Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Domenico Boccioni

Condizioni di distributività con almeno una operazione commutativa

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 31 (1961), p. 87-103

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__87_0>

CONDIZIONI DI DISTRIBUTIVITÀ CON ALMENO UNA OPERAZIONE COMMUTATIVA

Nota (*) *di* DOMENICO BOCCIONI (*a Padova*)

Se B è un insieme avente numero cardinale (non necessariamente finito) $\nu \geqslant 2$, si considerino l'insieme, Σ, delle ν^3 eguaglianze:

$$x(y + z) = (xy) + (xz) , \qquad (x, y, z \in B),$$

dette condizioni di s-distributività di B, l'insieme Σ' delle ν^3 condizioni di d-distributività di B:

$$(x + y)z = (xz) + (yz) , \qquad (x, y, z \in B),$$

e l'insieme:

$$\Delta = \Sigma \cup \Sigma'$$

delle $2\nu^3$ condizioni di distributività di B.

Se si definiscono (ovunque) in B un'addizione e una moltiplicazione (coppia ordinata di operazioni binarie, univoche e distinte), l'insieme B diviene il sostegno di una struttura algebrica, che verrà detta un bisistema (o bigruppoide), nella quale ogni condizione di distributività di B sarà oppure non sarà verificata.

Può darsi che il verificarsi di certe condizioni (di distributività di B) in un bisistema (di sostegno B) appartenente ad una prefissata classe (per es. alla classe di tutti i bisistemi con addizione

---

(*) Pervenuta in Redazione il 30 Dicembre 1960.
Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

commutativa) implichi sempre il verificarsi in quel bisistema di una certa altra condizione (così, nel caso dell'es., in un bisistema con addizione commutativa, l'eguaglianza $x(y+z)=(xy)+(xz)$ implica evidentemente l'altra: $x(z+y)=(xz)+(xy)$). Il presente studio consiste appunto in una ricerca di queste eventuali interdipendenze, con referenza a tre particolari classi di bisistemi. Fa seguito ad uno studio analogo ([1] [1]), riferito alla classe di tutti i bisistemi di sostegno B.

Precisamente, nel presente lavoro vengono determinati (per ogni valore di ν) tutti i sottinsiemi indipendenti ed equivalenti (v. n.º 4) a ciascuno dei tre insiemi di condizioni Σ, Σ', Δ, con referenza, per ognuno separatamente, ai bisistemi con addizione commutativa, oppure con moltiplicazione commutativa, oppure con entrambe le operazioni commutative.

I risultati raggiunti, che si possono dire di « sostanziale indipendenza » (nel senso che, se $\nu \geqslant 3$, non sono state trovate altre interdipendenze oltre quelle a priori evidenti) sono esposti negli enunciati dei nove teoremi 1, 1′, ..., 6.

§ 1

1. - Per un bisistema *α-commutativo*, intenderemo un bisistema ([1], n.º 1) la cui addizione è commutativa ($x+y=y+x$, qualunque siano gli elementi x, y del bisistema).

Le due terne (ordinate):

$$(x, y, z)\,, \qquad (x, z, y)\,,$$

di elementi di un insieme non vuoto B, si diranno (2, 3)-*opposte* (poichè differiscono per lo scambio del 2º e 3º elemento), e si dirà che ognuna di esse è la (2, 3)-*opposta* dell'altra. È chiaro che, in un bisistema α-commutativo di sostegno B, ognuna delle

---

[1]) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

due eguaglianze

$$(1) \qquad x(y+z) = (xy) + (xz)\,, \qquad x(z+y) = (xz) + (xy)$$

implica l'altra, cioè che ([1], n.° 1): *In un bisistema α-commutativo, una terna di elementi è s-distributiva se, e soltanto se, è s-distributiva la sua* (2, 3)*-opposta.*

Supporremo che il numero cardinale ν (non necessariamente finito) dell'insieme B sia $\geqslant 2$, e che

$$a\,, \quad b\,, \quad c$$

siano tre elementi distinti di B, fissati una volta per tutte, l'ultimo dei quali, c, presentandosi soltanto se $\nu > 2$. Con B^3 denoteremo l'insieme delle ν^3 terne di elementi di B.

Si dirà che un sottinsieme $\mathfrak{a}$ di B^3 è *s-isolato* in un bisistema α-commutativo B^0 di sostegno B, se le terne di $\mathfrak{a}$ e le loro (2, 3)-opposte non sono s-distributive in B^0, mentre tutte le rimanenti terne di B^3 vi sono invece s-distributive.

Una terna di elementi di B si dirà *s-isolata* in un bisistema α-commutativo di sostegno B, se vi è s-isolato il sottinsieme (di B^3) da essa costituito.

