RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

EDMONDO MORGANTINI

Sulle terne di omografie involutorie a prodotti involutori del piano proiettivo complesso

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 31 (1961), p. 423-462

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__423_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SULLE TERNE DI OMOGRAFIE INVOLUTORIE A PRODOTTI INVOLUTORI DEL PIANO PROIETTIVO COMPLESSO

Memoria (*) *di* EDMONDO MORGANTINI (*a Padova*)

Il moderno svolgimento assiomatico della geometria « assoluta » dei piani « metrici » [1]) è fondato su quei postulati che servono a caratterizzare il gruppo dei « movimenti » ed un suo sistema invariante di generatori involutori, quello delle « simmetrie assiali ». In questo indirizzo giuoca un ruolo essenziale la considerazione di quelle coppie e di quelle terne di generatori il cui prodotto è involutorio, la cui considerazione occorre nella stessa definizione dei « punti » ed in quella delle relazioni di « appartenenza » tra punti e rette, di « perpendicolarità » fra due rette e di appartenenza di tre rette ad un « fascio ».

Ci si può chiedere se sia possibile e conveniente sviluppare in modo analogo la geometria dei piani proiettivi, postulando le proprietà caratteristiche del gruppo delle collineazioni.

Conviene, prima di procedere in questo indirizzo, studiare la struttura del gruppo delle omografie dei piani proiettivi già noti, in particolare di quelli costruiti su di un corpo numerico assegnato, in relazione ai loro possibili e più semplici sistemi di generatori.

(*) Pervenuta in redazione il 7 luglio 1961.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

[1]) Dovuto al contributo di diversi Autori ed esposto esaurientemente nel recente trattato di F. BACHMANN, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff* (Springer, Berlin, 1959), cui rimando il Lettore anche per l'ampia bibliografia.

Ho già fatto vedere altrove [2]) che, nel piano proiettivo complesso ed in quello reale, il gruppo delle omografie non singolari ammette come sistema invariante di generatori involutori quello delle omografie involutorie, ossia quello delle omologie armoniche.

Nelle pagine che seguono mi propongo di *studiare e classificare le possibili configurazioni di terne di omografie involutorie del piano proiettivo complesso o reale, il cui prodotto è ancora una omografia involutoria.*

Se questa circostanza si verifica, essa non dipende dall'ordine in cui il prodotto venga eseguito, cosicchè partendo da una terna di omologie armoniche si perviene ad un'altra terna di omologie armoniche, in generale distinte fra loro e dalle precedenti. Inoltre anche i prodotti di queste tre omologie armoniche (e quelli di una o due delle precedenti per due od una di queste) sono omologie armoniche (nn. 2, 3).

Si costruisce così (e si studia, nei vari casi possibili, ai nn. 6, 7, 10, 13, 14, 15) una *successione*, in generale infinita, di terne di omografie involutorie a prodotti involutori.

L'operazione univoca di « *derivazione* » (n. 3) che da una terna della successione fa passare alla successiva *non è* sempre univocamente invertibile (nn. 8, 15). Particolarmente interessanti sono quei casi in cui la ripetuta operazione di derivazione fa ritornare alla terna iniziale e quei sistemi di omografie involutorie a prodotti ternari involutori che risultano *chiusi rispetto alla moltiplicazione ternaria*. Tali sono ad es. *nel campo complesso* il sistema delle 9 omologie armoniche aventi per centri i 9 punti base (di flesso) di un fascio sizigetico di cubiche piane generali e per assi le loro polari armoniche (n. 13), e, *nel campo reale*, le simmetrie ortogonali rispetto ad un gruppo di rette uscenti da uno stesso punto e dividenti in parti uguali l'angolo giro (n. 16).

Com'è noto (n. 1) la condizione necessaria e sufficiente affinchè due omologie armoniche siano permutabili (*ossia che il*

---

[2]) E. MORGANTINI, *Il sistema invariante delle omologie armoniche, come generatore del gruppo delle omografie del piano proiettivo complesso o reale* (Rend. Semin. Matematico, Padova, Vol. XXXI (1961), pp. 1-7.

loro prodotto sia involutorio) è che il centro di ciascuna di esse appartenga all'asse dell'altra. Allora il loro prodotto è l'omologia armonica avente per asse la congiungente i loro centri e per centro la intersezione dei loro assi. Sicchè il prodotto di tre omologie armoniche aventi per centri i vertici di un triangolo e per assi i lati opposti è la omografia identica, e viceversa.

Dall'analisi dettagliata esposta nelle pagine seguenti risulta che *il prodotto di tre omologie armoniche* α, β, γ *è ancora una omologia armonica solo quando si verifica uno dei seguenti casi* (v. fig. 1):

1) *Due delle tre omologie armoniche date coincidono* (n. 2);

2) *Due delle tre omologie armoniche date sono permutabili, i loro tre centri sono allineati ed i loro tre assi sono concorrenti* (n. 4);

3) *I loro tre assi, oppure i loro tre centri coincidono* (nn. 5, 6, 7);

4) *Due dei loro assi coincidono ed il centro della terza coincide con la intersezione della congiungente i centri delle prime due con il loro comune asse*; *oppure, dualmente, due dei loro centri coincidono e l'asse della terza coincide con la congiungente il punto d'intersezione degli assi delle prime due con il comune centro* (n. 8);

5) *I loro centri* A, B, C *sono distinti ed allineati su di una stessa retta* s, *mentre i loro assi* a, b, c *concorrono in un punto* S *di* s *e si ha* (nn. 9, 10): $(ABCS) = (abcs)$;

6) *Con una omografia si possono trasformare due delle omologie date, ad es.* β *e* γ *nelle simmetrie ortogonali rispetto a due assi* b, c *inclinati di* 60° *ed uscenti da un punto* S, *mentre l'asse* a *di* α *è una retta propria uscente da uno dei punti ciclici, che interseca la retta isotropa che da* S *proietta l'altro punto ciclico in un punto* A_1, *simmetrico rispetto ad* S *del centro* A *di* α (nn. 11, 12, 13);

7) *Con una omografia le tre omologie date si possono trasformare nelle simmetrie ortogonali rispetto a tre assi concorrenti in un medesimo punto* (nn. 14, 15, 16).

Solo *il caso* 6) *non può verificarsi nel piano proiettivo reale* (e perciò lo schema corrispondente non figura nella fig. 1).

Nei casi 1), 2), 4), 5), 7) si presentano sempre le seguenti circostanze:

I) *I centri* A, B, C *delle tre omologie sono allineati su di una retta* s *e gli assi* a, b, c *concorrono in un punto* S.

II) Detti A_1, B_1, C_1 i punti d'intersezione degli assi con la s (ed a_1, b_1, c_1 le congiungenti S con i centri) *le tre coppie di punti allineati* AA_1, BB_1, CC_1 (*le tre coppie di rette concorrenti* aa_1, bb_1, cc_1) *si corrispondono in una stessa involuzione* (che nei casi

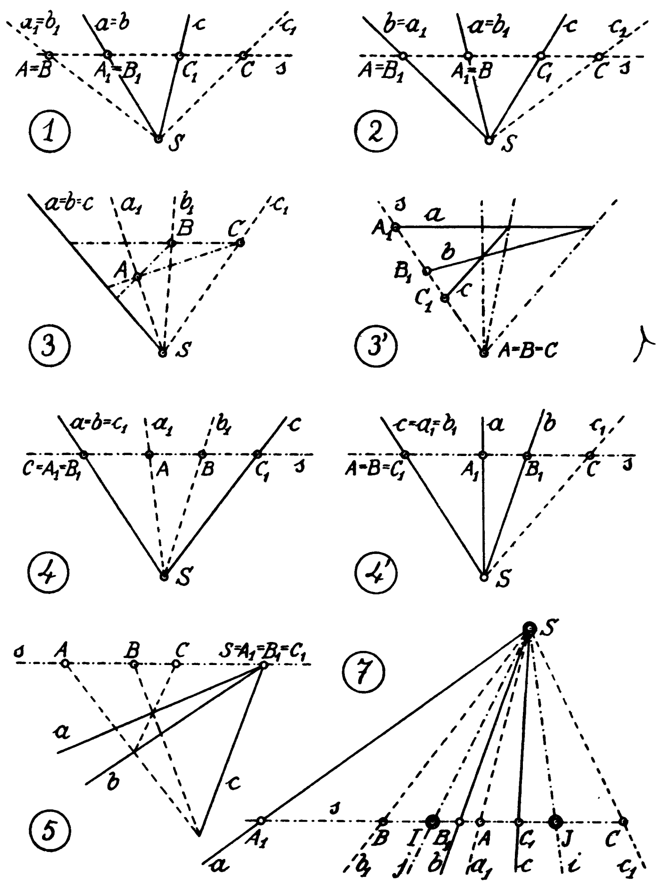

Fig. 1

4) e 5) degenera; due di quelle coppie coincidono, nei casi 1), 2)).

Le circostanze I, II sono anche sufficienti per la involutorietà del prodotto, nei casi 1), 2), 4), 7, cioè *quando S ed s non si appartengono*. Nel caso 5), *quando accade che S ed s si appartengono, si aggiunge l'ulteriore condizione* $(ABCS) = (abcs)$.

Nei due aspetti (duali uno dell'altro) del caso 3), *quando è indeterminata la intersezione degli assi* (che coincidono) *sparisce la condizione di allineamento dei centri* e, dualmente, *quando è indeterminata la congiungente i centri* (che coincidono), *sparisce la condizione di concorrenza degli assi.* Comunque la circostanza II resta verificata, nel primo caso rispetto ad ogni punto S di $a = b = c$, nel secondo caso rispetto ad ogni retta s per $A = B = C$.

