vec{a}, \vec{u}(\tau)))d\tau$$

quel que soit $\vec{a} \in \vec{S}_0^\infty$.

Démonstration: Posons $\vec{\Phi}_0(\tau) = E(t-\tau)\vec{a}$ pour $\tau \in [s, t]$. Alors, $\vec{\Phi}_0(\tau) \in C^1([s, t]; \vec{S}_1^2)$ donc on peut prendre ce $\vec{\Phi}_0(\tau)$ dans (6). La formule (14) découle maintenant du fait que dans ce cas $\vec{\Phi}_0(t) = \vec{a}$ et que d'après (11¹), (12) et la définition de $((\cdot, \cdot))$ on a $\vec{\Phi}_0(\tau) = -\nu \Delta \vec{\Phi}_0(\tau)$ puis $(\vec{u}(\tau), \vec{\Phi}_0(\tau)) = \nu((\vec{u}(\tau), \vec{\Phi}_0(\tau)))$.

§ 2. Quelques propriétés des solutions « intermédiaires » des équations de Navier-Stokes; la deuxième formule de la variation des constantes.

Commençons par donner deux lemmes qui nous seront très utiles dans la suite.

LEMME 2: Soit $\vec{u} \in \mathcal{D}_\Delta e$ où $0 < \varrho < 1$. Alors $\vec{u} \in L^{2p/(p-\varrho)}$ et

$$(15) \quad |\vec{u}|_{2p/(p-\varrho)} \leq C_\varrho |A^\varrho \vec{u}|_2$$

pour tout $3 < \varrho p$. (Ici C_ϱ est une constante qui ne dépend pas de \vec{u} (mais évidemment de p et ϱ .)

Démonstration: Soit B la racine carré de l'opérateur auto-adjoint engendré par $I - \Delta$ dans \vec{L}^2 . Evidemment, en identifiant chaque $\vec{u} \in \vec{S}^2$ au $\vec{u}^* \in \vec{L}^2(\mathbb{R}^3)$ égal à \vec{u} sur Ω et nul ailleurs, on a

$$\mathcal{D}_\Delta \subseteq \mathcal{D}_B \quad \text{et} \quad |B\vec{u}|_2 = |A\vec{u}|_2$$

pour tout $\vec{u} \in \mathcal{D}_A$. Mais alors en vertu d'un théorème d'interpolation de J. L. Lions ([17]; voir aussi [4]) on a aussi

$$\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{D}_{A^\varrho} \quad \text{et} \quad |B^e \vec{u}|_2 \leq |A^e \vec{u}|_2, \quad \vec{u} \in \mathcal{D}_{A^\varrho}.$$

Mais, il est manifeste que

$$|B^e \vec{u}|_2 = \left(\sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\lambda|^2)^\varrho |\widehat{u}_j(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2}$$

et par conséquent, en utilisant le théorème de M. Riesz

$$\begin{aligned} |\vec{u}|_{2\nu/(\nu-2)} &\leq C_6 \sum |u_j|_{2\nu/(\nu-2)} \leq C_7 \sum |\widehat{u}_j|_{2\nu/(\nu+2)} \leq \\ &\leq C_7 \left(\sum_{\mathbb{R}^3} \int (1 + |\lambda|^2)^\varrho |\widehat{u}_j(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\lambda}{(1 + |\lambda|^2)^{\varrho\nu/2}} \right)^{\nu/2} = \\ &= C_8 |B^e \vec{u}|_2 \leq C_5 |A^e \vec{u}|_2 \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

LEMME 3: Soit $\vec{a} \in \vec{S}^2$ et $(3/p) < \varrho < 1$. Alors, pour tout $0 < t \leq T$, on a que $E(t)\vec{a} \in \vec{L}^{2\nu/(\nu-2)}$ et

$$(16) \quad |E(t)\vec{a}|_{2\nu/(\nu-2)} \leq C_9 (1/t)^{\varrho/2} |\vec{a}|_2,$$

où C_9 est une constante qui ne dépend pas de \vec{a} .

Démonstration: En effet, pour $t > 0$ et $\vec{a} \in \vec{S}^2$ on a $|A^e E(t)\vec{a}|_2^2 =$

$$= \int_{-\infty}^0 (1 - \lambda)^{\varrho e^{2t\lambda}} d |E_\lambda \vec{a}|_2^2 \leq C_9^2 \left(\frac{1}{t}\right)^\varrho \int_{-\infty}^0 d |E_\lambda \vec{a}|_2^2 = C_9^2 \left(\frac{1}{t}\right)^\varrho |\vec{a}|_2^2$$

d'où, le lemme se déduit aussitôt par l'intermédiaire du lemme antérieur.

La définition fonctionnelle des solutions $\vec{u}(t) = \{u_j(t, \cdot)\}$ des équations de Navier-Stokes ne détermine pas ces fonctions partout, mais seulement presque partout dans $(a, b) \times \Omega$. De plus, si on modifie une telle solution sur un ensemble de mesure

nulle dans $(a, b) \times \Omega$ on obtient aussi une solution. Il est évident que si la première était dans $\mathfrak{J}_s((a, b))$, la deuxième en est aussi. Il est naturel donc de ne pas distinguer deux solutions qui diffèrent sur un ensemble de mesure nulle, et ceci sera toujours fait dans la suite.

PROPOSITION 2: *Toute solution $\vec{u}(t) \in \mathfrak{J}_s((a, b))$ des équations de Navier Stokes est continue de (a, b) dans \vec{S}^2 , et la relation (14) est valable pour tous $s, t \in (a, b)$, $s < t$ et $\vec{a} \in \vec{S}^2$.*

Démonstration: Soit $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ et $a < s < a_1$ tel que $s \notin N(\vec{u})$. Soient $t < t'$, $t, t' \in [a_1, b_1]$, $t, t' \notin N(\vec{u})$ et soit $\delta = a_1 - s$; alors

$$\begin{aligned} (\vec{u}(t') - \vec{u}(t), \vec{a}) &= (\vec{u}(s), E(t' - s)\vec{a} - E(t - s)\vec{a}) + \\ &+ \int_t^{t'} ((\vec{f}(\tau), E(t' - \tau)\vec{a}) - b(\vec{u}(\tau), E(t' - \tau)\vec{a}, \vec{u}(\tau))) d\tau + \\ &+ \int_s^t ((\vec{f}(\tau), E(t' - \tau)\vec{a} - E(t - \tau)\vec{a}) - \\ &- b(\vec{u}(\tau), E(t' - \tau)\vec{a} - E(t - \tau)\vec{a}, \vec{u}(\tau))) d\tau, \end{aligned}$$

d'où (pour $0 < \varepsilon < \delta$, $3/p < \varrho < (q - 2)/q$ et $\omega = \frac{q - 2}{2q} - \frac{\varrho}{2}$)