2. - L'insieme costituito dagli elementi distinti p, q, r, ... verrà denotato con $\{p, q, r, ...\}$. Dimostriamo che:

I) *Ciascuna delle quattro terne* (a, a, a), (b, a, a), (a, a, b), (a, b, c) *è s-isolata* (n.° 1) *in un bisistema α-commutativo e d-distributivo* ([1], n.° 13) *di sostegno* $\{a, b, c\}$.

Infatti, per le due terne (a, a, a) e (b, a, a) un tale bisistema è risp. quello considerato nei punti 1°) e 3°) del n.° 15 in [1]. Inoltre (cfr. [1], p. 8, ult. capov.), si riconosce facilmente che:

1°) La terna (a, a, b) è s-isolata nel bisistema α-commutativo e d-distributivo definito dalle due seguenti tabelle:

(2)

α	a	b	c
a	c	b	c
b	b	c	c
c	c	c	c

μ	a	b	c
a	c	a	c
b	c	c	c
c	c	c	c

2°) La terna (a, b, c) è s-isolata nel bisistema α-commutativo e d-distributivo definito dalle due seguenti tabelle:

(3)

α	a	b	c
a	c	c	c
b	c	c	b
c	c	b	c

μ	a	b	c
a	c	a	c
b	c	c	c
c	c	c	c

II) *Se il numero cardinale ν dell'insieme B è $\geqslant 3$, ogni terna di elèmenti di B è s-isolata* (n.° 1) *in un bisistema α-commutativo e d-distributivo di sostegno B.*

Infatti, ciò risulta facilmente dalla precedente proposiz. I), con un ragionamento analogo a quello fatto nel n.° 7 di [1], tenendo presente il lemma 1′ a pag. 26 di [1], (si osservi che, evidentemente, anche la terra (a, b, a) è s-isolata nel bisistema definito dalle (2)).

È evidente che: *In un bisistema α-commutativo, la terna di elementi (x, y, z) è d-distributiva* ([1], n.° 11) *se, e soltanto se, è d-distributiva la terna (y, x, z)* (che si dirà la (1, 2)-*opposta* della (x, y, z)).

Le definizioni di insieme di terne *d-isolato* e di terna *d-isolata* in un bisistema α-commutativo si deducano dal penult. e ultimo capoverso del n.° 1, leggendovi « d-isolato(a), (1, 2)-opposte, d-distributive » invece risp. di « s-isolato(a), (2, 3)-opposte, s-distributive ».

II′) *Se il numero cardinale ν dell'insieme B è $\geqslant 3$, ogni terna di elementi di B è d-isolata in un bisistema α-commutativo ed s-distributivo* ([1], n.° 10) *di sostegno B.*

Infatti, per il lemma 13 di [1], n.° 11, la terna (x, y, z) è d-isolata nel bisistema opposto ([1], n.° 3) di quello in cui (per la II)) è s-isolata la terna (z, y, x).

3. – Dimostriamo inoltre che:

III) *Ciascuna delle due classi C_2 e C_4, considerate nel n.° 8 di* [1], *è s-isolata* (n.° 1) *in un bisistema α-commutativo e d-distributivo di sostegno $\{a, b\}$.*

III′) *Ciascuna delle due classi C'_2 e C'_4, considerate nel n.° 12* *di* [1], *è d-isolata* (n.° 2) *in un bisistema α-commutativo ed s-distributivo di sostegno* $\{a, b\}$.

Infatti (v. [1], p. 29, 1° capov., e n.° 10), per C_2 e C_4 un tale bisistema è risp. il (2,14) e l'immagine isomorfa di questo mediante la corrispondenza $a \to b$, $b \to a$. Dimostrata così la III), la III') ne segue immediatamente per il lemma 13 di [1], n.° 11.

IV) *Se, in un bisistema α-commutativo di sostegno* $\{a, b\}$, *è s-distributiva la terna* (a, a, b) (*risp.* (b, b, a)), *allora vi è s-distributiva anche la terna* (a, a, a) (*risp.* (b, b, b)).

Infatti (prima parte), supponiamo che, nel bisistema avente le tabelle (10) di [1] (n.° 6), con

$$s_{12} = s_{21} ,$$

la terna (a, a, a) non sia s-distributiva, e mostriamo che, di conseguenza, in ciascuno dei tre casi possibili ([1], p. 10): $(s_{11}, p_{11}) = (a, b)$, (b, a), (b, b), vi risulta non s-distributiva anche la terna (a, a, b).

1) Sia inoltre

$$s_{11} = a , \qquad p_{11} = b .$$

Allora la non s-distributività di (a, a, a) implica (cfr. [1], p. 10):

$$s_{22} = a .$$

Distinguiamo i due sottocasi $s_{12} = a,\ b$.

1_1) Sia inoltre

$$s_{12} = a .$$

Allora $a(a+b)=aa=b$, mentre $(aa)+(ab)=b+p_{12}=s_{2i}=a$, quindi (a, a, b) non è s-distributiva.