SOMMARIO

1. - Converrà anzitutto osservare che — com'è noto [3]) — tanto nel piano proiettivo complesso che in quello reale *il prodotto* [4]) $\gamma = \alpha\beta$ *di due (distinte) omologie armoniche* α, β *è ancora una omologia armonica solo se il centro di ciascuna di esse appartiene all'asse dell'altra.*

Infatti l'ipotesi dell'armonia, cioè dell'involutorietà $\alpha\beta = (\alpha\beta)^{-1} = \beta\alpha$ equivale ad affermare che α e β sono permutabili, ossia che una di esse è trasformata in se dall'altra: $\beta = \alpha\beta\alpha$, oppure $\alpha = \beta\alpha\beta$. Una omologia armonica è individuata dal suo asse e dal suo centro. Perciò, affinchè β sia trasformata in sè da α occorre e basta che il suo centro B ed il suo asse b siano elementi uniti di α

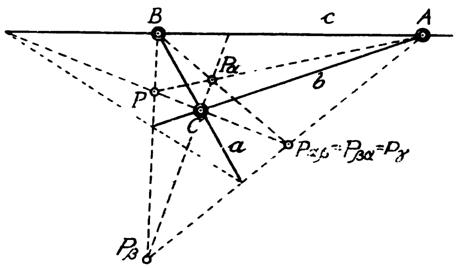

Fig. 2

D'altra parte gli unici punti uniti di una omologia α sono il centro A ed i punti dell'asse a, mentre le sue rette unite sono soltanto l'asse a e le rette per il centro A. Nè può essere $B = A$ altrimenti, poichè in una omologia armonica l'asse ed il centro non si appartengono, dovrebbe essere $b = a$ e sarebbe $\beta = \alpha$. Dunque occorre (e basta) che sia $B \in a$ ed $A \in b$, c.v.d.

È ovvio che il centro C e l'asse c di γ sono rispettivamente la intersezione degli assi a, b e la congiungente i centri A, B di α e β (v. fig. 2).

---

[3]) Cfr. ad es. BACHMANN F., l. cit. [1]), p. 88; cfr. anche FERRERO F., *Sulle omografie piane permutabili* (Periodico di Matematiche (IV) XXXVIII (1960), p. 293).

[4]) Con la scrittura $\gamma = \alpha\beta$ intendiamo significare che si opera *prima* con la α e *poi* con la β. Ciò è comodo se si indica (come faremo) con $P\alpha$

In altre parole il triangolo (necessariamente non degenere) che ha per vertici A, B, C i centri delle α, β, γ ha come lati opposti i loro assi a, b, c. La posizione delle tre omologie è simmetrica: ognuna di esse è il prodotto (commutativo) delle altre due. Assieme all'identità esse costituiscono un gruppo, isomorfo al gruppo trirettangolo.

2. - Andiamo quindi a vedere *se e quando possa essere una omologia armonica il prodotto $\beta' = \alpha\beta\gamma$ di tre omologie armoniche α, β, γ.*

Esclusi i casi banali $\beta = \alpha$, $\beta' = \gamma$; oppure $\gamma = \beta$, $\beta' = \alpha$; oppure $\gamma = \alpha$, nel qual caso β' è la trasformata di β mediante α, possiamo supporre:

$$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha\,, \qquad \alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1\,. \tag{2.1}$$

S'intende che, come α, β, γ, anche $\beta' \neq 1$ [5]). Dunque, per ipotesi, oltre alle (2.1), si ha:

$$\beta' = \alpha\beta\gamma = \gamma\beta\alpha \neq 1\,, \qquad \beta'^2 = 1\,. \tag{2.2}$$

Si osservi che, dalla ipotesi (2.2) della involutorietà di β' seguono anche le relazioni:

$$\begin{aligned} \gamma\alpha\beta &= \beta\alpha\gamma = \gamma\beta'\gamma = \alpha' \neq 1\,, \qquad \alpha'^2 = 1;\\ \beta\gamma\alpha &= \alpha\gamma\beta = \alpha\beta'\alpha = \gamma' \neq 1\,, \qquad \gamma'^2 = 1; \end{aligned}$$

che esprimono l'involutorietà degli altri prodotti α' e γ' delle tre involuzioni date α, β, γ. Inoltre allora:

$$\begin{cases} \alpha' = \beta\gamma'\beta = \gamma\beta'\gamma\,, \\ \beta' = \gamma\alpha'\gamma = \alpha\gamma'\alpha\,, \\ \gamma' = \alpha\beta'\alpha = \beta\alpha'\beta\,. \end{cases} \tag{2.3}$$

---

il trasformato P' di P mediante α, con $P'\beta = P\alpha\beta$ il trasformato P'' di P' con β, ecc.

[5]) Se fosse $\beta' = 1 = \alpha\beta\gamma = \gamma\beta\alpha$, sarebbe ad es. $\gamma = \alpha\beta = \beta\alpha$. In altre parole γ sarebbe il prodotto delle due omologie armoniche permutabili α e β, ossia α, β, γ si troverebbero nella situazione illustrata al n. 1.

Dunque, *per la questione dell'involutorietà del prodotto* ($\neq 1$) *di tre omografie distinte ed involutorie* α, β, γ, *non è essenziale l'ordine dei fattori*. Infatti, posto:

$$\alpha' = \gamma\alpha\beta\,, \qquad \beta' = \alpha\beta\gamma\,, \qquad \gamma' = \beta\gamma\alpha\,, \tag{2.4}$$

o le omografie α', β', γ' sono tutte e tre involutorie, oppure non lo è nessuna di esse. Nel caso che siano involutorie, le (2.3) ci insegnano come da una di esse, ad es. β', si possano ottenere le altre due, α', γ', sue trasformate rispettivamente mediante γ e mediante α.

3. - Sempre nel caso che i prodotti α', β', γ' delle tre omografie involutorie distinte α, β, γ siano involutori, è facile riconoscere che sono anche involutori i prodotti:

1) di due delle tre omografie date α, β, γ ed una delle α', β', γ'

2) di una delle tre omografie date α, β, γ e di due delle α', β', γ'

3) delle tre omografie α', β', γ': (e così via).

Per quanto riguarda i prodotti di cui si parla in 1), 2), essi non sono tutti distinti, e coincidono con le 3 date α, β, γ, con le 6 trasformate di una di esse mediante le altre due e con le 12 trasformate di una delle precedenti mediante le date:

$$\alpha\begin{cases}\beta\alpha\beta\begin{cases}\gamma\beta\alpha\beta\gamma\\ \alpha\beta\alpha\beta\alpha\end{cases}\\ \gamma\alpha\gamma\begin{cases}\alpha\gamma\alpha\gamma\alpha\\ \beta\gamma\alpha\gamma\beta\end{cases}\end{cases}\qquad \beta\begin{cases}\gamma\beta\gamma\begin{cases}\alpha\gamma\beta\gamma\alpha\\ \beta\gamma\beta\gamma\beta\end{cases}\\ \alpha\beta\alpha\begin{cases}\beta\alpha\beta\alpha\beta\\ \gamma\alpha\beta\alpha\gamma\end{cases}\end{cases}\qquad \gamma\begin{cases}\alpha\gamma\alpha\begin{cases}\beta\alpha\gamma\alpha\beta\\ \gamma\alpha\gamma\alpha\gamma\end{cases}\\ \beta\gamma\beta\begin{cases}\gamma\beta\gamma\beta\gamma\\ \alpha\beta\gamma\beta\alpha\end{cases}\end{cases}$$

In generale queste 21 omografie involutorie sono distinte, a meno che due delle tre date non siano permutabili od il loro prodotto abbia periodo 4.

Per quanto riguarda i prodotti involutorî di cui si parla in 3), posto:

$$\begin{aligned}\alpha'' &= \gamma'\alpha'\beta' = \beta'\alpha'\gamma'\,,\\ \beta'' &= \alpha'\beta'\gamma' = \gamma'\beta'\alpha'\,,\\ \gamma'' &= \beta'\gamma'\alpha' = \alpha'\gamma'\beta'\,,\end{aligned} \tag{3.1}$$

si ha:

$$\alpha'' = \alpha\alpha'\alpha\,, \qquad \beta'' = \beta\beta'\beta\,, \qquad \gamma'' = \gamma\gamma'\gamma \tag{3.2}$$

e ciò, oltre a fornire la ***costruzione di*** α'', β'', γ'' ***come trasformate di*** α', β', γ' ***rispettivamente mediante*** α, β, γ (completando così le costruzioni descritte dalle (2.3)), ci assicura che anche le α'', β'', γ'', come le α', β', γ', sono diverse dall'identità.

Come le α', β', γ', sono distinte se non ve ne sono due permutabili fra le tre date α, β, γ, così sono distinte le α'', β'', γ'' se non ve ne sono due permutabili fra le α', β', γ'.

D'altra parte essere permutabili due delle tre α', β', γ' significa che il periodo del prodotto di due delle tre date α, β, γ è un divisore di 4. In particolare ciò accade quando queste due sono permutabili, giacchè allora il loro prodotto ha periodo 2.

Si osservi che le α'', β'', γ'' si trovano, rispetto alle α', β', γ', nella stessa situazione delle α', β', γ' rispetto alle date α, β, γ.

Così procedendo (nel caso che il prodotto di due delle omologie date non abbia come periodo una potenza di 2) si perviene ad una ***successione infinita di terne di omologie armoniche*** $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$, ... ***tali che quelle di una terna sono i prodotti di quelle della terna precedente*** (cosicchè quella terna si può dire « ***derivata*** » di questa).