$$\begin{aligned} |(\vec{u}(t') - \vec{u}(t), \vec{a})| &\leq |\vec{u}(s)|_2 |E(t' - s)\vec{a} - E(t - s)\vec{a}|_2 + \\ &+ \left(\int_t^{t'} |f(\tau)|_2 d\tau + C_s C_\varrho \int_t^{t'} |\vec{u}(\tau)|_p \|\vec{u}(\tau)\|_2 \left(\frac{1}{t' - \tau}\right)^{\varrho/2} d\tau \right) |\vec{a}|_2 + \\ &+ \left(2 \int_{t-\varepsilon}^t |f(\tau)|_2 d\tau + C_s C_\varrho \int_{t-\varepsilon}^t |\vec{u}(\tau)|_p \|\vec{u}(\tau)\|_2 \left(\frac{1}{t - \tau}\right)^{\varrho/2} + \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{t - \tau}\right)^{\varrho/2} d\tau \right) |\vec{a}|_2 + \left(\int_s^{t-\varepsilon} |f(\tau)|_2 d\tau \right) \sup_{s < \tau < t-\varepsilon} |E(t' - \tau)\vec{a} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - E(t - s) \vec{a} \Big|_2 + C_5 C_9 \int_s^{t-s} |\vec{u}(\tau)|_p \|\vec{u}(\tau)\|_2 |E(t' - \tau) \vec{a} - \\
 & - E(t - \tau) \vec{a} \Big|_{2p/(p-2)} d\tau \leq C_{10} |E(t' - s) \vec{a} - E(t - s) \vec{a} \Big|_2 + \\
 & + (C_{11}(t' - t)^{1/2} + C_{12}(t' - t)^\omega + C_{13}\varepsilon^{1/2} + C_{14}(t' - t + \varepsilon)^\omega) |\vec{a} \Big|_2 + \\
 & + C_{15} \sup |E(t' - t + \sigma) \vec{a} - E(\sigma) \vec{a} \Big|_2 + C_{16} \left(\int_s^{t-s} (|E(t' - \tau) \vec{a} - \right. \\
 & \left. - E(t - \tau) \vec{a} \Big|_{2p/(p-2)})^{2\alpha/(\alpha-2)} d\tau \right)^{(\alpha-2)/2\alpha},
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 (17) \quad & |(\vec{u}(t') - \vec{u}(t), \vec{a})| \leq C_{15} \sup_{\varepsilon < \sigma < t-s} |E(t' - t + \sigma) \vec{a} - \\
 & - E(\sigma) \vec{a} \Big|_2 + C_{17}(t' - t + \varepsilon)^\theta + C_{16} \left(\int_s^{t-s} (|E(t' - t' + \sigma) \vec{a} - \right. \\
 & \left. - E(\sigma) \vec{a} \Big|_{2p/(p-2)})^{2\alpha/(\alpha-2)} d\tau \right)^{(\alpha-2)/2\alpha},
 \end{aligned}$$

où $\theta = \max \{1/2, \omega\}$, $0 < \theta < 1$. Soit maintenant $0 \leq \rho' < 1$. Alors pour $\sigma' > \sigma \geq \eta > 0$ on a

$$A^{e'} E(\sigma') - A^{e'} E(\sigma) = \int_{-\infty}^0 (1 - \lambda)^{e'/2} (e^{\rho'\sigma'\lambda} - e^{\rho'\sigma\lambda}) dE_\lambda$$

donc

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & |(A^{e'} E(\sigma') - A^{e'} E(\sigma)) \vec{a} \Big|_2 \leq \\
 & \leq \sup_{-\infty < \lambda < 0} |(1 - \lambda)^{e'/2} (e^{\rho'\sigma'\lambda} - e^{\rho'\sigma\lambda})| |\vec{a} \Big|_2 \leq C_{18}(\sigma' - \sigma) \eta^{-1-e'} |\vec{a} \Big|_2,
 \end{aligned}$$

où la constante C_{18} ne dépend pas de \vec{a} (en ce qui concerne la dépendance de η , C_{18} reste bornée quand η parcourt un intervalle fini $[0, \eta_0]$). En utilisant (18) (avec $\rho' = 0$, $\eta = \delta$ et puis avec

$\varrho' = \varrho$ et $\eta = \varepsilon$), (15) et (17) nous obtenons

$$\begin{aligned} |(\vec{u}(t') - \vec{u}(t), \vec{a})| &\leq C_{19}(t' - t)\delta^{-1} |\vec{a}|_2 + C_{17} |\vec{a}|_2 (t' - t + \varepsilon)^{\theta} + \\ &+ C_{20}\varepsilon^{1-\varrho} |t' - t| |\vec{a}|_2 \end{aligned}$$

donc, vu que $\vec{a} \in \vec{S}_0^{\infty}$ est arbitraire,

$$|\vec{u}(t') - \vec{u}(t)|_2 \leq (C_{19} + C_{20}\varepsilon^{1-\varrho}) |t' - t| + C_{17}(t' - t + \varepsilon)^{\theta}.$$

De cette relation on déduit que la restriction de $\vec{u}(t)$ à $[a_1, b_1] \cap \cap CN(\vec{u})$ est uniformément continue, comme fonction à valeurs dans \vec{L}^2 (ou \vec{S}^2). Par conséquent cette fonction peut être prolongée par continuité en une fonction, disons $\vec{v}(t)$ continue de $[a_1, b_1]$ à \vec{S}^2 et cela pour tout $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, donc sur tout (a, b) . De plus, vu que $N(\vec{u})$ est de mesure nulle, $\vec{u}(t)$ peut être identifié, comme solution des équations de Navier-Stokes, à ce $\vec{v}(t)$. Alors vu la continuité en t du membre droit de (14), il résulte que $\vec{u}(t)$ vérifie (14) pour tous $s, t \in (a, b)$, $s < t$. Le fait que $\vec{u}(t)$ vérifie (14) aussi pour tous $\vec{a} \in \vec{S}^2$ se déduit par continuité en faisant usage du lemme 3, et ceci achève la démonstration de la proposition.

En vertu de la proposition 2, la valeur de $\vec{u}(t)$ en chaque point $t \in (a, b)$ est parfaitement déterminée. Nous allons obtenir que pour tout $t \in [s, s + T] \subset (a, b)$ les solutions « intermédiaires » des équations de Navier-Stokes vérifient certaines inégalités qui montrent qu'elles sont uniquement déterminées par leurs valeurs et par leurs membres droits (les fonctions données par les forces massiques). Dans tout cela la formule de la variation des constantes (14), ou plus précisément une deuxième forme de cette formule, jouera un rôle essentiel. Pour donner cette forme, nous avons besoin du

LEMME 4: Soit $\vec{u} \in \vec{S}^2 \cap \vec{L}^p$ avec $p > 3$ et soit $\vec{v}, \vec{w} \in \vec{S}_1^2$. Alors $b(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -b(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$.

Démonstration: Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \vec{S}_0^{\infty}$. Alors évidemment $b(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =$

$= -b(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$ et par continuité on déduit d'une manière évidente

$$b(\vec{u}, \vec{b}, \vec{c}) = -b(\vec{u}, \vec{c}, \vec{b}).$$

D'autre par (en vertu de (7) et (8)) on a

$$\begin{aligned} |b(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) - b(\vec{u}, \vec{b}, \vec{c})| &\leq |b(\vec{u}, \vec{v} - \vec{b}, \vec{w}) + b(\vec{u}, \vec{b}, \vec{w} - \vec{c})| \leq \\ &\leq C_3 C_4 (|\vec{u}|_p |\vec{v} - \vec{b}|_2 \|\vec{w}\|_2 + |\vec{u}|_p |\vec{b}|_2 \|\vec{w} - \vec{c}\|_2) \end{aligned}$$

et une relation analogue pour $b(\vec{u}, \vec{c}, \vec{b})$; ces relations montrent que si $\vec{b}_n \rightarrow \vec{b}$ et $\vec{c}_n \rightarrow \vec{c}$ dans \vec{S}_1^2 , alors $b(\vec{u}, \vec{b}_n, \vec{c}_n) \rightarrow b(\vec{u}, \vec{b}, \vec{c})$ et $b(\vec{u}, \vec{c}_n, \vec{b}_n) \rightarrow b(\vec{u}, \vec{c}, \vec{b})$ d'où le lemme s'ensuit directement.

Par conséquent on peut donner à (14) la forme suivante:

$$\begin{aligned} (*) \quad (\vec{u}(t), \vec{a}) - (\vec{u}(s), E(t-s)\vec{a}) - \int_s^t b(\vec{u}(\tau), \vec{u}(\tau), E(t-\tau)\vec{a})d\tau = \\ = \int_s^t (f(\tau), E(t-\tau)\vec{a})d\tau, \end{aligned}$$

où $s < t$, $s, t \in (a, b)$ et $a \in \vec{S}^2$. En vertu du rôle fondamental qu'aura cette « deuxième formule de la variation des constantes », dans le but d'abrèger les énoncés, il sera utile de donner une nouvelle définition:

Une fonction $\vec{u}(t) \in \mathcal{J}_s((a, b))$ continue de (a, b) dans \vec{S}^2 et vérifiant (*) (pour tous $s < t$, $s, t \in (a, b)$ et $\vec{a} \in \vec{S}^2$) sera appelée une solution de (*).

Cela étant, on peut résumer nos conclusions dans le suivant

THEOREME 1: Toute solution $\vec{u}(t) \in \mathcal{J}_s((a, b))$ des équations de Navier-Stokes est une solution de (*).