1_2) Sia inoltre

$$s_{12} = b .$$

Allora $a(a + b) = ab = p_{12} = a, b$, mentre risp. $(aa) + (ab) = b + p_{12} = s_{21}, s_{22} = b, a$, quindi (a, a, b) non è s-distributiva.

2) Sia inoltre

$$s_{11} = b , \qquad p_{11} = a .$$

Allora la non s-distributività di (a, a, a) implica (cfr. [1], p. 11):

$$p_{12} = a .$$

Risulta perciò $a(a+b)=as_{12}=p_{1i}=a$, $(aa)+(ab)=a+a=b$, dunque (a, a, b) non è s-distributiva.

3) Sia inoltre

$$s_{11} = b\,, \quad p_{11} = b\,.$$

Allora la non s-distributività di (a, a, a) implica (cfr. [1], p. 11):

$$s_{22} \neq p_{12}\,.$$

Distinguiamo i due sottocasi $p_{12} = a, b$.

3_1) Sia inoltre

$$p_{12} = a\,.$$

Allora $a(a + b) = as_{12} = aa, ab = b, a$, mentre risp. $(aa) + (ab) = = b + a = s_{12} = a, b$, dunque (a, a, b) non è s-distributiva.

3_2) Sia inoltre

$$p_{12} = b\,.$$

Allora $a(a + b) = p_{1i} = b$, mentre $(aa) + (ab) = b + b = s_{22} = a$ (poichè $s_{22} \neq p_{12}$), quindi (a, a, b) non è s-distributiva.

Dimostrata così la prima parte della IV), la seconda parte (risp.) si ottiene immediatamente dalla prima, applicando questa proposizione all'immagine isomorfa del bisistema in esame mediante la corrispondenza $a \to b$, $b \to a$.

IV') *Se, in un bisistema α-commutativo di sostegno $\{a, b\}$, è d-distributiva la terna (b, a, a) (risp. (a, b, b)), allora vi è d-distributiva anche la terna (a, a, a) (risp. (b, b, b)).*

Infatti questa proposizione IV') si ottiene immediatamente dalla precedente IV) mediante il lemma 13 di [1], n.° 11, (cfr. [1], p. 22, ult. capov.).

4. - Consideriamo tutte le classi:

$$\{(x, y, z),\ (x, z, y)\}\,, \tag{4}$$

costituite, ognuna, da due terne (2, 3)-opposte di elementi di B (n.° 1). Le due terne che figurano nella classe (4) non sono necessariamente distinte (precisamente, esse coincidono se, e soltanto se, $y = z$). Due diverse delle classi (4) sono evidentemente disgiunte (cioè la loro intersezione è vuota), e la riunione di tutte le classi (4) coincide con B^3.

L'insieme di tutte le ν^3 condizioni di s-distributività di B ([1], n.° 1) verrà denotato con

$$\Sigma .$$

Evidentemente (n.° 1), in un bisistema α-commutativo di sostegno B, le due condizioni di s-distributività relative ([1], p. 17, in alto) alle due terne di una medesima delle classi (4) o sono entrambe soddisfatte o entrambe non lo sono.

Per un sottinsieme *α-indipendente* (o costituito da condizioni *α-indipendenti*) di un certo insieme non vuoto di condizioni (quali, ad es., quelle di s-distributività) relative agli elementi di B e interpretabili in un bisistema di sostegno B, intenderemo un sottinsieme tale che, fissata una sua condizione qualsiasi, esiste sempre un bisistema α-commutativo di sostegno B nel quale la condizione fissata non è soddisfatta mentre tutte le rimanenti condizioni del sottinsieme stesso vi sono invece soddisfatte.

Diremo che due sottinsiemi dell'insieme di condizioni considerato nel preced. capoverso sono *α-equivalenti* (o che sono costituiti da condizioni *α-equivalenti*), e che ognuno è *α-equivalente* all'altro, se il verificarsi delle condizioni di uno qualsiasi di essi in un bisistema α-commutativo B^0 di sostegno B implica sempre (qualunque sia B^0) il verificarsi in B^0 delle condizioni dell'altro.

Supposto ora che un sottinsieme Σ_1 di Σ sia α-indipendente ed α-equivalente a Σ, e denotato con S_1 l'insieme delle terne relative alle condizioni di Σ_1, si riconosce subito che (per la II) del n.° 2, e per il 2° capov. di questo n.°), se $\nu \geqslant 3$, S_1 deve contenere una ed una sola terna di ciascuna delle classi (4); e che, viceversa, ogni S_1 ottenuto scegliendo in ciascuna delle classi (4) una e una sola terna dà luogo ad un Σ_1 α-indipendente ed α-equivalente a Σ.