Sostituendo convenzionalmente agli apici degli indici interi, cioè ponendo $\alpha = \alpha^{(0)}$, $\beta = \beta^{(0)}$, $\gamma = \gamma^{(0)}$; $\alpha' = \alpha^{(1)}$, $\beta' = \beta^{(1)}$, $\gamma' = \gamma^{(1)}$; ... ci si può chiedere se la successione possa estendersi indefinitamente anche verso sinistra:

$$\ldots,\ \alpha^{(-n)}\beta^{(-n)}\gamma^{(-n)},\ \ldots,\ \alpha^{(0)}\beta^{(0)}\gamma^{(0)},\ \ldots,\ \alpha^{(n)}\beta^{(n)}\gamma^{(n)},\ \ldots$$

restando la successione stessa ***determinata da una qualsiasi delle sue terne***. Sarà inoltre interessante considerare la ***configurazione dei centri e degli assi*** delle sue omologie e di quelle omologie armoniche che sono prodotto di ***tre*** di esse, appartenenti anche a terne diverse.

4. - Supponiamo dapprima che ***due delle tre involuzioni date***, ad es. β e γ, ***siano permutabili***. Cioè (n. 1) sia $B \in c$, $C \in b$. Allora, posto $\bar{\alpha} = \beta\gamma = \gamma\beta = \bar{\alpha}^{-1} \neq 1$, sarà $\bar{A} = b \cdot c$, $\bar{a} = BC$.

L'ipotesi (2.2) della involutorietà del prodotto $\beta' = \alpha\beta\gamma \neq 1$ fornisce

$$\alpha\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\alpha = \beta' .$$

Dunque anche α ed $\bar{\alpha}$ sono permutabili e pertanto (n. 1):

1) *i tre centri A, B, C delle α, β, γ sono allineati* (su $\bar{a} = BC$)

2) *i tre assi a, b, c concorrono* (nel punto $\bar{A} = b \cdot c$).

Inoltre (v. fig. 3), per l'asse b' ed il centro B' di β', si ha $b' = A\bar{A}$, $B' = a \cdot \bar{a}$.

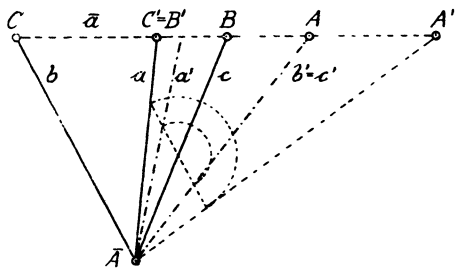

Fig. 3

Viceversa, se si verifica questa situazione, cioè se β e γ sono permutabili, ossia se $B \in c$, $C \in b$, e se sussistono la 1) e la 2), detta $\bar{\alpha}$ l'omologia armonica di centro $\bar{A}$ ed asse $\bar{a}$, e β' quella di centro $B' = a \cdot \bar{a}$ ed asse $b' = A\bar{A}$, risulta:

$$\beta\gamma = \gamma\beta = \bar{\alpha} , \qquad \alpha\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\alpha = \beta'$$

e quindi

$$\alpha\beta\gamma = \gamma\beta\alpha = \beta' \neq 1 , \qquad \beta'^2 = 1 .$$

cioè il prodotto delle tre involuzioni date è una involuzione.

Per quanto riguarda gli altri prodotti (pure involutori) delle date α, β, γ, si osservi che, in questo caso, $\gamma' = \beta'$, mentre il centro A' e l'asse a' di α' si costruiscono facilmente tenendo presente che (n. 2) α' è la trasformata di β' mediante γ.

Si tenga anche presente che, per l'ipotesi della permutabilità delle due involuzioni distinte β e γ, i loro centri B e C sono distinti, come distinti sono i loro assi b, c. Il centro A di α può essere un punto qualsiasi della retta $\bar{a} = BC$ ed il suo asse a può essere una retta qualsiasi (non contenente A) per il punto $\bar{A} = b \cdot c$.

5. - Possiamo ora supporre che *due delle tre involuzioni date non siano mai permutabili* e distinguere i seguenti casi:

I) *due delle involuzioni date hanno gli assi coincidenti*

II) *due delle involuzioni date hanno i centri coincidenti*

III) *fra le tre involuzioni date non ve ne sono mai due con gli assi o con i centri coincidenti.*

Andiamo quindi ad esaminare il *caso I.* Possiamo ad es. supporre che *siano β e γ che hanno gli assi coincidenti.* Allora $\bar{\alpha} = \beta\gamma$ è una omologia speciale di asse $\bar{a} = b = c$, col centro $\bar{A}$ nel suo punto d'intersezione con la congiungente i centri B, C. Per convincersene basta pensare (com'è lecito) che $\bar{a}$ sia la retta impropria del piano (ampliato, complesso) cosicchè β e γ appaiono come due simmetrie, rispetto ai centri distinti B, C, il cui prodotto è la traslazione che porta B nel suo simmetrico rispetto a C. Dunque nella omologia speciale $\bar{\alpha}$ a B corrisponde il suo trasformato in γ: $B\bar{\alpha} = B\gamma$.

L'ipotesi (2.2) della involutorietà del prodotto $\beta' = \alpha\beta\gamma$ fornisce

(5.1) $$\alpha\bar{\alpha} = \bar{\alpha}^{-1}\alpha ,$$

da cui si ricava

(5.2) $$\bar{\alpha} = \alpha\bar{\alpha}^{-1}\alpha .$$

Cosicchè *l'asse ed il centro di $\bar{\alpha}$* (che coincidono con quelli di $\bar{\alpha}^{-1}$) *debbono essere uniti in α.* Potranno quindi presentarsi i seguenti casi:

I_1) $a = b = c = \bar{a}$,

I_2) $A \in b = c = \bar{a}$, $\quad A = \bar{A}$,

I_3) $A \in b = c = \bar{a}$, $\quad \bar{A} = a \,.\, \bar{a}$.

Cominciamo ad esaminare il *caso I_3*. Si pensi all'∞ la retta $\bar{a} = b = c$. Si può anche supporre che i punti impropri distinti A ed $\bar{A} = a \cdot \bar{a}$ abbiano direzioni ortogonali. Si riconosce allora

(v. fig. 4) che in ogni caso si ha $\alpha\bar{\alpha}^{-1}\alpha = \bar{\alpha}^{-1}$, contraddicendo alla (5.2), in quanto per ipotesi β e γ non sono permutabili, e quindi $\bar{\alpha}^{-1} \neq \bar{\alpha}$. Dunque *il caso* I_3 *va escluso.*

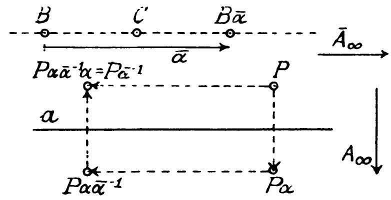

Fig. 4

6. - Esaminiamo ora il *caso* I_1 . Si riconosce che *la condizione che gli assi* a, b, c *coincidano è sufficiente perchè siano involutori i prodotti* α', β', γ' *delle tre involuzioni date* α, β, γ.

Supponiamo infatti che $\bar{a} = a = b = c$ sia la retta impropria. Mettiamo in evidenza i punti (propri e distinti) B, C ed il punto A, anch'esso proprio e assoggettato all'unica condizione di essere

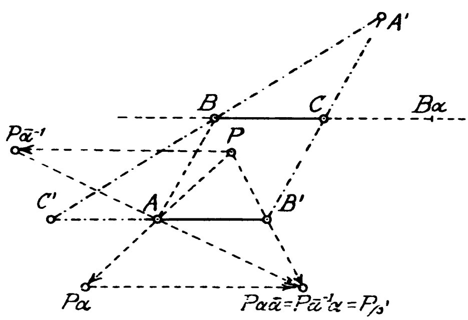

Fig. 5 (*)

distinto da B e da C. Risulta allora da note proprietà dei parallelogrammi (v. fig. 5) che per ogni punto P del piano risulta, come vuole la (5.1)

$$P\alpha\bar{\alpha} = P\bar{\alpha}^{-1}\alpha$$

Inoltre, essendo anche $\beta' = \alpha\bar{\alpha}$ una simmetria centrale, il suo centro B' è il 4° vertice del parallelogramma $ABCB'$. Sono simmetrie centrali anche gli altri due prodotti α' e γ' ed i loro

(*) Nella fig. 5, dove è scritto $\beta\alpha$ deve leggersi $\beta\bar{\alpha}$.

centri sono, a norma delle (2.3), il simmetrico A' di B' rispetto a C ed il simmetrico C' di B' rispetto ad A. Inoltre A' e C' sono simmetrici rispetto a B. In altre parole A, B, C sono i punti medi dei lati del triangolo $A'B'C'$. Con riferimento a quanto accennato al n. 3, anche le involuzioni α'', β'', γ'' sono simmetrie centrali ed A', B', C' sono i punti medi del triangolo dei loro centri A'', B'', C''. E così via.

Svincolandosi dal particolare atteggiamento affine della figura, si può dire che *anche gli assi delle tre omologie armoniche* α', β', γ', *coincidono, con gli assi delle* α, β, γ. *Inoltre questa retta è asse di omologia dei due triangoli* ABC, $A'B'C'$. *Infine il triangolo* $A'B'C'$ *è circoscritto a quello* A, B, C.