Remarquons, qu'on pourrait démontrer que toute solution de (*) vérifie aussi les équations de Navier-Stokes au sens de la

théorie des distributions. Comme cela n'est pas dans l'ordre d'idée de cet article nous ne démontrons plus ce fait.

Dans tout ce qui suit il s'agira seulement des solutions de () mais en vertu du théorème 1 cela concernera aussi les solutions « intermédiaires » des équations de Navier-Stokes.*

§ 3. L'unicité et la dépendance continue des solutions de (*) par rapport aux données initiales et au membres droits.

Quelques remarques préliminaires nous sont nécessaires (pour des faits semblables, voir [2])

LEMME 5: Soit $\vec{u} \in \mathcal{D}_{A^{1+\varrho}}$, $0 \leq \varrho < 1$. Alors $(\partial \vec{u} / \partial x_j) \in \vec{L}^{2p/(p-2)}$ ($j = 1, 2, 3$) et

$$(19) \quad \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} \right|_{2p/(p-2)} \leq C_{21} |A^{1+\varrho} \vec{u}|_2$$

pour tous $\vec{u} \in \mathcal{D}_{A^{1+\varrho}}$, quel que soit p tel que $(3/p) < \varrho < 1$, où la constante C_{21} ne dépend pas de \vec{u} .

Démonstration: Soit $\vec{u} \in \mathcal{D}_A$, tel que $(A^2 - I)\vec{u} = -\Delta \vec{u} = \vec{g} \in \vec{S}_0^\infty$. D'après les formules classiques de Odqvist [19] nous avons alors (notant $\vec{u} = (u_j)$, $\vec{g} = (g_j)$)

$$\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial G_{ik}(x, y)}{\partial x_j} g_k(y) dy$$

où $(G_{ik}(x, y))_{i,k=1,2,3}$ est le tenseur de Green-Odqvist qui correspond au problème

$$\Delta \vec{u}(x) = \text{grad } p(x) + \vec{g}(x), \quad \text{div } \vec{u}(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad u(x) |_{x \in \partial \Omega} = 0.$$

Or, vu que $\partial \Omega$ est de classe C^3 , on a d'après [19]

$$(20) \quad \left| \frac{\partial G_{ik}(x, y)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{C_{22}}{|x - y|^2}$$

où $x, y \in \Omega$, $|x - y|^2 = \sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2$, donc

$$(21) \quad \left| \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq \sum_{k=1}^3 C_{22} \int_{\Omega} \frac{|g_k(y)|}{|x - y|^2} dy \leq C_{23} \int_{\Omega} \frac{g(y)}{|x - y|^2} dy$$

où

$$(21^1) \quad |g|_{L^2 \Omega} \leq C_{24} |\vec{g}|_2.$$

D'après un théorème de V. I. Kondrashov (voir [24], p. 49)

$$G(x) = \int_{\Omega} \frac{g(y)}{|x - y|^2} dy, \quad x \in \Omega$$

appartient à $L^q(\Omega)$ pour tout $q < 6$ et

$$(21^2) \quad |G|_{L^q(\Omega)} \leq C_{25} |g|_{L^2(\Omega)},$$

où C_{25} dépend seulement de Ω et de q . Ainsi (21)-(21²) nous donnent

$$(21^3) \quad \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} \right|_q \leq C_{26} |\vec{g}|_2.$$

Maintenant,

$$\vec{g} = (A^2 - I)\vec{u} = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2} \Big|_{\lambda=A} A^2 \vec{u} = B A^2 \vec{u}$$

où $\|B\| \leq 1$ donc (21³) devient

$$(21^4) \quad \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} \right|_q \leq C_{26} |A^2 \vec{u}|_2$$

où C_{26} dépend seulement de $1 \leq q < 6$ et \vec{u} est arbitraire, sous la condition $\Delta \vec{u} \in \vec{S}_0^\infty$. Comme Ω est borné ces \vec{u} forment un ensemble dense dans \mathcal{D}_A , (métrique $\vec{u} \rightarrow |A^2 \vec{u}|_2$) car $\mathcal{D}_{A^*} = \mathcal{D}_A$ et Δ^{-1} existe (il est en fait l'opérateur integral donné par le

tenseur Green-Odqvist). De cette manière (21⁴) est valable pour tous $\vec{u} \in \mathcal{D}_A$. D'autre part il est manifeste que

$$(21^5) \quad \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} \right|_2 \leq |A\vec{u}|_2$$

pour tout $\vec{u} \in \mathcal{D}_A$. Appliquons maintenant le théorème d'interpolation de J. L. Lions donné dans [17]. On a que la dérivation $\vec{u} \rightarrow \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}$ ($j = 1, 2, 3$) est une application continue de (voir [17])

$$[\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_{A^2}, \delta(\theta)] \quad \text{dans} \quad [\vec{L}^2, \vec{L}^2, \delta(\theta)]$$

où

$$[\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_{A^2}, \delta(\theta)] = \mathcal{D}_{A^{1-\varrho}A^{2\varrho}} = \mathcal{D}_{A^{1+\varrho}}$$

$$[\vec{L}^2, \vec{L}^2, \delta(\theta)] = L^{2\varrho/(1-\varrho)\varrho+2\varrho},$$

c'est-à-dire

$$(21^6) \quad \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} \right|_{2\varrho/(1-\varrho)\varrho+2\varrho} \leq C_{27} |A^{1+\varrho} \vec{u}|_2$$

quel que soit $\vec{u} \in \mathcal{D}_{A^{1+\varrho}}$. Or si

$$\frac{2p}{p-2} = \frac{2q}{(1-\varrho)q+2\varrho},$$

alors (21⁶) devient (19), C_{27} devient C_{21} et p est soumis à la condition $3 < pq$, ce qui achève la démonstration du lemme 5.

LEMME 6: Soit $\vec{a} \in \vec{S}^2$ et $3/p < \varrho < 1$. Alors pour tout $0 < t < T$ on a que $[\partial/\partial x_j]E(t)\vec{a} \in \vec{L}^{2\varrho/(1-\varrho)}$ et

$$(22) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x_j} E(t)\vec{a} \right|_{2\varrho/(1-\varrho)} \leq C_{28} \left(\frac{1}{t} \right)^{(1/2)(1+\varrho)} |\vec{a}|_2, \quad j = 1, 2, 3,$$

où C_{28} est une constante qui ne dépend pas de \vec{a} .

Démonstration: Evidemment que $E(t)\vec{a} \in \mathcal{D}_{A^{1+e}}$ pour $t > 0$.
 En vertu du lemme 5 nous avons

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} E(t)\vec{a} \right|_{2p/(p-2)} \leq C_{21} |A^{1+e}E(t)\vec{a}|_2.$$

Or pour $t > 0$

$$\begin{aligned} |A^{1+e}E(t)\vec{a}|_2^2 &= \int_{-\infty}^0 (1 - \lambda)^{1+e} e^{2t\lambda} d |E_\lambda \vec{a}|_2^2 = \\ &= C_{22} \left(\frac{1}{t}\right)^{1+e} \int_{-\infty}^0 d |E_\lambda \vec{a}|_2^2 = C_{22} \left(\frac{1}{t}\right)^{1+e} |\vec{a}|_2^2, \end{aligned}$$

d'où on déduit (22),

PROPOSITION 3: Soit $\vec{u} = \vec{u}_i(t)$ ($i = 1, 2$) une solution de (*), dont le membre droit correspondant est $\vec{f}(t) = \vec{f}_i(t)$ et soit $q_i > 2p_i/(p_i - 3)$ et $p_i > 3$ tels que $\vec{u}_i(t) \in L^{q_i}((a, b); \vec{L}^{p_i})$; soit $|||\vec{u}_i(\cdot)|||_{p_i, q_i}$ la norme (usuelle) de $\vec{u}_i(t)$ dans $L^{q_i}((a, b); \vec{L}^{p_i})$ et soit $[s, s + T] \subset (a, b)$. Alors on a

$$(23) \quad |u_1(t) - u_2(t)|_2 \leq C_{30} (|\vec{u}_1(s) - \vec{u}_2(s)|_2 + \int_s^{s+T} |f_1(t) - f_2(t)|_2 d\tau),$$

pour tout $t \in [s, s + T]$ où C_{30} est une constante qui dépend seulement de T et $|||\vec{u}_1|||_{p_1, q_1} + |||\vec{u}_2|||_{p_2, q_2}$.