Se $\nu = 2$, si riconosce poi facilmente che, se un sottinsieme Σ_1 di Σ è α-indipendente ed α-equivalente a Σ, l'insieme S_1 delle terne relative alle condizioni di Σ_1 deve contenere (per la III) del n.º 3, e per il 2º capov. di questo n.º) una ed una sola terna di ciascuna delle due classi seguenti (che coincidono, nell'ordine, con le classi C_2 e C_4 di [1], n.º 8):

$$(5) \qquad \{(a, a, b),\ (a, b, a)\}, \qquad \{(b, b, a),\ (b, a, b)\},$$

mentre (per la IV) del n.º 3, e per i risultati del n.º 6 di [1]) S_1 non può contenere una ulteriore terna che non appartenga ad alcuna di queste due classi (5); e che, viceversa, ogni S_1 ottenuto scegliendo in ciascuna delle due classi (5) una e una sola terna dà luogo ad un Σ_1 α-indipendente ed α-equivalente a Σ.

5. - Le considerazioni fatte nei due ultimi capoversi del precedente n.º 4 dimostrano il seguente

TEOREMA 1: *Se B è un insieme avente numero cardinale $\nu \geqslant 2$, e Σ è l'insieme delle ν^3 condizioni di s-distributività di B:*

$$(6) \qquad x(y + z) = (xy) + (xz), \qquad (x, y, z \in B),$$

tutti i sottinsiemi Σ_1 di Σ che sono α-indipendenti ed α-equivalenti a Σ (n.º 4) *si ottengono nel modo seguente:*

1º. *Se $\nu \geqslant 3$, si scelga in ciascuna delle classi* (4) *una qualsiasi delle due terne che la costituiscono.*

2º. *Se invece $\nu = 2$, e $B = \{a, b\}$, si scelga in ciascuna delle due classi* (5) *una qualunque delle due terne che la costituiscono.*

Le condizioni di s-distributività relative alle terne così scelte costituiscono appunto, in ciascuno dei due casi, un sottinsieme Σ_1 di Σ α-indipendente ed α-equivalente a Σ.

Se in particolare ν è finito, si riconosce facilmente (cfr. [1], nº. 2) che, se $\nu \geqslant 3$, ogni Σ_1 consta di $\nu + 2\nu(\nu - 1) + 3\binom{\nu}{3}$ condizioni; mentre, se $\nu = 2$, ogni Σ_1 consta evidentemente di due sole condizioni.

Consideriamo ora la corrispondenza biunivoca e involutoria, ω, di B^3 (n.º 1) su sè stesso, che ad ogni terna (x, y, z) associa la terna *opposta* (z, y, x). La corrispondenza ω trasforma la classe (4) nella classe

$$(4') \qquad \{(z, y, x)\,,\ (y, z, x)\}\,,$$

costituita da due terne (1, 2)-opposte di elementi di B (n.º 2), e subordina quindi una corrispondenza biunivoca fra l'insieme di tutte le classi (4) e l'insieme di tutte le classi (4') (a due a due disgiunte). In particolare, se $\nu = 2$, la ω trasforma le due classi (5) risp. nelle due classi seguenti (che coincidono, nell'ordine, con le classi C'_2 e C'_4 di [1], n.º 12):

$$(5') \qquad \{(b, a, a),\ (a, b, a)\}\,, \qquad \{(a, b, b),\ (b, a, b)\}\,.$$

Denotiamo con

$$\Sigma'$$

l'insieme di tutte le ν^3 condizioni di d-distributività di B ([1], n.º 11). *Se supponiamo che un sottinsieme Σ_1 di Σ (n.º 4) sia α-indipendente ed α-equivalente a Σ, che S_1 sia l'insieme delle terne relative alle condizioni (di s-distributività) di Σ_1, e che S'_1 sia costituito dalle terne opposte di quelle di S_1* (cioè che S'_1 sia il trasformato di S_1 mediante ω), *allora l'insieme Σ'_1 delle condizioni di d-distributività relative alle terne di S'_1 è* (per il lemma 13 di [1], p. 22) *α-indipendente ed α-equivalente a Σ'; e viceversa.* Questa osservazione e le considerazioni del preced. capoverso permettono dunque di dedurre subito dal teor. 1 il seguente

TEOREMA 1': *Se B è un insieme avente numero cardinale $\nu \geqslant 2$, e Σ' è l'insieme delle ν^3 condizioni di d-distributività di B:*

$$(7) \qquad (x + y)z = (xz) + (yz)\,, \qquad (x, y, z \in B),$$

tutti i sottinsiemi Σ'_1 di Σ' che sono α-indipendenti ed α-equivalenti a Σ' (n.º 4) *si ottengono nel modo seguente:*

1.º *Se $\nu \geqslant 3$, si scelga in ciascuna delle classi* (4') *una qualsiasi delle due terne che la costituiscono.*

2.° *Se invece* $\nu = 2$, *e* $B = \{a, b\}$, *si scelga in ciascuna delle due classi* (5′) *una qualunque delle due terne che la costituiscono.*

Le condizioni di d-distributività relative alle terne così scelte costituiscono appunto, in ciascuno dei due casi, un sottinsieme Σ'_1 *di* Σ' α*-indipendente ed* α*-equivalente a* Σ'.