Quando A, B, C *sono allineati*, si riconosce che *con essi sono allineati anche* A', B', C' e (ritornando all'atteggiamento affine della figura) che A, B, C sono sempre i punti medi dei segmenti $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$. Inoltre $AB' \equiv BC$, ecc.

Svincolandosi dall'atteggiamento affine si può quindi dire che A, B, C *sono i coniugati armonici di* $\bar{A}$ *rispetto alle coppie* $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ e che ad es. B' *è il trasformato di* A *nella omologia speciale di asse* $\bar{a}$, *centro* $\bar{A}$, *che trasforma* B *in* C.

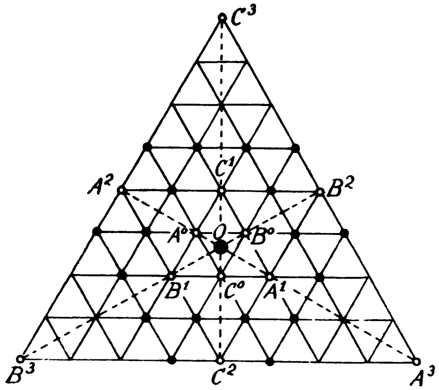

Fig. 6

Nel nostro caso gli assi delle *terne di omologie della successione di cui alla fine del n.* 3 coincidono tutti con $\bar{a}$. La configurazione dei loro centri, *se* A^0, B^0, C^0 *non sono allineati* è illustrata dalla fig. 6, dove si è di nuovo supposto che $\bar{a}$ sia la retta impropria.

Vi sono indicati anche i centri dei prodotti involutori di una o due delle tre omologie date $\alpha^{(0)}$, $\beta^{(0)}$, $\gamma^{(0)}$ e rispettivamente di due od una delle tre $\alpha^{(1)}$, $\beta^{(1)}$, $\gamma^{(1)}$.

Si riconosce che (iniziando la successione dalla terna $\alpha^{(0)}\beta^{(0)}\gamma^{(0)}$) i centri dei prodotti involutori di tre omologie della successione (appartenenti anche a terne diverse) si dispongono nei vertici di un reticolato a maglie triangolari uguali al triangolo iniziale $A^0B^0C^0$, che ricopre tutto il piano.

Alla stessa figura si perverrebbe dunque assumendo come terna iniziale quella delle omologie armoniche di asse $\bar{a}$ i cui centri sono vertici di una qualsiasi delle maglie della rete.

Si osservi che (nell'atteggiamento affine della figura) tutti i triangoli $A^iB^iC^i$ hanno lo stesso baricentro O, che è poi il centro di omotetia di due qualsiasi di essi.

Assunti A^0, B^0, C^0 come punti fondamentali di un sistema di coordinate proiettive in cui $\bar{a}$ sia la retta unità (e dunque coordinate baricentriche, nell'atteggiamento affine della figura), si riconosce che, posto:

$$S_n = \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3} ,$$

si ha (per ogni valore *intero* di n):

$$\begin{aligned} A^n &= (S_n, S_{n-1}, S_{n-1}) , \\ B^n &= (S_{n-1}, S_n, S_{n-1}) , \\ C^n &= (S_{n-1}, S_{n-1}, S_n) . \end{aligned}$$

Quando i centri A^0, B^0, C^0 sono allineati, sulla stessa retta si trovano anche tutte le altre terne $A^iB^iC^i$ e, supposto $\overline{A}$ improprio, hanno tutte lo stesso baricentro O. Assunto O come origine di un sistema di ascisse, e dette a, b, c le ascisse di A^0,

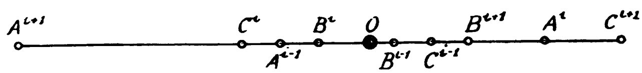

Fig. 7

B^0, C^0, si riconosce che le ascisse dei punti A^i, B^i, C^i sono rispettivamente $(-2)^i a$, $(-2)^i b$, $(-2)^i c$, potendo l'indice i assumere tutti i valori interi. La configurazione delle terne $A^iB^iC^i$ è illustrata dalla fig. 7.

7. – Prima di procedere, osserviamo che il caso II è *duale* di quello I, cosicchè per esso varranno le conclusioni duali. In particolare vi si potranno distinguere tre sottocasi II_1, II_2, II_3, duali di quelli I_1, I_2, I_3, ed anche *il caso II_3 risulterà escluso.* Per il caso II_1 si avrà che: *la condizione che i loro centri coincidano in un punto U è sufficiente perchè siano involutori i prodotti α', β', γ' delle tre involuzioni date α, β, γ. Con U coincidono anche i centri delle α', β', γ'. I due triangoli aventi per lati a, b, c ed $a'b'c'$ sono omologici, in una omologia di centro U. Inoltre il trilatero $a'b'c'$ è inscritto in quello abc.*

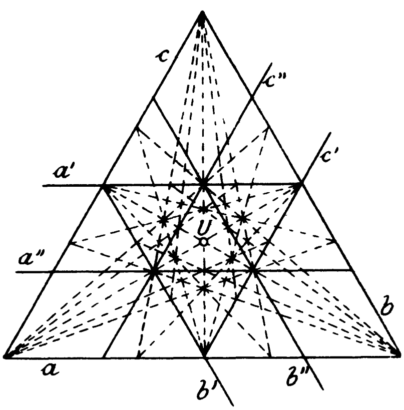

Fig. 8

La situazione è illustrata dalla Fig. 8, cui è stato dato un particolare atteggiamento affine, ponendo U nel baricentro del trilatero a, b, c. Vi sono messi in evidenza anche gli assi a'', b'', c'' delle tre omologie armoniche $\alpha''\beta''\gamma''$ e (a tratteggio) gli assi delle altre 16 omologie armoniche di centro U, diverse da α, β, γ, α', β', γ', che si possono ottenere come prodotti di tre di esse (n. 3).

Se poi a, b, c concorrono in un punto S, nello stesso punto concorrono anche a', b', c'. Le rette a, b, c sono le coniugate armoniche della retta SU rispetto alle coppie $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$. Inoltre, ad es., b' è la trasformata di a nella omologia speciale di centro U, asse SU, che trasforma b in c.

La situazione è illustrata dalla Fig. 9, dove (com'è lecito) S ed U sono supposti impropri.

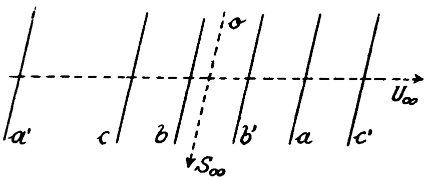

Fig. 9

8. - Esaminiamo ora il *caso* I_2. Anche ora le condizioni prescritte

$$A \in b = c = \bar{a}\,, \qquad A = \bar{A} = \bar{a} \cdot BC$$

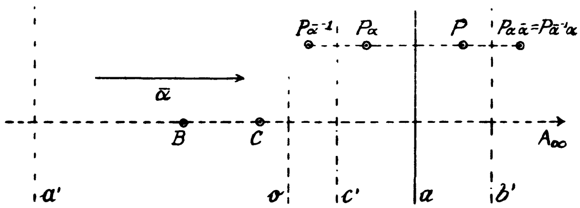

Fig. 10

sono *sufficienti* per la involutorietà del prodotto $\beta' = \alpha\beta\gamma$, comunque si scelga l'asse a di α. Per convincersene basta portare, come al solito, all'∞ la retta $\bar{a} = b = c$. Infatti allora si riconosce facilmente (v. Fig. 10) che, comunque si scelga P, si ha, come vuole la (5.1):

$$P_{\alpha\bar{\alpha}} = P_{\bar{\alpha}^{-1}\alpha}\,.$$

Inoltre anche il centro B' di β' coincide con $\bar{A}$, mentre il suo asse b' è la retta trasformata di a nella traslazione che porta B in C, ossia nella omologia speciale di centro $\bar{A}$ ed asse $\bar{a}$, che porta B in C.

Poichè ovviamente analoghe considerazioni valgono per il caso duale II_2, si può dunque affermare che:

I prodotti delle tre involuzioni date sono sempre involutori anche se:

I_2) *due di esse hanno gli assi coincidenti ed il centro della terza cade nella intersezione della congiungente i centri delle prime due con il loro comune asse.*

II_2) *due di esse hanno i centri coincidenti e l'asse della terza coincide con la congiungente il centro delle prime due con l'intersezione dei loro assi.*

È interessante osservare (v. fig. 10) che con $\bar{A}$ coincidono anche i centri C' ed A' delle omologie armoniche γ' ed α', quelli delle α'', β'', γ'', ecc., mentre i loro assi concorrono tutti nel punto $a \cdot \bar{a}$.

Ciò fra l'altro dimostra come, nel caso di tre omologie armoniche ed a prodotti armonici *con i centri coincidenti e gli assi concorrenti* (e quindi anche nel caso duale) la successione delle terne « *derivate* » di omologie armoniche $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$, $\gamma^{(i)}$ di cui alla fine del n. 3 *non è determinata procedendo verso sinistra* (cioè al decrescere degli indici) se non si impone ad es. che anche le $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$, $\gamma^{(i)}$ abbiano i centri coincidenti.