Démonstration: Soit $\vec{w}(t) = \vec{u}_1(t) - \vec{u}_2(t)$. Alors de (*) on déduit

$$\begin{aligned} (\vec{w}(t), \vec{a}) &= (\vec{w}(s), E(t-s)\vec{a}) + \int_s^t (f_1(\tau) - f_2(\tau), E(t-\tau)\vec{a}) d\tau + \\ &+ \int_s^t (b(\vec{u}_1(\tau), \vec{w}(\tau), E(t-\tau)\vec{a}) + b(\vec{w}(\tau), \vec{u}_2(\tau), E(t-\tau)\vec{a})) d\tau, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |(\vec{w}(t), \vec{a})| &\leq |\vec{a}|_2 \left(|\vec{w}(s)|_2 + \int_s^t |f_1(\tau) - f_2(\tau)|_2 d\tau \right) + \\ &+ C_{31} \sum_{j=1}^3 \int_s^t \left(|\vec{u}_j(\tau)|_{p_j} |\vec{w}(\tau)|_2 \left| \frac{\partial}{\partial x_j} E(t-\tau) \vec{a} \right|_{2p_j/(p_j-2)} \right. \\ &\left. + |\vec{w}(\tau)|_2 |\vec{u}_2(\tau)|_{p_2} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} E(t-\tau) \vec{a} \right|_{2p_j/(p_j-2)} \right) d\tau; \end{aligned}$$

en utilisant maintenant le lemme 6 on déduit aussitôt (vu que $\vec{a} \in \vec{S}^2$ est arbitraire)

$$\begin{aligned} |\vec{w}(t)|_2 &\leq |\vec{w}(s)|_2 + \int_s^t |\vec{f}_1(\tau) - \vec{f}_2(\tau)|_2 d\tau + \\ &+ C_{32} \left(\int_s^t \left(|\vec{u}_1(\tau)|_{p_1} \left(\frac{1}{t-\tau} \right)^{(1/2)(1+\rho_1)} \right. \right. \\ &\left. \left. + |\vec{u}_2(\tau)|_{p_2} \left(\frac{1}{t-\tau} \right)^{(1/2)(1+\rho_2)} \right) d\tau \right) \max_{s < \tau < t} |\vec{w}(\tau)|_2, \end{aligned}$$

où $\rho_i p_i > 3$. Choisissons ρ_i tel que $\rho_i < (q_i - 2)/q_i$ et soit $\omega_i = (q_i - 2)/2q_i - (1/2)\rho_i$; alors $\omega_i < 1$ et

$$\begin{aligned} |\vec{w}(t)|_2 &\leq |\vec{w}(s)|_2 + \int_s^t |\vec{f}_1(\tau) - \vec{f}_2(\tau)|_2 d\tau + \\ &+ C_{33} \left(\max_{s < \tau < t} |\vec{w}(\tau)|_2 \right) \left(\|\vec{u}_1\|_{p_1, q_1}(t-s)^{\omega_1} + \right. \\ &\left. + \|\vec{u}_2\|_{p_2, q_2}(t-s)^{\omega_2} \right) \leq |\vec{w}(s)|_2 + \int_s^t |\vec{f}_1(\tau) - \vec{f}_2(\tau)|_2 d\tau + \\ &+ C_{34} \left(\max_{s < \tau < t} |\vec{w}(\tau)|_2 \right) \left(\|\vec{u}_1\|_{p_1, q_1} + \|\vec{u}_2\|_{p_2, q_2}(t-s)^\omega \right), \end{aligned}$$

où $\omega = \min \{ \omega_1, \omega_2 \}$. D'ici il s'ensuit directement que

$$(24) \quad \begin{aligned} |\vec{w}(t)|_2 \leq & |\vec{w}(s)|_2 + \int_s^{s+\theta} |\vec{f}_1(\tau) - \vec{f}_2(\tau)|_2 d\tau + \\ & + C_{35} \theta^\omega \max_{s < \tau < s+\theta} |\vec{w}(\tau)|_2, \end{aligned}$$

où $s \leq t \leq s + \theta \leq s + T$ et C_{35} dépend seulement de

$$||| \vec{u}_1 |||_{p_1, q_1} + ||| \vec{u}_2 |||_{p_2, q_2}.$$

De (24) on déduit aisément

$$(1 - C_{35} \theta^\omega) \max_{s < \tau < s+\theta} |\vec{w}(\tau)|_2 \leq |\vec{w}(s)|_2 + \int_s^{s+\theta} |\vec{f}_1(\tau) - \vec{f}_2(\tau)|_2 d\tau.$$

Soit $\theta_0 = (2C_{35})^{-\omega}$; alors

$$\sup_{s < \tau < s+\theta_0} |\vec{w}(\tau)|_2 \leq 2 \left(|\vec{w}(s)|_2 + \int_s^{s+\theta_0} |\vec{f}_1(\tau) - \vec{f}_2(\tau)|_2 d\tau \right),$$

où θ_0 ne dépend pas de $s \in (a, b)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \max_{s+\theta_0 < \tau < s+2\theta_0} |\vec{w}(\tau)|_2 & \leq 2 \left(|\vec{w}(s + \theta_0)|_2 + \int_{s+\theta_0}^{s+2\theta_0} |\vec{f}_1(\tau) - \vec{f}_2(\tau)|_2 d\tau \right) \leq \\ & \leq 2^2 \left(|\vec{w}(s)|_2 + \int_s^{s+2\theta_0} |\vec{f}_1(\tau) - \vec{f}_2(\tau)|_2 d\tau \right), \end{aligned}$$

et ainsi de suite on obtient

$$\max_{s < t < s+k\theta_0} |\vec{w}(\tau)|_2 \leq 2^k \left(|\vec{w}(s)|_2 + \int_s^{s+k\theta_0} |\vec{f}_1(\tau) - \vec{f}_2(\tau)|_2 d\tau \right).$$

Or pour un k assez grand on a $k\theta_0 > T$ donc (23) est complètement démontrée.

Une conséquence évidente de la proposition 3, est la suivante propriété d'unicité:

PROPOSITION 4: Soient $\vec{u}_i(t) (i = 1, 2)$ deux solutions de (*) telles que $\vec{u}_1(s) = \vec{u}_2(s)$ pour un $s \in (a, b)$. Alors on a aussi $\vec{u}_1(t) = \vec{u}_2(t)$ pour tout $t \in [s, b]$.

On a aussi la suivante:

PROPOSITION 5: Soit $\vec{u}_i(t) (i = 1, 2, 3, \dots)$ une solution de (*) dont le membre droit $\vec{f}(t) = \vec{f}_i(t)$ converge dans \vec{L}^2 uniformément sur $[s, s + T]$. Supposons de plus que $\vec{u}_i(t) \in L^q((a, b); \vec{L}^p)$ avec $q > 2p/(p - 3), p > 3$, telle que $||| \vec{u}(\cdot) |||_{p,q} \leq C_{36}$ (où p, q, C_{36} sont indépendants de $i = 1, 2, \dots$) et que $\vec{u}_i(s) \rightarrow \vec{u}$ dans \vec{S}^2 (pour $i \rightarrow \infty$).

Alors pour $i \rightarrow \infty, \vec{u}_i(t)$ converge (dans \vec{S}^2) uniformément sur $[s, s + T]$ vers une solution (dans $(s, s + T)$!) de (*), dont le membre droit est $\vec{f}(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \vec{f}_i(t)$.