Da quanto si è detto sopra (nella dimostrazione di questo teorema), risulta anche che *ogni* Σ'_1 (*teor.* 1′) *ha lo stesso numero cardinale di ogni* Σ_1 (*teor.* 1).

Questo teor. 1′ poteva anche dedursi direttamente dalle proposizioni II′), III′), IV′) (ricordando il quartult. capoverso del preced. n.° 2, e i risultati del n.° 11 di [1]), con un ragionamento del tutto analogo a quello fatto nei due ultimi capoversi del n.° 4.

6. - Poniamo

$$\Delta = \Sigma \cup \Sigma' ,$$

cioè denotiamo con Δ l'insieme di tutte le $2\nu^3$ condizioni di distributività (6) e (7) di B ([1], n.° 14), e supponiamo che Δ_1 sia un sottinsieme di Δ α-indipendente ed α-equivalente a Δ (n.° 4). Allora, se $\nu \geqslant 3$, Δ_1 deve contenere (per la II), essendo α-equivalente a Δ) una delle due condizioni di s-distributività relative alle due terne di ciascuna delle classi (4), e deve inoltre contenere (per la II′)) una delle due condizioni di d-distributività relative alle due terne di ciascuna delle classi (4′), cioè Δ_1 deve contenere uno degli insiemi Σ_1 (teor. 1) ed uno degli insiemi Σ'_1 (teor. 1′), e quindi

$$\Delta_1 \supseteq \Sigma_1 \cup \Sigma'_1 . \tag{8}$$

Alla medesima conclusione (8) si perviene anche se $\nu = 2$ (considerando le classi (5) e (5′) e sfruttando, adesso, le III) e III′)). Dunque, in ogni caso ($\nu \geqslant 2$), dalla (8) risulta

$$\Delta_1 = \Sigma_1 \cup \Sigma'_1 , \tag{9}$$

poichè Δ_1 è α-indipendente e poichè $\Sigma_1 \cup \Sigma'_1$ è (per i teor. 1 e 1′) α-equivalente a Δ.

Viceversa, comunque siano stati scelti un Σ_1 (teor. 1) ed un Σ'_1 (teor. 1′), il Δ_1 dato dalla (9) è, non solo α-equivalente a Δ, ma è anche (per le II) e II'), III) e III')) α-indipendente. In conclusione, vale il seguente

TEOREMA 2: *Se B è un insieme avente numero cardinale $v \geqslant 2$, e $\Delta = \Sigma \cup \Sigma'$ è l'insieme delle $2v^3$ condizioni di distributività* (6) *e* (7) *di B, tutti i sottinsiemi Δ_1 di Δ che sono α-indipendenti ed α-equivalenti a Δ* (n.° 4) *si ottengono nel modo seguente: Si considerino un qualsiasi sottinsieme Σ_1 di Σ che sia α-indipendente e α-equivalente a Σ (teor.* 1) *ed un qualsiasi sottinsieme Σ'_1 di Σ' che sia α-indipendente e α-equivalente a Σ' (teor.* 1'); *la loro riunione,*

$$\Sigma_1 \cup \Sigma'_1,$$

è appunto un sottinsieme Δ_1 di Δ α-indipendente ed α-equivalente a Δ.

§ 2

7. - Per un bisistema *μ-commutativo*, intenderemo un bisistema la cui moltiplicazione è commutativa (risulta sempre $xy = yx$).

V) *Ciascuna delle cinque terne* (a, a, a), (a, a, b), (b, a, a), (a, b, a), (a, b, c) *è s-isolata* ([1], n.° 1) *in un bisistema μ-commutativo di sostegno* $\{a, b, c\}$.

Infatti, per le tre terne (a, a, a), (a, a, b), (a, b, a) un tale bisistema è risp. quello definito dalle tabelle (5), (6), (8) in [1], n.° 5. Inoltre (cfr. [1], p. 8, ult. capov.), si riconosce facilmente che:

1°) La terna (b, a, a) è s-isolata nel bisistema μ-commutativo definito dalle due seguenti tabelle:

(10)

α	a	b	c
a	a	c	c
b	c	c	c
c	c	c	c

μ	a	b	c
a	c	b	c
b	b	c	c
c	c	c	c

2°) La terna (a, b, c) è s-isolata nel bisistema μ-commutativo definito dalle due seguenti tabelle:

(11)

α	a	b	c
a	c	c	c
b	c	c	b
c	c	c	c

μ	a	b	c
a	c	a	c
b	a	c	c
c	c	c	c

VI) *Se il numero cardinale ν dell'insieme B è $\geqslant 3$, ogni terna di elementi di B è s-isolata* ([1], n.° 1) *in un bisistema μ-commutativo di sostegno B.*

Infatti, ciò segue facilmente dalla V), con lo stesso ragionamento fatto nel n.° 7 di [1].