Supponiamo ad es. che siano date tre omologie armoniche α', β', γ' con i centri coincidenti $A' = B' = C' = U$, e dunque a prodotti armonici. Inoltre i loro assi a', b', c' concorrano in un punto S. Sappiamo già (n. 7) che le tre omologie armoniche α, β, γ con i centri A, B, C coincidenti in U e gli assi a, b, c coniugati armonici della retta $o = US$ rispetto alle coppie $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ sono a prodotti armonici, e questi prodotti sono per l'appunto $\alpha' = \gamma\alpha\beta\,,\ \beta' = \alpha\beta\gamma\,,\ \gamma' = \beta\gamma\alpha\,.$

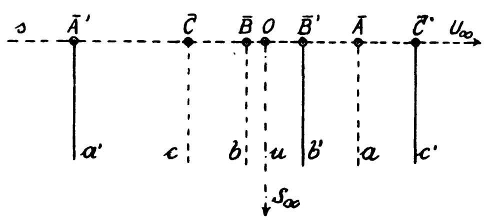

Fig. 11

Prendiamo (v. Fig. 11, dove U ed S sono impropri) una retta *arbitraria* s per S e poniamo $\bar{A} = s \cdot a$, $\bar{B} = s \cdot b$, $\bar{C} = s \cdot c$ e indichiamo con $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ le omologie armoniche di centri $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$

ed aventi come asse comune la retta $o = SU$. Quanto precede dimostra che anche le tre terne di omologie armoniche $\alpha\bar\beta\bar\gamma$, $\bar\alpha\beta\bar\gamma$, $\bar\alpha\bar\beta\gamma$ sono a prodotti armonici e che questi prodotti sono gli stessi α', β', γ' delle α, β, γ.

Per il caso duale, posto $\bar A' = s \cdot a'$, $\bar B' = s \cdot b'$, $\bar C' = s \cdot c'$, si può partire dalle tre omologie armoniche $\bar\alpha'$, $\bar\beta'$, $\bar\gamma'$ con gli assi coincidenti con la retta $o = US$ (e dunque a prodotti armonici) ed i centri allineati $\bar A'$, $\bar B'$, $\bar C'$. Sappiamo già (n. 6) che $\bar\alpha' = \bar\gamma\bar\alpha\bar\beta$, $\bar\beta' = \bar\alpha\bar\beta\bar\gamma$, $\bar\gamma' = \bar\beta\bar\gamma\bar\alpha$. Ma, per quanto s'è ora visto, sono a prodotti armonici anche le tre terne di omologie armoniche $\bar\alpha\beta\gamma$, $\alpha\bar\beta\gamma$, $\alpha\beta\bar\gamma$ ed i loro prodotti sono gli stessi $\bar\alpha'$, $\bar\beta'$, $\bar\gamma'$ delle $\bar\alpha$, $\bar\beta$, $\bar\gamma$. Si tenga presente che stavolta è data la retta s, mentre è *arbitraria* la scelta del punto S.

Riassumendo si ha:

$$\begin{cases} \alpha' = \gamma\alpha\beta = \bar\gamma\alpha\bar\beta = \bar\gamma\bar\alpha\beta = \gamma\bar\alpha\bar\beta \\ \beta' = \alpha\beta\gamma = \alpha\bar\beta\bar\gamma = \bar\alpha\beta\bar\gamma = \bar\alpha\bar\beta\gamma \\ \gamma' = \beta\gamma\alpha = \bar\beta\bar\gamma\alpha = \beta\bar\gamma\bar\alpha = \bar\beta\gamma\bar\alpha\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar\alpha' = \bar\gamma\bar\alpha\bar\beta = \gamma\bar\alpha\beta = \gamma\alpha\bar\beta = \bar\gamma\alpha\beta \\ \bar\beta' = \bar\alpha\bar\beta\bar\gamma = \bar\alpha\beta\gamma = \alpha\bar\beta\gamma = \alpha\beta\bar\gamma \\ \bar\gamma' = \bar\beta\bar\gamma\bar\alpha = \beta\gamma\bar\alpha = \bar\beta\gamma\alpha = \beta\bar\gamma\alpha\,. \end{cases}$$

9. - Andiamo infine a considerare il *caso III*. Non essendo mai permutabili due delle involuzioni date e non potendo due di esse avere i centri o gli assi coincidenti, potrà al più accadere che, ***prese due di esse*** (ad es. β e γ):

III$_1$) ***il centro di una*** (*soltanto*) ***appartenga all'asse dell'altra***; oppure che ***il centro di una di esse non appartenga all'asse dell'altra*** e che ***la congiungente i centri***:

III$_2$) ***passi per il punto comune agli assi***; oppure

III$_3$) ***non passi per il punto comune agli assi.***

Comunque, in ogni caso, posto ancora $\bar\alpha = \beta\gamma$, l'ipotesi della involutorietà del prodotto $\beta' = \alpha\beta\gamma = \gamma\beta\alpha$ si traduce nella:

$$\bar\alpha^{-1} = \alpha\bar\alpha\alpha \tag{9.1}$$

che afferma essere $\bar{\alpha}^{-1}$ trasformata di $\bar{\alpha}$ mediante α e quindi implica che *gli elementi uniti della* $\bar{\alpha}$ (e quindi anche della $\bar{\alpha}^{-1}$) *sono* (complessivamente) *mutati in se dalla* α.

Consideriamo dapprima il *caso* III_1 e supponiamo (com'è lecito) che sia ad es. $C \in b$.

Allora il triangolo (v. Fig. 12) avente per lati le rette b, c, $s = BC$ non è degenere ed è chiaro che i punti $S = b \cdot c$ e C e le rette $s = BC$ e b sono uniti in $\bar{\alpha}$. Portando C all'∞ si riconosce

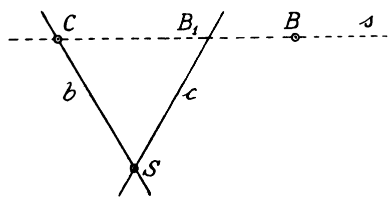

Fig. 12

al solito che $\bar{\alpha}$ subordina su s la proiettività parabolica col punto unito C che trasforma B nel suo omologo in γ. Dunque la $\bar{\alpha}$ subordina anche nel fascio unito S una proiettività parabolica, con la retta unita b. Pertanto *gli unici punti uniti di* $\bar{\alpha}$ *cadono sulla retta* b (dove $\bar{\alpha}$ opera come γ) *e coincidono con* S *e* C.

Inoltre *le uniche rette unite di* $\bar{\alpha}$ *sono la* s *e la* b. Infatti tali rette unite debbono passare per S o per C, e nel fascio S c'è la sola b, mentre nel fascio C (dove la $\bar{\alpha}$ opera come β) oltre alla b c'è la sola s.

Pertanto α deve mutare in se la coppia di rette s, b e la coppia di punti S, C. Nè α può scambiare tra loro s e b, altrimenti per α sarebbe unito C, ma non potrebbe essere unito S, come dovrebbe. E neppure può α scambiare C ed S, altrimenti in α sarebbe unita la retta b, ma non (come dovrebbe essere) la retta s. Dunque *i punti* S, C *e le rette* s, b *debbono essere uniti in* α.

Il caso che l'asse a di α coincida con l'asse b di β è da escludere per l'ipotesi fatta che due delle tre omologie α, β, γ non abbiano mai gli assi coincidenti. Dunque la retta b dovrebbe essere unita perchè passa per il centro A di α, che dovrebbe necessariamente coincidere con C o con S. Ma l'ipotesi che due delle tre omologie date non abbiano mai lo stesso centro esclude che sia $A = C$. Rimarrebbe l'altra possibilità, e cioè che fosse $A = S$. Ma allora dovrebbe essere $a = s$, ed anche questa eventualità è da escludere (avendo supposto che due delle tre omologie date non siano mai permutabili) in quanto α risulterebbe permutabile sia con β che con γ.

Dunque *il caso* III_1 *è da escludere.*

10. - Esaminiamo ora il caso III_2. Sono uniti in $\bar{\alpha}$ la retta $s = BC$ ed il punto $S = b \cdot c$. Inoltre, per ipotesi, $S \in s$, cosicchè la configurazione è *autoduale* (v. fig. 13).

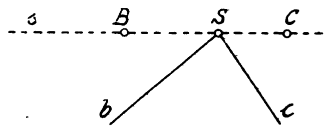

Fig. 13

La $\bar{\alpha}$ subordina su s una proiettività parabolica di punto unito S e (dualmente) nel fascio S una proiettività parabolica di retta unita s. Dunque *S è l'unico punto unito di $\bar{\alpha}$ ed s ne è l'unica retta unita.* Pertanto *S ed s debbono essere uniti anche in α.*

Si può escludere che sia $A = S$, altrimenti, appartenendo il centro di α agli assi di β e γ, si ricadrebbe nel caso III_1. Per lo stesso motivo si può escludere che sia $a = s$, altrimenti sarebbero i centri di β, γ ad appartenere all'asse di α. Dunque *l'asse a di α passa per S ed il suo centro A appartiene ad s*, essendo *distinti* tanto i 4 punti A, B, C, S (allineati su s), quanto le quattro rette a, b, c, s (concorrenti in S).

Portando all'∞ S o rispettivamente s si riconosce facilmente che l'omografia $\beta' = \alpha\bar{\alpha}$ subordina:

1) sulla retta unita s una involuzione, avente come punti uniti S ed il corrispondente U di A nella proiettività parabolica di punto unito S, che porta B in C;

2) nel fascio unito S una involuzione, avente per rette unite s e la retta u corrispondente ad a nella proiettività parabolica avente come retta unita s, che porta b in c.

Se β' *è involutoria* (cioè omologia armonica) *il suo centro* B' deve appartenere alla retta unita s e, non potendo per la 2) coincidere con S, *deve necessariamente coincidere con* U. Dualmente, *il suo asse deve coincidere con* u.