Démonstration: La relation (23) montre que $\{\vec{u}_i(t)\}$ est une suite uniformément convergente (dans \vec{S}^2) sur $[s, s + T]$. Soit $\vec{u}(t)$ la fonction limite. Evidemment $\vec{u}(t)$ est continue de $[s, s + T]$ dans \vec{S}^2 . Montrons que $\vec{u}(t) \in L^q((s, s + T); \vec{L}^p)$. Dans ce but remarquons de plus qu'on a

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \left(\int_s^{s+T} (|\vec{u}(t)|_p)^q dt \right)^{1/q} & \text{si } q < \infty \\ \text{vrai max}_{s \leq t \leq s+T} |\vec{u}(t)|_p & \text{si } q = \infty \end{array} \right\} \leq C_{36} .$$

En effet de $\vec{u}_i(t) = \{u_{i,j}(t, x)\} \rightarrow \vec{u}(t) = \{u_j(t, x)\}$ dans \vec{L}^2 , uniformément sur $[s, s + T]$ on déduit que $u_{i_{k_j}}(t, x) \rightarrow u_j(t, x)$ presque partout dans $[s, s + T] \times \Omega$, pour une certaine sous-suite $\{i_s\}$ d'indices. Soit $\mathcal{N} \subset (s, s + T) \times \Omega$ l'ensemble exceptionnel de mesure nulle et soit N l'ensemble des $t \in (s, s + T)$ tels que $\{(t, x); x \in \Omega\} \cap \mathcal{N}$ n'est pas de mesure nulle dans Ω . Alors N

est de mesure nulle sur $(s, s + T)$. Soit maintenant $\vec{v}_h(t)$ le vecteur défini par

$$\vec{v}_h(t) = \{v_{hj}(t, x)\} = \left\{ \inf_{k \geq h} \{ |u_{ik}(t, x)| \} \right\}.$$

Alors pour $t \in N$, on a $v_{hj}(t, x) \rightarrow |u_j(t, x)|$ en croissant donc en vertu du théorème de Beppo-Levi si $p < \infty$ $|\vec{v}_h(t)|_p \rightarrow |\vec{u}(t)|_p$ (en croissant) et par suite on a aussi (vu que N est de mesure nulle)

$$\left(\int_s^{s+T} (|\vec{v}_h(t)|_p)^q dt \right)^{1/q} \rightarrow \left(\int_s^{s+T} (|\vec{u}(t)|_p)^q dt \right)^{1/q}$$

ou

$$\text{vrai max}_{s < t \leq s+T} |\vec{v}_h(t)|_p \rightarrow \text{vrai max}_{s < t \leq s+T} |\vec{u}(t)|_p,$$

(suivant la valeur de q). Comme il est évident que les expressions gauches de ces relations sont majorées par C_{3s} , ces relations entraînent (25).

Ecrivons maintenant (*) pour chaque $\vec{u}_i(t)$ en remplaçant s par un $\sigma \in (s, s + T)$. Nous avons

$$\begin{aligned} (\vec{u}_i(t), \vec{a}) &= (\vec{u}_i(\sigma), E(t - \sigma)\vec{a}) + \int_{\sigma}^t ((f_i(\tau), E(t - \tau)\vec{a}) + \\ &+ b(\vec{u}_i(\tau), \vec{u}_i(\tau), E(t - \tau)\vec{a})) d\tau, \end{aligned}$$

où évidemment

$$(\vec{u}_i(t), \vec{a}) \rightarrow (\vec{u}(t), \vec{a}), \quad (\vec{u}_i(\sigma), E(t - \sigma)\vec{a}) \rightarrow (\vec{u}(\sigma), E(t - \sigma)\vec{a})$$

35

$$\int_{\sigma}^t (f_i(\tau), E(t - \tau)\vec{a}) d\tau \rightarrow \int_{\sigma}^t (f(\tau), E(t - \tau)\vec{a}) d\tau.$$

Par conséquent pour déduire que $\vec{u}(t)$ est une solution (dans

($s, s + T$) de (*) (à membre droit $\vec{f}(t)$) il suffira de montrer que

$$\int_{\sigma}^t b(\vec{u}_i(\tau), \vec{u}_i(\tau), E(t - \tau)\vec{a})d\tau \rightarrow \int_{\sigma}^t b(\vec{u}(\tau), \vec{u}(\tau), E(t - \tau)\vec{a})d\tau .$$

Or la différence de ces deux intégrales est, compte tenu de (8), (22) et (23) plus petite que

$$C_{37} \|\vec{a}\|_2 (t - \sigma)^{(q-2)/2q - (1/2)\epsilon} \max_{\sigma < \tau < t} \|\vec{u}_i(\tau) - \vec{u}(\tau)\|_2 \rightarrow 0 ,$$

où $3/p < \epsilon < (q - 2)/q$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

§ 4. Propriétés ultérieures des solutions de (*).

Comme Ω est supposé un domaine borné de R^n , il existe alors une constante C_{38} (dont on connaît beaucoup d'évaluations; voir [23], [24], etc.) telle que pour tout $a(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ on ait

$$(26) \quad \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial a}{\partial x_j} \right|^2 \right) dx \geq C_{38} \int_{\Omega} |a|^2 dx$$

Ceci entraîne, que, dans ce cas, on a

$$(26^1) \quad (\Delta \vec{a}, \vec{a}) \geq C_{38} (\vec{a}, \vec{a}) , \quad \vec{a} \in \mathcal{D}_{\Delta} ,$$

donc que le spectre de Δ est situé à gauche de $-C_{38}$. (Les évaluations (26) ou (26¹) ne sont pas liées au cas où Ω est borné. Il suffit pour cela que Ω soit d'épaisseur bornée dans une direction. Le théorème d'unicité de la solution « petite » de (*) est probablement, valable aussi dans ce cas sous une condition supplémentaire évidente.)

LEMME 8: Soit $\Gamma > 0$. Alors on a

$$(27) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x_j} E(t)E_{-\Gamma} \vec{a} \right|_{2\nu/(p-2)} \leq \\ \leq |\vec{a}|_2 C_{39} \cdot \begin{cases} \left(\frac{1}{t}\right)^{(1+e)/2} & \text{si } 0 < t < \frac{C_{40}}{1+\Gamma} \\ (1+\Gamma)^{(1+e)/2} e^{-\nu\Gamma t} & \text{si } \frac{C_{40}}{1+\Gamma} \leq t \end{cases}$$

quel que soit $\vec{a} \in \vec{S}^2$ où c_{39} et C_{40} ne dépendent ni de \vec{a} ni de Γ , et $3 < qp$, $e < 1$.

Démonstration: D'après le lemme 5 on a

$$(28) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x_j} E(t)E_{-\Gamma} \vec{a} \right|_{2\nu/(p-2)} \leq C_{21} |A^{1+e}E(t)E_{-\Gamma} \vec{a}|_2$$

(où $3/p < e < 1$), donc il nous reste à majorer $|A^{1+e}E(t)E_{-\Gamma}|$.
On a

$$\begin{aligned} |A^{1+e}E(t)E_{-\Gamma} \vec{a}|_2^2 &= \int_{-\infty}^{-\Gamma} (1-\lambda)^{1+e} e^{2\nu\lambda t} d|E_\lambda \vec{a}|_2^2 \leq \\ &\leq \begin{cases} |\vec{a}|_2^2 \left(\frac{1+e}{2\nu t}\right)^{1+e} e^{2\nu t - (1+e)} & \text{si } 0 < t \leq \frac{1+e}{2\nu(1+\Gamma)} \\ |\vec{a}|_2^2 (1+\Gamma)^{1+e} e^{-2\nu\Gamma t} & \text{si } \frac{1+e}{2\nu(1+\Gamma)} \leq t, \end{cases} \end{aligned}$$

d'où (27) s'ensuit par l'intermédiaire de (28).

THÉORÈME 2: Soit $a = -\infty$; alors il existe, au plus, une solution $\vec{u}(t)$ de (*) vérifiant l'une des conditions suivantes

$$(29) \quad \begin{cases} \left(\int_{-\infty}^b (|\vec{u}(t)|_p)^q dt \right)^{1/q} < \infty \text{ pour un certain } 3 < p \leq \infty \text{ et } \frac{2p}{p-3} < q < \infty, \\ \text{vrai max}_{-\infty < t < b} |\vec{u}(t)|_p < C_{41}(p) \text{ pour un certain } 3 < p \leq \infty, \end{cases}$$

où, $C_{41} > 0$ est une constante qui dépend seulement de Ω et p (et ne dépend pas de la fonction du membre droit de (*)).