VI′) *Se il numero cardinale ν dell'insieme B è $\geqslant 3$, ogni terna di elementi di B è d-isolata* ([1], n.° 11) *in un bisistema μ-commutativo di sostegno B.*

Infatti, ciò segue immediatamente dalla VI), per il lemma 13 di [1], n.° 11. Inoltre dai n.ⁱ 9 e 12 di [1] (dimostrazione della X) e X')) risulta direttamente che:

VII) *Ciascuna delle quattro classi C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, considerate nel n.° 8 di* [1], *è s-isolata* ([1], n.° 9) *in un bisistema μ-commutativo di sostegno $\{a, b\}$.*

VII′) *Ciascuna delle quattro classi C'_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, considerate nel n.° 12 di* [1], *è d-isolata* ([1], n.° 12) *in un bisistema μ-commutativo di sostegno $\{a, b\}$.*

8. - Le definizioni di sottinsieme *μ-indipendente* (o costituito da condizioni *μ-indipendenti*) e di sottinsiemi *μ-equivalenti* si deducano risp. dal 3° e 4° capoverso del n.° 4 leggendovi μ- invece di α-. Allora, dalle VI), VII) e, risp., VI′), VII′) si ottengono facilmente (ricordando i risultati dei n.ⁱ 6 e 11 di [1]) i due teoremi seguenti.

TEOREMA 3: *L'insieme Σ, delle ν^3 condizioni di s-distributività* (6) *di un insieme B avente numero cardinale ν, è μ-indipendente se, e soltanto se, $\nu \geqslant 3$. Se $\nu = 2$, e $B = \{a, b\}$, gli unici sottinsiemi di Σ μ-indipendenti e μ-equivalenti a Σ sono i sottinsiemi Σ_0 di cui si parla nel teorema 3 di* [1], *n.° 8.*

TEOREMA 3': *L'insieme Σ', delle ν^3 condizioni di d-distributività* (7) *di un insieme B avente numero cardinale ν, è μ-indipendente se, e soltanto se, $\nu \geqslant 3$. Se $\nu = 2$, e $B = \{a, b\}$, gli unici sottinsiemi di Σ' μ-indipendenti e μ-equivalenti a Σ' sono i sottinsiemi Σ'_0 di cui si parla nel teorema 3' di* [1], *n.*° 12.

Consideriamo ora la corrispondenza biunivoca fra Σ e Σ' che si ottiene associando alla condizione di s-distributività (6), relativa alla terna (x, y, z), la condizione di d-distributività relativa alla terna (y, z, x). Le classi:

$$(12) \qquad \{x(y + z) = (xy) + (xz)\,, \qquad (y + z)x = (yx) + (zx)\}\,,$$

costituite, ognuna, da due condizioni corrispondenti, sono quindi a due a due disgiunte, e la loro riunione coincide con $\Delta = \Sigma \cup \Sigma'$ (insieme delle condizioni di distributività di B). Le due condizioni di Δ costituenti una delle classi (12) si diranno *μ-associate* (e si dirà che ognuna è *μ-associata* all'altra). È chiaro che:

VIII) *In un bisistema μ-commutativo (di sostegno B) due condizioni μ-associate (di B) o sono entrambe soddisfatte o entrambe non lo sono.*

Dimostriamo allora il seguente

TEOREMA 4: *Se B è un insieme avente numero cardinale $\nu \geqslant 2$, e $\Delta = \Sigma \cup \Sigma'$ è l'insieme delle $2\nu^3$ condizioni di distributività* (6) *e* (7) *di B, tutti i sottinsiemi Δ_0 di Δ che sono μ-indipendenti e μ-equivalenti a Δ si ottengono nel modo seguente:*

1°. *Se $\nu \geqslant 3$, si scelga in ciascuna delle ν^3 classi* (12) *una qualsiasi delle due condizioni che la costituiscono.*

2°. *Se invece $\nu = 2$, e $B = \{a, b\}$, si considerino le quattro classi:*

$$(13) \qquad \Gamma_i \cup \Gamma'_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

dove la sottoclasse Γ_i (risp. Γ'_i) si intende costituita dalle due condizioni di s-distributività (risp. d-distributività) relative alle due terne della classe C_i (risp. C'_i) (v. [1], *n.*ⁱ 8 *e* 12), *e in ciascuna di queste classi* (13) *si scelga una qualunque delle quattro condizioni che la costituiscono.*