Infine, tenuto conto delle 1), 2), *perchè* β' *sia involutoria* occorre e basta che per essa la retta u sia luogo di punti uniti (o, dualmente, che U sia fascio di rette unite). Perchè ciò accada *occorre e basta che sia*:

$$(ABCS) = (abcs) . \tag{10.1}$$

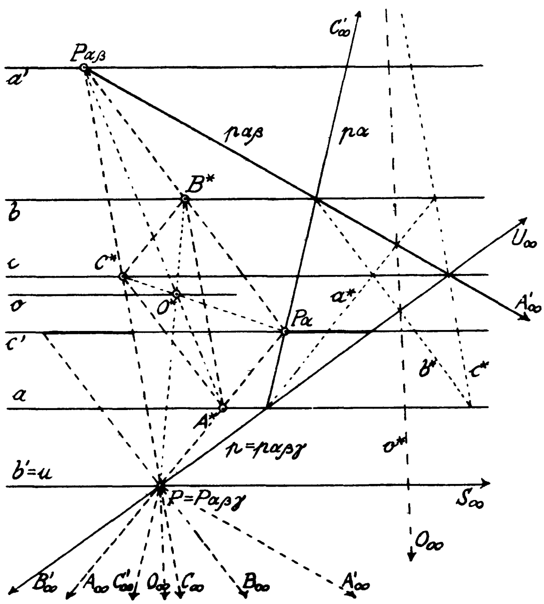

Fig. 14

Infatti, si porti ad es. s all'∞ (v. Fig. 14) e, fissate ad arbitrio le tre rette parallele a, b, c (e dunque anche il loro comune punto improprio S_∞) si costruisca a norma della 2) la retta u. Preso un punto arbitrario P della u, affinchè esso sia unito in $\beta' = \alpha\beta\gamma$ occorre e basta che, costruiti successivamente i punti P_α, $P_{\alpha\beta}$, $P_{\alpha\beta\gamma}$, risulti:

$$P_{\alpha\beta\gamma} = P \tag{10.2}$$

Pertanto, fissate che siano (in modo arbitrario, purchè distinte e non parallele ad S_∞) le direzioni di due centri delle α, β, γ, ad es. A_∞ e B_∞, la direzione del terzo centro (C_∞) resta determinata dalla (10.2). E la stessa (10.2) resta verificata per qualunque altro punto P' della retta u, giacchè il triangolo $P'P'_\alpha P'_{\alpha\beta}$ è il trasformato di quello $PP_\alpha P_{\alpha\beta}$ nella traslazione che porta P in P', la quale lascia fissi le rette u, a, b, c ed i punti A_∞, B_∞, C_∞.

Si tratta di verificare che la direzione di C_∞ così determinata coincide con quella determinata dalla (10.1). Basta perciò os-

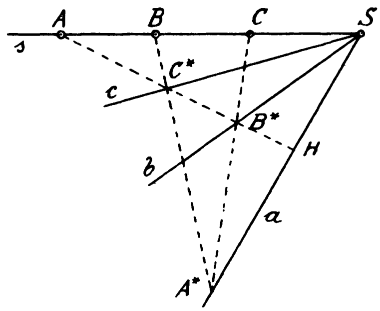

Fig. 15

servare che il triangolo $A^*B^*C^*$ avente per vertici i punti medi di quello $PP_\alpha P_{\alpha\beta}$ ha i lati che passano per A_∞, B_∞, C_∞ ed i vertici che appartengono ad a, b, c. Infatti (v. Fig. 15) sia H il punto d'intersezione delle rette B^*C^* ed a. La quaterna di punti allineati AC^*B^*H è sezione della quaterna di rette $scba$. D'altra parte proiettandola da A^* su s si ottiene la quaterna di punti $ABCS$. Dunque

$$(ABCS) = (scba) = (abcs)\,, \qquad \text{c. v. d.}$$

Tornando alla Fig. 14, si osservi che i punti $P_\alpha = P_{\alpha\beta\gamma\alpha}$ e $P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta\gamma\alpha\beta}$ sono uniti rispettivamente in $\gamma' = \beta\gamma\alpha$ ed in $\alpha' = \gamma\alpha\beta$, e che le loro congiungenti con S_∞ sono gli assi delle omologie armoniche γ' ed α'. Per il baricentro comune O^* dei due triangoli $PP_\alpha P_{\alpha\beta}$ ed $A^*B^*C^*$ e per S_∞ passa la comune retta baricentrica o delle terne di rette parallele abc, $a'b'c'$, ..., assi della successione di terne di omologie armoniche a prodotti armonici di cui al n. 3.

Nella stessa Fig. 14 è messa in evidenza anche la configurazione, duale della precedente, di tre rette p, p_α, $p_{\alpha\beta}$ unite rispettivamente in β', γ', α'. Si è presa come retta p la congiungente il punto P scelto prima sulla $u = b'$ con il punto $U_\infty = B'_\infty$, determinato a norma della 1). Così la costruzione delle altre due p_α e $p_{\alpha\beta}$ si effettua immediatamente sfruttando P_α e $P_{\alpha\beta}$.

Poichè p_α passa per C'_∞ e $p_{\alpha\beta}$ per A'_∞, se ne deduce una costruzione di questi due punti. Inoltre, poichè il trilatero $pp_\alpha p_{\alpha\beta}$ ha i vertici sulle rette a, b, c, ne risulta $(A'B'C'S) = (abcs)$. Dualmente, dalla considerazione del triangolo $PP_\alpha P_{\alpha\beta}$ i cui vertici appartengono ad $a'b'c'$ ed i cui lati passano per $A_\infty B_\infty C_\infty$, si ricava $(ABCS) = (a'b'c's)$. In definitiva, tenendo conto della (10.1), *per gli assi* (concorrenti in S) *ed i centri* (allineati su s) *delle terne di omologie armoniche a prodotti armonici della successione di cui al n. 3, si ha*:

$$(10.3) \qquad \ldots (A''B''C''S) = (A'B'C'S) = \\ = (ABCS) = (abcs) = \\ = (a'b'c's) = (a''b''c''s) = \ldots$$

Nella stessa Fig. 14 si è messo in evidenza anche il trilatero $a^*b^*c^*$ delle rette congiungenti i vertici del trilatero $pp_\alpha p_{\alpha\beta}$ con i centri $A_\infty B_\infty C_\infty$, duale di quello $A^*B^*C^*$ della stessa figura. I due trilateri $pp_\alpha p_{\alpha\beta}$ ed $a^*b^*c^*$ sono omologici ed il loro asse di omologia o^* sega la retta s_∞ nel punto O_∞, comune centro delle medie armoniche rispetto ad S_∞ di tutte le terne di centri ABC, $A'B'C'$, ... delle terne di omologie armoniche della successione già citata.

Riassumendo, possiamo concludere che *i prodotti delle tre involuzioni date α, β, γ sono sempre involutori anche se*:

III$_2$) *i loro centri A, B, C sono distinti ed allineati su di una retta s, i loro assi a, b, c sono distinti e concorrono in un punto S di s, e si ha*: $(ABCS) = (abcs)$.

Allora anche i centri A^i, B^i, C^i delle terne di omografie involutorie a prodotti involutori $\alpha^{(i)}\beta^{(i)}\gamma^{(i)}$, derivate dalla data e di cui al n. 3, sono allineati sulla retta s, mentre i loro assi a^i, b^i, c^i

concorrono in S e vi generano le stesse configurazioni (tra loro duali) illustrate rispettivamente dalla Fig. 7 del n. 6 e dalla Fig. 9 del n. 7.

11. - Ci rimane da esaminare il *caso* III_3, in cui il punto $S = b \cdot c$ non appartiene alla retta $s = BC$.

Posto

$$B_1 = s \cdot b\,, \qquad C_1 = s \cdot c\,,$$
$$b_1 = SB\,, \qquad c_1 = SC\,,$$

per ipotesi i quattro punti BB_1CC_1 sono distinti, cosicchè restano determinati e distinti (fra loro e dai precedenti) i due punti uniti I, J della involuzione in cui si corrispondono le 2 coppie BB_1, CC_1. Porremo anche $j = SI$, $i = SJ$.

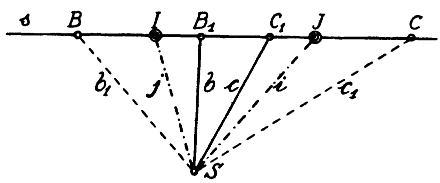

Fig. 16

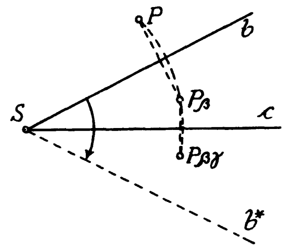

Fig. 17

Anche ora la configurazione è *autoduale* (v. Fig. 16).

Portando con una omografia I, J nei punti ciclici, β e γ divengono le simmetrie ortogonali rispetto ai due assi b, c concorrenti nel punto proprio S, ed il loro prodotto $\bar{\alpha} = \beta\gamma$ diviene la ***rotazione*** attorno ad S che porta b nella sua simmetrica b^* rispetto a c (v. Fig. 17). Pertanto *in $\bar{\alpha}$ sono uniti solo i 3 punti SIJ e le tre rette sij.*

Inoltre, poichè in quella rotazione sono uniti i circoli di centro S, *nella $\bar{\alpha}$ (e nella $\bar{\alpha}^{-1}$) è unita ciascuna delle coniche del fascio-schiera $\sum$ individuato dalle due coniche degeneri nella coppia di rette i, j e nella retta s contata due volte.* Su ognuna delle coniche irriducibili di $\sum$ resta subordinata una proiettività avente come punti uniti I, J. Tutte queste proiettività hanno lo stesso invariante assoluto.