Démonstration: Soient $\vec{u}_1(t)$ et $\vec{u}_2(t)$ deux solutions (dans $(-\infty, b)$) de (*) et soit $\vec{w}(t) = \vec{u}_1(t) - \vec{u}_2(t)$. Nous avons

$$(30) \quad \begin{aligned} (\vec{w}(t), \vec{a}) &= (\vec{w}(s), E(t - S)\vec{a}) + \\ &+ \int_s^t (b(\vec{u}_1(\tau), \vec{w}(\tau), E(t - \tau)\vec{a}) + \\ &+ b(\vec{w}(\tau), \vec{u}_2(\tau), E(t - \tau)\vec{a})) d\tau, \end{aligned}$$

quels que soient $s, t \in (-\infty, b)$, $s < t$ et $\vec{a} \in \vec{S}^2$. Comme Ω est borné on a pour tout $\vec{u} \in \vec{L}^p(p \geq 2)$, $|\vec{u}|_2 \leq C_{42} |\vec{u}|_p$ et par suite, vu que chaque $\vec{u}_i(t)$ vérifie une condition (29), il existe un $1 < q < \infty$ tel que

$$(31) \quad \int_{T-C_{43}}^T (|\vec{w}(t)|_2)^q dt \leq C_{44}(C_{43})$$

quel que soit $T \in (-\infty, b)$ et $C_{43} > 0$. Mais de la proposition 3 on obtient

$$|\vec{w}(t)|_2 \leq C_{45} |\vec{w}(s)|_2$$

pour tout $0 \leq t - s \leq C_{43}$, où C_{45} est une constante qui ne dépend ni de s ni de t . Par suite de (31) on a $(|\vec{w}(T)|_2)^q \leq \frac{C_{45}^q}{C_{43}^q} \int_{T-C_{43}}^T (|\vec{w}(s)|_2)^q ds \leq \frac{C_{45}^q}{C_{43}^q} C_{44} = C_{46}^q$ ce qui montre que $|\vec{w}(t)|_2$ est borné sur $(-\infty, b)$.

Remarquons maintenant que le spectre de Δ^{\wedge} est situé a gauche de $-C_{33}$ donc $E_{-C_{33}} = I$ et par suite de (30) et de (27) nous obtenons (pour $t - s$ assez grand)

$$\begin{aligned} |\vec{w}(t)|_2 &\leq |\vec{w}(s)|_2 e^{-\nu_{33}(t-s)} + \sum_{i=1}^2 C_{47}^{(i)} \left(\int_{t-C_{48}^{(i)}}^t |\vec{u}_i(\tau)|_{p_i} |\vec{w}(\tau)|_2 \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left(\frac{1}{t-\tau} \right)^{(1+q_i)/q} d\tau + \int_0^{t-C_{48}^{(i)}} |\vec{u}_i(\tau)|_{p_i} |\vec{w}(\tau)|_2 e^{-\nu_{33}(t-\tau)} d\tau \right). \end{aligned}$$

Choisissons, une fois pour toutes, pour chaque pair p, q telle que $3 < p \leq \infty, 2p/(p - 3) < q \leq \infty$ un $\varrho = \varrho(p, q)$ tel que $3/p < \varrho < (q - 2)/q$. Ceci fait, dans la relation de ci-dessus, on obtient que $C_{47}^{(q)}$ et $C_{48}^{(q)}$ sont des constantes qui dépendent seulement de p_i et q_i , c'est-à-dire que $C_{47}^{(q)} = C_{47}(p_i, q_i), C_{48}^{(q)} = C_{48}(p_i, q_i)$ où C_{47} et C_{48} sont deux certaines fonctions.

Considérons le cas où $q_i = \infty$. Alors

$$I'_i(t) = \int_{t - C_{48}^{(q)}}^t |\vec{u}_i(\tau)|_{p_i} |\vec{w}(\tau)|_2 \left(\frac{1}{t - \tau}\right)^{(1+\varrho_i)/2} d\tau \leq$$

$$\leq (\text{vrai max}_{-\infty < \tau < b} |\vec{u}_i(\tau)|_{p_i}) \left(\max_{t - C_{48}^{(q)} < \tau < t} |\vec{w}(\tau)|_2 \right) C_{49}(p_i)$$

et

$$I''_i(t) = \int_s^{t - C_{48}^{(q)}} |\vec{u}_i(\tau)|_{p_i} |\vec{w}(\tau)|_2 e^{-\nu C_{50}(t-\tau)} d\tau \leq$$

$$(\text{vrai max}_{-\infty < \tau < b} |\vec{u}_i(\tau)|_{p_i}) \left(\max_{s < \tau < t - C_{48}^{(q)}} |\vec{w}(\tau)|_2 \right) C_{50}(p_i).$$

Soit $C_{41}(p) = (1/2) C_{47}(p)^{-1} (C_{49}(p) + C_{50}(p))^{-1}$. Nous allons montrer que ces nombres jouissent de la propriété exigée dans l'énoncé du théorème. Dans ce qui suit, nous supposons que si $q_i = \infty$, alors $\text{vrai max}_{-\infty < t < b} |\vec{u}_i(t)| < C_{41}(p)$.

Considérons maintenant le deuxième cas où $q_i < \infty$. Alors

$$I'_i(t) = \int_{t - C_{48}^{(q)}}^t |\vec{u}_i(\tau)|_{p_i} |\vec{w}(\tau)|_2 \left(\frac{1}{t - \tau}\right)^{(1+\varrho_i)/2} d\tau \leq$$

$$\leq \left(\int_{t - C_{48}^{(q)}}^t (|\vec{u}_i(\tau)|_{p_i})^{\varrho_i} d\tau \right)^{1/\varrho_i} \left(\max_{t - C_{48}^{(q)} < \tau < t} |\vec{w}(\tau)|_2 \right) C_{51}(p_i, q_i),$$

et

$$\begin{aligned}
 I_i''(t) &= \int_s^{t-C_{48}^{(i)}} |\vec{u}_i(\tau)|_{p_i} |\vec{w}(\tau)|_2 e^{-\nu c_{28}(t-\tau)} d\tau \leq \\
 &\leq \left(\int_s^{t-C_{48}^{(i)}} (|\vec{u}_i(\tau)|_{p_i})^{q_i} d\tau \right)^{1/q_i} \left(\max_{s < \tau < t-C_{48}^{(i)}} |\vec{w}(\tau)|_2 \right) C_{52}(p_i, q_i)
 \end{aligned}$$

d'où évidemment si $t < t(\varepsilon)$ on a

$$I_i'(t) + I_i''(t) < \varepsilon C_{53}(p_i, q_i) \left(\sup_{-\infty < \tau < t} |w(\tau)|_2 \right).$$

Choisirons ε assez petit afin que $\varepsilon C_{53}(p_i, q_i) C_{47}(p_i, q_i) < 1/2$. Ceci fait, on a dans tous les cas

$$|\vec{w}(t)|_2 \leq |\vec{w}(s)|_2 e^{-\nu c_{28}(t-s)} + \theta \sup_{-\infty < \tau < t} |w(\tau)|_2$$

où $0 < \theta < 1$ est fixe, $t \leq t_\theta$ et $t - s$ est assez grand.

En faisant $s \rightarrow -\infty$, on déduit $|\vec{w}(t)|_2 \leq \theta \sup_{-\infty < \tau \leq t} |\vec{w}(\tau)|_2$ d'où pour tout $\tau \in (-\infty, t]$

$$|\vec{w}(\tau)|_2 \leq \theta \sup_{-\infty < \sigma < \tau} |\vec{w}(\sigma)|_2 \leq \theta \sup_{-\infty < \sigma < t} |\vec{w}(\sigma)|_2$$

donc

$$\sup_{-\infty < \tau < t} |\vec{w}(\tau)|_2 \leq \theta \sup_{-\infty < \tau < t} |\vec{w}(\tau)|_2,$$

ce qui n'est pas possible que si $\vec{w}(t) \equiv 0$ pour $t \leq t_\theta$. Par conséquent il existe un t_θ tel que $\vec{u}_1(t) \equiv \vec{u}_2(t)$ pour $t \leq t_\theta$. De la proposition 4 s'ensuit alors que $\vec{u}_1(t) \equiv \vec{u}_2(t)$ pour tout $t \in [t_\theta, b)$ donc $\vec{u}_1(t) \equiv \vec{u}_2(t)$ pour tout $t \in (-\infty, b)$, ce qui achève la démonstration du théorème 2.