Le condizioni di distributività così scelte costituiscono appunto, *in ciascuno dei due casi, un sottinsieme Δ_0 di Δ μ-indipendente e μ-equivalente a Δ.*

Infatti, supposto che Δ_0 sia un sottinsieme di Δ μ-indipendente e μ-equivalente a Δ, allora, se $\nu \geqslant 3$, Δ_0 deve contenere (per la prima parte del teor. 3 e per la VIII), essendo μ-equivalente a Δ) una delle due condizioni di ciascuna delle classi (12), mentre, se $\nu = 2$, Δ_0 deve contenere (per le VII), VIII) e poichè le due condizioni di Γ'_i sono le μ-associate a quelle di Γ_i) una delle quattro condizioni di ciascuna delle classi (13), cioè, in ogni caso ($\nu \geqslant 2$), Δ_0 deve contenere un sottinsieme che (per la VIII), e inoltre, se $\nu = 2$, per i teoremi 3 e 3') è μ-equivalente a Δ, anzi Δ_0 (essendo μ-indipendente) deve appunto coincidere con questo sottinsieme.

Viceversa, è ormai evidente (per quanto si è detto nel preced. capov.) che, se Δ_0 è un sottinsieme di Δ ottenuto scegliendo in ciascuna delle classi (12) o risp. (13) (secondo che $\nu \geqslant 3$ o risp. $\nu = 2$) una ed una sola condizione, allora Δ_0 è appunto μ-indipendente e μ-equivalente a Δ.

§ 3

9. - Per un bisistema *$\alpha\mu$-commutativo*, intenderemo un bisistema contemporaneamente α-commutativo (n.° 1) e μ-commutativo (n.° 7).

IX) *Ciascuna delle cinque terne* (a, a, a), (a, a, b), (b, a, a), (a, b, a), (a, b, c) *è s-isolata* (n.° 1) *in un bisistema $\alpha\mu$-commutativo di sostegno* $\{a, b, c\}$.

Infatti, per le due terne (a, a, a) e (b, a, a) un tale bisistema è risp. quello definito dalle tabelle (5) di [1], n.° 5, e dalle tabelle (10) del preced. n.° 7. Inoltre (cfr. [1], p. 8, ult. capov.), si riconosce facilmente che:

1°) Ciascuna delle due terne (a, a, b), (a, b, a) è s-isolata nel bisistema $\alpha\mu$-commutativo definito dalle due seguenti tabelle:

(14)

α	a	b	c
a	c	a	c
b	a	c	c
c	c	c	c

μ	a	b	c
a	b	c	c
b	c	c	c
c	c	c	c

2°) La terna (a, b, c) è s-isolata nel bisistema $\alpha\mu$-commutativo definito dalle due seguenti tabelle:

(15)

α	a	b	c
a	c	c	c
b	c	c	a
c	c	a	c

μ	a	b	c
a	a	c	c
b	c	c	c
c	c	c	c

X) *Se il numero cardinale* ν *dell'insieme* B *è* $\geqslant 3$, *ogni terna di elementi di* B *è* s*-isolata* (n.° 1) *in un bisistema* $\alpha\mu$*-commutativo di sostegno* B.

Infatti, ciò risulta facilmente dalla IX), con un ragionamento analogo a quello fatto nel n.° 7 di [1].

X') *Se il numero cardinale* ν *dell'insieme* B *è* $\geqslant 3$, *ogni terna di elementi di* B *è* d*-isolata* (n.° 2) *in un bisistema* $\alpha\mu$*-commutativo di sostegno* B.

Infatti, cfr. n.° 2, dimostraz. della II'). Inoltre dai n.i 9 e 12 di [1] (dimostraz. della *X*) e *X'*)) risulta direttamente che:

XI) *Ciascuna delle due classi* C_2 *e* C_4, *considerate nel n.° 8 di* [1], *è* s*-isolata* (n.° 1) *in un bisistema* $\alpha\mu$*-commutativo di sostegno* $\{a, b\}$.

XI') *Ciascuna delle due classi* C_2' *e* C_4', *considerate nel n.° 12 di* [1], *è* d*-isolata* (n.° 2) *in un bisistema* $\alpha\mu$*-commutativo di sostegno* $\{a, b\}$.

10. - Le definizioni di sottinsieme *$\alpha\mu$-indipendente* (o costituito da condizioni *$\alpha\mu$-indipendenti*) e di sottinsiemi *$\alpha\mu$-equivalenti* si deducano risp. dal 3° e 4° capoverso del n.° 4 leggendovi $\alpha\mu$- invece di α-.

TEOREMA 5: *Siano* B *un insieme avente numero cardinale* $\nu \geqslant 2$, e Σ *l'insieme delle* ν^3 *condizioni di* s*-distributività* (6) *di* B. *Allora, gli unici sottinsiemi di* Σ $\alpha\mu$*-indipendenti ed* $\alpha\mu$*-equivalenti a* Σ *sono i sottinsiemi* Σ_1 *di cui si parla nel teorema* 1 *del n.°* 5.