Poichè i tre punti uniti S, I, J di $\bar{\alpha}$ debbono essere (complessivamente) mutati in se da α, non potendo essere permutati circolarmente (altrimenti α non avrebbe periodo 2) *almeno uno di essi deve essere unito per* α, che deve scambiare gli altri due o lasciarli uniti. Dualmente, per le tre rette unite s, i, j.

Possiamo anche *escludere che l'asse a di α coincida con $s = BC$* (e quindi il centro A coincida con S) altrimenti si ricadrebbe nel caso III_1.

D'altra parte, se l'asse a di α coincidesse con la SI (e quindi se A coincidesse con J) perchè la $\beta' = \alpha\beta\gamma$ fosse involutoria,

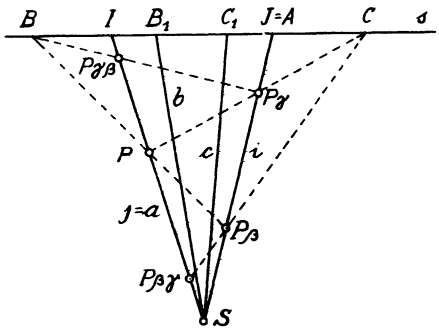

Fig. 18

essa dovrebbe subordinare una involuzione sulla retta unita $a = SI = j$, dove opera come $\bar{\alpha} = \beta\gamma$. Dunque (v. Fig. 18) preso un punto P di a distinto da S e da I (e quindi non unito in $\bar{\alpha}$) si dovrebbe avere $P_{\beta\gamma} = P_{\gamma\beta}$. Allora i quattro punti P, $P_{\beta\gamma}$ (appartenenti a j, distinti fra loro e da I, S) P_β e P_γ (appartenenti ad i e distinti fra loro e da J, S) sarebbero distinti e vertici di un quadrangolo piano completo, del quale i e j sarebbero lati opposti e B, C due punti diagonali. Dunque I, J dovrebbero separare armonicamente B, C, e ciò è assurdo, in quanto allora dovrebbe essere $C = B_1$, $B = C_1$, contro alla ipotesi che β e γ non siano permutabili.

Pertanto *l'asse a di α non può coincidere con j e quindi* (data la simmetria del comportamento della coppia i, j nella configurazione β,γ) *neppure con i*.

Assodato così che α, non potendo permutare circolarmente i tre punti I, J, S, nè potendo lasciarli tutti uniti, deve lasciarne uno fisso e scambiare gli altri due, dovremo esaminare i seguenti sottocasi:

III_{31}) *α scambia uno dei due punti I, J con S, mentre lascia fisso l'altro.*

III_{32}) *α scambia I con J, mentre lascia fisso S.*

12. – Esaminiamo dapprima il *caso III_{31}*. Si può sempre supporre che *α scambi I con S, mentre lascia fisso J.* Allora:

1) *il centro A di α appartiene a $j = SI$, mentre il suo asse a passa per J ed interseca la j nel coniugato armonico A_1 di A rispetto alla coppia IS.*

Il punto J e la retta j sono unite anche in $\alpha\bar{\alpha}$ e poichè i due punti I, S si corrispondono in doppio modo in $\alpha\bar{\alpha}$, la $\alpha\bar{\alpha}$ subordina una involuzione nel fascio di centro J e sulla punteggiata j. Perciò la stessa involuzione è ivi subordinata anche da $\bar{\alpha}^{-1}\alpha$.

Tanto la $\alpha\bar{\alpha}$ che la sua inversa $\bar{\alpha}^{-1}\alpha$ trasformano il fascio di centro I nel fascio di centro S e le rette s, j rispettivamente nelle rette i, j. Perciò affinchè la $\alpha\bar{\alpha}$ sia involutoria occorre e basta che $\alpha\bar{\alpha}$ ed $\bar{\alpha}^{-1}\alpha$ trasformino una retta r per I (diversa da s, j) nella stessa retta $r_{\alpha\bar{\alpha}} = r_{\bar{\alpha}^{-1}\alpha}$ per S. Ora è facile vedere che in generale ciò non può accadere e che la *condizione necessaria e sufficiente perchè* (ciò accada, cioè perchè) *la $\beta' = \alpha\beta\gamma$ sia involutoria è che il birapporto della quaterna $IJBC$ sia una radice cubica immaginaria della unità* [6]):

$$(12.1) \qquad (IJBC) = \varepsilon\,, \qquad \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0\,.$$

E ciò nel senso che: *comunque si scelgano (a norma della* 1)) *l'asse a ed il centro A di α* (la scelta del centro determina quella dell'asse, e viceversa) *la omografia $\beta' = \alpha\beta\gamma$ risulta o no involutoria secondo che è o non è verificata la* (12.1).

Infatti, si portino, com'è lecito, i punti I ed S all'∞ (v. Fig. 19).

Fissato il punto proprio J, si traccino le rette JS_∞, JI_∞ e si

---

[6]) In altre parole: *la quaterna $IJBC_1$ è equianarmonica.*

scelgano sulla $s = JI_\infty$ i punti propri (distinti fra loro e da J) B e C. Le rette b, c restano allora determinate, dovendo passare per S_∞ e segare la s nei punti B_1, C_1 simmetrici di B, C rispetto a J.

Presa ad arbitrio la retta a per J (non passante per I_∞ nè per S_∞) si scelga come retta r quella congiungente I_∞ con $L = b \cdot a$.

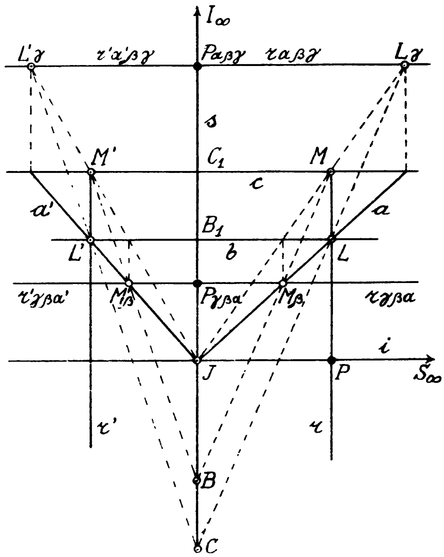

Fig. 19

La Fig. 19 mostra che la costruzione delle rette $r_{\alpha\bar{\alpha}} = r_{\alpha\beta\gamma}$ ed $r_{\bar{\alpha}^{-1}\alpha} = r_{\gamma\beta\alpha}$ *non dipende dalla scelta della retta* a.

Infatti, fatta un'altra scelta a', basta osservare che le due rette $r_{\alpha\beta\gamma}$ ed $r_{\gamma\beta\alpha}$ sono unite nell'omologia affine di asse s e centro S_∞ che muta a in a', la quale, mentre lascia immutate β e γ, trasforma r in r' ed α in α'.

D'altra parte si può assumere nel piano della figura un sistema di coordinate proiettive omogenee associate di punto $(x_1 x_2 x_3)$ e di retta $[u_1 u_2 u_3]$, con i punti fondamentali $S = (1, 0, 0)$, $I = (0, 1, 0)$, $J = (0, 0, 1)$ ed il punto unità $L = (1, 1, 1)$. Il particolare atteggiamento metrico della Fig. 19 fa sì che in essa le (x), $[u]$ siano rispettivamente coordinate cartesiane e plückeriane associate. Posto:

$$\varepsilon = (IJBC) = (IJB_1C_1)$$

si ha:

$$(12.2)\quad \begin{cases} A = (1, -1, 0)\,, & B = (0, -1, 1)\,, & C = (0, \varepsilon, -1) \\ a = [1, -1, 0]\,, & b = [0, -1, 1]\,, & c = [0, -1, \varepsilon] \end{cases}$$

Inoltre:

$$M = (1, \varepsilon, 1)\,, \qquad L_\gamma = (\varepsilon, \varepsilon^2, 1)\,, \qquad M_\beta = (1, 1, \varepsilon)\,.$$

Dunque, perchè si abbia $r_{\alpha\beta\gamma} = r_{\gamma\beta\alpha}$ occorre e basta che le ordinate di L_γ ed M_β coincidano, cioè che sia $\varepsilon^3 = 1$, ossia, non potendo essere $\varepsilon = 1$ perchè per ipotesi $C_1 \neq B_1$:

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0\,,$$

come appunto vuole la (12.1).

Si tenga anche presente che da ciò deriva che *la configurazione III_{31} di tre omologie armoniche α, β, γ a prodotti armonici non esiste nel campo reale.*

Infatti, se sono reali β e γ, sono reali anche B, b, C, c, S, s, B_1, C_1. E poichè $(-1, 1, -\varepsilon, \varepsilon) = [(\varepsilon - 1)^2/(\varepsilon + 1)^2] = -3$, le (12.1) equivalgono [7]) alla:

$$(12.3)\qquad (BB_1CC_1) = -3$$

Dunque le due coppie BB_1, CC_1 non si separano. Pertanto I e J sono immaginari e coniugati, come le due rette i, j. E poichè l'unica retta reale per J è la s e l'unico punto reale della j è S, necessariamente il centro A e l'asse a di α sono immaginari. Dunque α è immaginaria.

---

[7]) Infatti sulla retta s la (12.3) determina (a meno di trasf. proiettive) la configurazione delle due coppie BB_1, CC_1, cosicchè resta determinata anche la coppia IJ che le separa entrambe armonicamente, ed in modo da verificare le (12.1).

D'altra parte, se sono reali I e J e ad es. β è reale, può essere reale α, ma è immaginaria γ, essendo immaginari il suo centro ed il suo asse.