Un cas particulier du théorème 2 a une prégnante interprétation physique, notamment le cas où $p = q = \infty$. En effet, on peut exprimer le résultat correspondant de la manière sui-

vante: Si l'écoulement d'un fluide possède dans chaque moment un nombre de Reynolds assez petit, alors cet écoulement est uniquement déterminé.

Donnons encore une propriété utile des solutions de (*).

PROPOSITIONS 6: Soient $\vec{u}_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) des solutions de (*) aux membres droits correspondants $\vec{f}_i(t)$. Alors si

$$(32) \quad \begin{aligned} ||| \vec{u}_i(\cdot) |||_{p,q} &\leq C_{54}, \\ \text{vrai max}_{s < t < s+T} |\vec{f}_i(\tau)|_2 &\leq C_{55}, \quad |\vec{u}_i(s)|_2 \leq C_{56}, \end{aligned}$$

(où C_{54}, C_{55}, C_{56} et p, q sont indépendants de $i = 1, 2, \dots$), l'ensemble $\{\vec{u}_i(t)\}_{i=1,2,3,\dots} \subset \vec{S}^2$ est relativement compact pour tout $t \in (s, T)$.

Démonstration: Soit Γ très grand tel que $-\Gamma < -C_{38}$. En remplaçant dans (*), \vec{a} par $E_{-\Gamma}\vec{b}$ et en tenant compte de (32) et (27) nous obtenons

$$\begin{aligned} |(\vec{u}_i(t), E_{-\Gamma}\vec{b})| &\leq C_{56}e^{-\nu(t-s)\Gamma} |\vec{b}|_2 + C_{55} \frac{2}{\nu\Gamma} |\vec{b}|_2 + \\ &+ |\vec{b}|_2 C_{57} \left(\int_{t-(C_{40}/(1+\Gamma))}^t |\vec{u}_i(\tau)|_p |\vec{u}_i(\tau)|_2 \left(\frac{1}{t-\tau}\right)^{(1+\varrho)/2} d\tau + \right. \\ &\left. + \int_s^{t-(C_{40}/(1+\Gamma))} (1+\Gamma)^{(1+\varrho)/2} e^{-\nu\Gamma(t-\tau)} |\vec{u}_i(\tau)|_p |\vec{u}_i(\tau)|_2 d\tau \right) \end{aligned}$$

d'où

$$(33) \quad \begin{aligned} |E_{-\Gamma}\vec{u}_i(t)|_2 &\leq C_{58} \left(e^{-\nu\Gamma(t-s)} + \frac{1}{\Gamma} \right) + \\ C_{59} \left(\frac{1}{1+\Gamma} \right)^\omega \max_{S < \tau < t} |\vec{u}_i(\tau)|_2 &+ C_{60} \frac{(1+\Gamma)^{(1+\varrho)/2}}{\Gamma} \max_{s < \tau < t} |\vec{u}_i(\tau)|_2, \end{aligned}$$

ω étant entre 0 et 1.

Faisons dans (23), $\vec{u}_1(t) \equiv \vec{u}_i(t)$ et $\vec{u}_2(t) \equiv 0$ (resp. $\vec{f}_1(t) \equiv$

$\equiv \vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t) \equiv 0$). Alors de (23) et de (32) il résulte que

$$(33^1) \quad \max_{s < \tau < t} |\vec{u}_i(\tau)|_2 \leq C_{61}(t),$$

et par suite, pour un $t > s$ fixé, (33) devient

$$(33^2) \quad |E_{-r}\vec{u}_i(t)|_2 \leq C_{62}r^{-\theta}$$

où $\theta \in (0, 1)$ est convenablement choisi. D'autre part comme le plongement de \vec{S}_1^2 dans \vec{S}^2 est complètement continu (voir [24], théorème de S. L. Sobolev) l'inverse de l'opérateur Δ^\wedge est complètement continu et par conséquent $I - E_{-r}$ est une projection orthogonale sur l'espace de dimension finie des vecteurs propres $\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_{k_r}$ de Δ^\wedge correspondants aux valeurs propres $> -r$. Il résulte que

$$\vec{u}_i(t) = \vec{v}_i(t) + \sum_{h=1}^{k_r} u_{ih}(t)\vec{\varphi}_h$$

où (voir (33¹) et (33²))

$$|v_i(t)|_2 \leq C_{62}r^{-\theta}, \quad \sum_{h=1}^{k_r} |u_{ih}(t)|^2 \leq C_{63}.$$

Mais dans C^{∞}_r la boule de rayon $\sqrt{C_{63}}$ est compacte, par suite il existe un système $\vec{\psi}_i = \sum_{h=1}^{k_r} \alpha_{ih}\vec{\varphi}_h$ ($i = 1, 2, \dots, l_r$) tel que pour tout $\sum_{h=1}^{k_r} u_{ih}(t)\vec{\varphi}_h$ on ait un $\vec{\psi}_i$ vérifiant $|\sum_{h=1}^{k_r} u_{ih}(t)\vec{\varphi}_h - \vec{\psi}_i|_2 \leq C_{62}r^{-\theta}$. De cette manière, pour tout $\vec{u}_i(t)$ il existe un $\vec{\psi}_i$ tel que

$$|\vec{u}_i(t) - \vec{\psi}_i|_2 < 2C_{62}r^{-\theta}.$$

Comme r est à notre disposition, il résulte que $\{u_i(t)\}$ est totalement bornée dans \vec{S}^2 , donc y relativement compacte.

§ 5. La presque périodicité des solutions de (*).

Une fonction $\vec{g}(t)$ de $(-\infty, +\infty)$ dans \vec{L}^2 est *presque-périodique* (au sens de S. Bochner [1]) si elle est continue et de toute suite $\{\vec{g}(t + h)\}$ de translations de $\vec{g}(t)$ on peut choisir une sous-suite $\{\vec{g}(t + h_{n_p})\}$ convergenat (dans \vec{L}^2) uniformément sur $(-\infty, +\infty)$ ⁴).

THEOREME 3: *Supposons que $\vec{f}(t)$ (le membre droit de (*)) soit presque-périodique. Alors la solution $\vec{u}(t)$, dans $(-\infty, +\infty)$ de (*) vérifiant une des conditions*

$$(29^1) \left\{ \begin{array}{l} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (|\vec{u}(t)|_p)^q dt \right)^{1/q} < \infty \\ \text{pour un certain } 3 < p \leq \infty \text{ et } 2p/(p-3) < q < \infty \\ \text{vrai max}_{-\infty < t < +\infty} |\vec{u}(t)|_p < C_{41}(p) \text{ pour un certain } 3 < p \leq \infty, \end{array} \right.$$

est presque-périodique (dans le cas où elle existe);

Démonstration: Soit $\{\vec{u}(t + h_m)\}$ une suite de translations de $\vec{u}(t)$. Nous devons démontrer qu'on peut extraire une sous-suite uniformément convergente (dans \vec{S}^2) sur tout $(-\infty, +\infty)$. Pour cela nous reproduirons l'argumentation donnée dans [4] qui par les préparations que nous avons faites marchera aussi dans ce cas.