Infatti, un sottinsieme di Σ che sia $\alpha\mu$-equivalente a Σ deve contenere (per la *X*) o la *XI*), secondo che risp. $\nu \geqslant 3$ o $\nu = 2$) un Σ_1, col quale deve appunto coincidere se è inoltre $\alpha\mu$-indipendente (poichè ogni Σ_1, per il teor. 1, è $\alpha\mu$-equivalente a Σ).

Viceversa, ogni Σ_1 è appunto (per la X) o la XI)) $\alpha\mu$-indipendente. Analogamente, dalle X'), XI') e dal teor. 1' si deduce il seguente

TEOREMA 5': *Siano B un insieme avente numero cardinale $\nu \geqslant 2$, e Σ' l'insieme delle ν^3 condizioni di d-distributività* (7) *di B. Allora, gli unici sottinsiemi di Σ' $\alpha\mu$-indipendenti ed $\alpha\mu$-equivalenti a Σ' sono i sottinsiemi Σ'_1 di cui si parla nel teorema* 1' *del n.º* 5.

Essendo x, y, z tre qualsiasi elementi di B (non necessariamente distinti), denotiamo ora con

$$\Gamma$$

la classe costituita dalle seguenti quattro condizioni (di distributività di B):

$$x(y+z) = (xy) + (xz)\,, \quad (y+z)x = (yx) + (zx)\,, \tag{16}$$

$$x(z+y) = (xz) + (xy)\,, \quad (z+y)x = (zx) + (yx)\,, \tag{17}$$

delle quali due di s-distributività, relative a terne (2,3)-opposte, e le altre due di d-distributività, μ-associate (n.º 8) alle precedenti due (e relative a terne (1, 2)-opposte). Le quattro condizioni (16) e (17), costituenti una delle classi Γ, non sono necessariamente distinte (precisamente, esse si riducono a due se, e soltanto se, $y = z$). Due diverse delle classi Γ sono evidentemente disgiunte, e la riunione di tutte le classi Γ coincide con $\Delta = \Sigma \cup \Sigma'$ (insieme delle condizioni di distributività di B).

TEOREMA 6: *Se B è un insieme avente numero cardinale $\nu \geqslant 2$, e $\Delta = \Sigma \cup \Sigma'$ è l'insieme delle $2\nu^3$ condizioni di distributività* (6) *e* (7) *di B, tutti i sottinsiemi Δ_2 di Δ che sono $\alpha\mu$-indipendenti ed $\alpha\mu$-equivalenti a Δ si ottengono nel modo seguente*:

1º. *Se $\nu \geqslant 3$, si scelga in ciascuna delle classi Γ una qualsiasi delle quattro condizioni* (16) *e* (17) *che la costituiscono.*

2º. *Se invece $\nu = 2$, e $B = \{a, b\}$, si considerino le due seguenti fra le classi* (13):

$$\Gamma_i \cup \Gamma'_i \qquad (i = 2,\ 4), \tag{18}$$

e in ciascuna di queste classi (18) *si scelga una qualunque delle quattro condizioni che la costituiscono.*

Le condizioni di distributività così scelte costituiscono appunto, in ciascuno dei due casi, un sottinsieme Δ_2 di Δ $\alpha\mu$-indipendente ed $\alpha\mu$-equivalente a Δ.

Infatti, supposto che Δ_2 sia un sottinsieme di Δ $\alpha\mu$-indipendente ed $\alpha\mu$-equivalente a Δ, allora, se $\nu \geqslant 3$, Δ_2 deve contenere (per la X) e per la VIII), essendo $\alpha\mu$-equivalente a Δ) una delle quattro condizioni (16) e (17) di ciascuna delle classi Γ, mentre, se $\nu = 2$, Δ_2 deve contenere (per le XI), VIII) e poichè le due condizioni di Γ'_i sono le μ-associate a quelle di Γ_i) una delle quattro condizioni di ciascuna delle due classi (18), cioè, in ogni caso ($\nu \geqslant 2$), Δ_2 deve contenere un sottinsieme che (per la VIII), e per il teor. 1) è $\alpha\mu$-equivalente a Δ, anzi Δ_2 (essendo $\alpha\mu$-indipendente) deve appunto coincidere con questo sottinsieme.

Viceversa, se Δ_2 è un sottinsieme di Δ ottenuto scegliendo in ciascuna delle classi Γ o risp. (18) (secondo che $\nu \geqslant 3$ o risp. $\nu = 2$) una ed una sola condizione, allora Δ_2 è appunto (cfr. il preced. capov.) $\alpha\mu$-indipendente ed $\alpha\mu$-equivalente a Δ.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOCCIONI, D.: *Indipendenza delle condizioni di distributività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 1-30.