Nous pouvons déjà supposer que $\{\vec{f}(t + h_m)\}$ est une suite uniformément convergente dans \vec{L}^2 sur tout $(-\infty, +\infty)$. Supposons que $\{\vec{u}(t + h_m)\}$ n'est pas uniformément convergente sur tout $(-\infty, +\infty)$. Alors il existerait deux suites $\{\vec{u}(t_p + h_{m'_p})\}$

⁴ Il est bien connu (voir [1]) que les propriétés des développements (III), (III') caractérisent justement le fait que

$$\vec{f}(t) = (f_1(t, x), f_2(t, x), f_3(t, x)) \quad \text{et} \quad \vec{u}(t) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))$$

sont presque-périodiques dans le sens de ci-dessus, de $(-\infty, +\infty)$ à \vec{L}^2 .

et $\{\vec{u}(t_p + h_{m_p}'')\}$ et un $\varepsilon > 0$ fixe, tels que

$$(34) \quad |\vec{u}(t_p + h_{m_p}'') - \vec{u}(t_p + h_{m_p}')|_2 \geq \varepsilon.$$

Comme la suite $\{\vec{f}(t + h_m)\}$ était uniformément convergente sur $(-\infty, +\infty)$ il résulte (en utilisant de nouveau la presque-périodicité de $\vec{f}(t)$ et en passant, si nécessaire, à des sous-suites) que $\{\vec{f}(t + t_p + h_{m_p}')\}$ et $\{\vec{f}(t + t_p + h_{m_p}'')\}$ convergent (dans \vec{L}^2) uniformément sur $(-\infty, +\infty)$ vers la même fonction $\vec{f}^*(t)$. Prenons dans la proposition 6, $s = -1$, $t = 0$ et $\vec{u}_i(t) = \vec{u}(t + t_i + h_{m_i}')$. Alors $\{\vec{u}(t_i + h_{m_i}')\}$ est relativement compact (dans \vec{S}^2) et le même est vrai pour $\{\vec{u}(t_i + h_{m_i}'')\}$. Il existe une sous-suite $\{\vec{u}(t_{i_1} + h_{m_{i_1}}')\}$, resp. $\{\vec{u}(t_{i_1} + h_{m_{i_1}}'')\}$ convergente. Prenons dans la proposition 6, $\vec{u}_i(t) = \vec{u}(t + t_{i_1} + h_{m_{i_1}}')$ ou $\vec{u}_i(t) = \vec{u}(t + t_{i_1} + h_{m_{i_1}}'')$ et $s = -2$, $t = -1$, repétons le même raisonnement et ainsi de suite. Par le procédé diagonal on peut extraire deux sous-suites $\{\vec{u}(t + t_{pp} + h_{m_{pp}}')\}$ et $\{\vec{u}(t + t_{pp} + h_{m_{pp}}'')\}$ qui vérifient (34) et de plus convergent (dans \vec{S}^2) en tous les points $s = 0, -1, -2, \dots$. Appliquons maintenant la proposition 5 à chacune de nos deux suites. Il résulte que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \vec{u}(t + t_{pp} + h_{m_{pp}}') = \vec{u}^*(t), \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \vec{u}(t + t_{pp} + h_{m_{pp}}'') = \vec{u}^{**}(t)$$

existent, vérifient (29¹) (voir (25)) et sont des solutions dans $(-\infty, +\infty)$ de (*), donc en vertu du théorème 2, $\vec{u}^*(t) \equiv \vec{u}^{**}(t)$ et en particulier $\vec{u}^*(0) = \vec{u}^{**}(0)$ en contradiction avec (34). La contradiction obtenue provient de ce que $\{\vec{u}(t + h_m)\}$ a été supposée non-uniformément convergente sur $(-\infty, +\infty)$. Le théorème 3 est donc complètement démontré.

Il faut préciser que dans le théorème 3, seulement la condition

$$\text{vrai max}_{-\infty < t < \infty} |\vec{u}(t)|_p < C_{41}(p)$$

est vraiment utile. En effet on a le suivant corollaire du théorème 3:

PROPOSITION 7: Si $\vec{f}(t)$ est presque périodique, il n'existe aucune solution $\vec{u}(t) \neq 0$ (dans $(-\infty, +\infty)$) de (*) vérifiant

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (|\vec{u}(t)|_2)^q dt \right)^{1/q} < \infty,$$

pour certains p et q tels que $3 < p \leq \infty$ et $2p/(p-3) < q < \infty$.

Démonstration: D'après le théorème 3, $\vec{u}(t)$ est presque-périodique, donc $|\vec{u}(t)|_2$ en est aussi, et par conséquent si $\vec{u}(t) \neq 0$ on aurait

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |\vec{u}(t)|_2 dt > 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |\vec{u}(t)|_2 dt &\leq \frac{C_{42}}{2T} \int_{-T}^T |\vec{u}(t)|_2 dt \leq \\ &\leq \frac{C_{42}}{2T} (2T)^{(q-1)/q} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (|\vec{u}(t)|_2)^q dt \right)^{1/q} = C_{44} T^{-1/q} \rightarrow 0; \end{aligned}$$

la contradiction obtenue provient de la supposition que $\vec{u}(t) \neq 0$.

Par conséquent $\vec{u}(t) \equiv 0$ (et par suite $\vec{f}(t) \equiv 0$ aussi).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOCHNER S.: *Abstrakte fastperiodische Funktionen*. Acta Math, t. 61, 1933, p. 149-184.
- [2] CATTABRIGA L.: *Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes*. Rend. Sem. Mat. Padova, 1961, p. 1-33.
- [3] FOIAS C.: *Une remarque sur l'unicité des solutions des équations de Navier-Stokes en dimension n*. Bull. Soc. Math. France, t. 89, 1961, p. 1-8.
- [4] FOIAS C., ZAIDMAN S.: *Almost-periodic solutions of parabolic systems*. Annali di Sc. Norm. Sup. Pisa, t. 15, 1961, p. 247-262.
- [5] FOIAS C., LIONS J. L.: *Sur certains théorèmes d'interpolation*. Acta Scient. Math, t. 22, 1961, p. 269-282.
- [6] HILLE E., PHILLIPS R. S.: *Functional Analysis and Semi-groups*. New-York, 1957.

- [7] HOPF E.: *Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen*. Math. Nachr., t. 4, 1951, p. 126-132.
- [8] JUDOVICI J.: *Mouvements périodiques d'un fluide visqueux incompressible*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, t. 130, 1960, p. 1214-1217.
- [9] KISELEV A. A., LADYZENSKAIA O. A.: *Sur l'existence et l'unicité de la solution du problème non-stationnaire pour un liquide visqueux incompressible*. Izvestiya Akad. Nauk SSSR, t. 21, 1957, p. 665-680.
- [10] KREIN M. G.: *La théorie des prolongements autoadjoints des opérateurs hermitiques semibornés et ses applications*. Mat. Sbornik, t. 20 (62), 1947, p. 431-495.
- [11] LADYZENSKAYA O. A.: *Solution globale du problème aux limites pour l'équation de Navier-Stokes en deux variables d'espace*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, t. 123, 1958, p. 427-429.
- [12] LADYZENSKAYA O. A.: *Solution « in the large » of the nonstationary boundary value problem for the Navier-Stokes system with two space variables*. Com. Pure Appl. Math., t. 12, 1959, p. 427-433.
- [13] LERAY J.: *Étude de diverses équations intégrales non-linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique*. Journ. Math. pures appl., 9^e série, t. 12, 1933, p. 1-28.
- [14] LERAY J.: *Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois*. Journ. Math. pures appl., 9^e série, t. 13, 1934, p. 193-248.
- [15] LIONS J. L.: *Quelques résultats d'existence dans des équations aux dérivées partielles non-linéaires*. Bull. Soc. Math. France, t. 87, 1959, p. 245-273.
- [16] LIONS J. L.: *Sur certains problèmes différentiels non linéaires*. C. R. Acad. Sci., t. 252, 1961, p. 657-659.
- [17] LIONS J. L.: *Sur certains théorèmes d'interpolation*. C. R. Acad. Sci, t. 250, 1960, p. 2104-2106.
- [18] LIONS J. L., PRODI G.: *Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2*. C. R. Acad. Sci, t. 248, 1959, p. 3519-3521.
- [19] ODQVIST F. K. G.: *Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten*. Math. Zeitschr., t. 32, 1930, p. 329-376.
- [20] PRODI G.: *Un teorema di unicita per le equazioni di Navier-Stokes*. Ann. Mat. pura appl., t. 48, 1959, p. 173-182.
- [21] PRODI G.: *Qualche risultato riguardo alle equazioni di Navier-Stokes sul caso bidimensionale*. Ren. Semin. mat. Univ. Padova, t. 30, 1960, p. 1-15.
- [22] RIESZ F., NAGY B. Sz.: *Leçons d'analyse fonctionnelle*. 3-ième édition, Budapest-Paris, 1955.
- [23] SOBOLEV S. L.: *Quelques applications de l'analyse fonctionnelle à la physique mathématique*. Moscou-Leningrad, 1950.
- [24] SOBOLEV S. L.: *Quelques applications de l'analyse fonctionnelle à la physique mathématique*. Moscou-Leningrad, 1950.