13. - Da quanto precede risulta che nel *caso* III_{31} il centro B' di $\beta' = \alpha\beta\gamma$ appartiene (come quello di α) alla retta j, mentre il suo asse b' passa per J.

Nel riferimento proiettivo già usato nel n. 12, l'asse b' (che passa anche per il punto $r \cdot r_{\alpha\beta\gamma}$) ha l'equazione $x_1 - \varepsilon x_2 = 0$, mentre il centro B' (che è allineato con P e $P_{\alpha\beta\gamma}$) ha le coordinate $(\varepsilon, -1, 0)$. Dunque $(SIAB') = \varepsilon$, e la situazione delle due omologie armoniche α, β' e dei tre punti JSI è analoga a quella delle due β, γ e dei tre punti SIJ.

Sfruttando le (2.3) è facile determinare le coordinate (x) ed $[u]$ dei centri e degli assi degli altri due prodotti involutori α' e γ' delle date α, β, γ:

$$(13.1)\quad \begin{cases} A' = (-1, 0, \varepsilon)\,, & B' = (\varepsilon, -1, 0)\,, & C' = (-1, \varepsilon, 0) \\ a' = [\varepsilon, 0, -1]\,, & b' = [-1, \varepsilon, 0]\,, & c' = [\varepsilon, -1, 0] \end{cases}$$

Anche la configurazione delle α', β', γ' e dei tre punti JSI è analoga a quella delle α, β, γ e dei tre punti SIJ. Più esattamente dalle (12.2), (13.1) risulta che *la configurazione $ABCabc$ è trasformata in quella $A'B'C'a'b'c'$ dall'omografia ciclica del* 3° *ordine* ω, *di equazioni.*

$$(13.2)\qquad \begin{aligned} y_1 : y_2 : y_3 &= x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon x_1 \,; \\ v_1 : v_2 : v_3 &= \varepsilon^2 u_2 : u_3 : \varepsilon u_1 \end{aligned}$$

Cosicchè anche la configurazione $A''B''C''a''b''c''$ dei centri e degli assi delle tre omologie armoniche α'', β'', γ'' prodotti delle α', β', γ' è la trasformata mediante ω della configurazione $A'B'C'a'b'c'$:

$$(13.3)\quad \begin{cases} A'' = (0, -1, \varepsilon)\,, & B'' = (\varepsilon, 0, -1)\,, & C'' = (1, 0, -1) \\ a'' = [0, \varepsilon, -1]\,, & b'' = [-1, 0, \varepsilon]\,, & c'' = [-1, 0, 1] \end{cases}$$

Inoltre i prodotti (armonici) delle α'', β'', γ'' sono di nuovo le omologie α, β, γ di partenza. Dunque *la successione di terne di omologie armoniche a prodotti armonici di cui al n.* 3 *si riduce, nel caso* III_{31}, *soltanto alle tre terne* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$.

Esaminando le coordinate (12.2), (13.1), (13.3) si riconosce [8]) che:
la configurazione dei nove centri delle omologie armoniche α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' *è quella ben nota dei nove punti base (di flesso) di un fascio sizigetico generale* $\sum$ *di cubiche piane. Gli assi delle nove omologie armoniche suddette sono le polari armoniche dei nove flessi delle cubiche del fascio* $\sum$.

Infine [9]) il prodotto di tre qualsiasi di queste nove omologie armoniche è ancora una di esse. Si ha così — nel piano proiettivo complesso — un *esempio di un sistema di nove omologie armoniche, chiuso rispetto alla moltiplicazione ternaria.*

14. - Esaminiamo infine il caso III_{32}. In questo caso (n. 11) anche *il centro* A *di* α *appartiene alla retta* $s = IJ$, mentre *il suo asse* a *passa per* S. Inoltre, posto $A_1 = s \cdot a$, *anche la quaterna* I, J, A, A_1 *è armonica.*

Questo basta perchè la omografia $\beta' = \alpha\bar{\alpha}$ *sia involutoria.*

Infatti, posti come al n. 11 i punti I, J nei punti ciclici del piano, α, β è γ appaiono come simmetrie ortogonali rispetto a tre assi a, b, c concorrenti nel punto proprio S, ciascuna delle quali muta in se ogni circolo k di centro S. D'altra parte $\bar{\alpha} = \beta\gamma$ lascia fissi i punti ciclici I, J, mentre α, e quindi anche $\beta' = \alpha\bar{\alpha}$

[8]) Si confronti ad es. MORGANTINI E., *Su una relazione di armonia fra i triangoli del piano proiettivo complesso* (Annali Triestini, Serie IV, Vol. V (1951), pp. 5-33), pag. 25, Tabella II. Del fascio Σ fanno parte le 4 cubiche degeneri nei lati dei 4 triangoli inflessionali, a due a due armonici, che si possono costruire con le 12 rette di Mac Laurin delle cubiche del fascio. Uno di questi triangoli è SIJ. Un altro è quello avente per vertici i 3 punti $O_1 = (1, 1, \varepsilon) = M_\beta$, $O_2 = (1, \varepsilon, 1) = M$, $O_3 = (\varepsilon, 1, 1)$, uniti nella ω. Un terzo ha un vertice in $L = (1, 1, 1)$ ed il lato opposto in $l = [1, 1, 1]$.

[9]) Come risulta dalla Tabella III, riportata a pag. 26 del lavoro citato sopra.

li scambia fra loro. Cosicchè la proiettività subordinata da β' su ognuno dei circoli uniti k è una involuzione (i cui punti uniti sono estremi di un diametro) e quindi anche β' è involutoria, cioè *β' è una omologia armonica il cui asse b' passa per S ed il cui centro B' appartiene ad s.*

Inoltre β' appare nella figura come una simmetria ortogonale (di asse b') ossia, posto $B_1' = s \cdot b'$, *anche la quaterna $IJB'B'_1$ è armonica.*

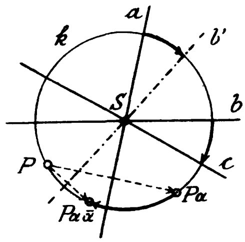

Fig. 20

Infine (v. Fig. 20) la stessa rotazione attorno ad S che porta b in c porta a in b', ossia *sulla retta s si ha* $(IJBC) = (IJAB')$, e ciò equivale a dire che nel fascio S si ha: $(ijbc) = (ijab')$.

Per quanto riguarda la *successione* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$, ... delle terne « derivate » di omologie armoniche a prodotti armonici di cui al n. 3, risulta in questo caso che:

1) *tutti i loro assi passano per S e, dualmente, tutti i loro centri appartengono ad s.*

2) *la configurazione dei loro assi determina quella* (ad essa proiettiva) *dei loro centri, e viceversa* (*dualmente*) *essendo l'intersezione di ciascun asse con s coniugata armonica del rispettivo centro rispetto alla coppia fissa I, J.*

3) *Dati i punti I, J ed i centri A^i, B^i, C^i delle $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$, $\gamma^{(i)}$, i centri A^{i+1}, B^{i+1}, C^{i+1} delle $\alpha^{(i+1)}$, $\beta^{(i+1)}$, $\gamma^{(i+1)}$ restano determinati dalle relazioni*:

$$(14.1) \qquad \frac{(IJB^i)(IJC^i)}{(IJA^i)(IJA^{i+1})} = \frac{(IJC^i)(IJA^i)}{(IJB^i)(IJB^{i+1})} = \frac{(IJA^i)(IJB^i)}{(IJC^i)(IJC^{i+1})} = 1$$

Dualmente, per gli assi.

Si osservi che, assunto sulla retta s un sistema di coordinate proiettive (non omogenee) con i punti fondamentali I, J, nel quale siano x, y, z le coordinate di A, B, C, dalle (14.1) si deduce che la *successione delle terne delle coordinate dei centri* A^i, B^i, C^i *è la seguente*:

$$(14.2)\qquad \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{yz}{x} \\[2mm] \dfrac{zx}{y} \\[2mm] \dfrac{xy}{z} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{x^3}{yz} \\[2mm] \dfrac{y^3}{zx} \\[2mm] \dfrac{z^3}{xy} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{y^3z^3}{x^5} \\[2mm] \dfrac{z^3x^3}{y^5} \\[2mm] \dfrac{x^3y^3}{z^5} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{x^{11}}{y^5z^5} \\[2mm] \dfrac{y^{11}}{z^5x^5} \\[2mm] \dfrac{z^{11}}{x^5y^5} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{y^{11}z^{11}}{x^{21}} \\[2mm] \dfrac{z^{11}x^{11}}{y^{21}} \\[2mm] \dfrac{x^{11}y^{11}}{z^{21}} \end{cases}, \ldots$$

15. - Dalle (14.2) risulta che, *se* I, J *sono i punti ciclici*:

1) b' *rimane fisso per una uguale rotazione attorno ad* S *degli assi* a *e* b (oppure c e d) *mentre rimane fisso l'asse* c (o rispettivamente a). Analogamente per c' ed a'.

2) *Assoggettando ad una ugual rotazione attorno ad* S *tutti e tre gli assi* a, b, c, *alla stessa rotazione restano assoggettati anche gli assi* $a'b'c'$, $a''b''c''$, ... *di tutte le terne della successione* $\alpha^{(i)}\beta^{(i)}\gamma^{(i)}$.

3) Sempre dalle (14.2) risulta che *la successione* $\alpha^{(i)}\beta^{(i)}\gamma^{(i)}$ *non resta determinata procedendo verso sinistra.* Infatti, basta osservare che le relazioni

$$(15.1)\qquad x' = \frac{yz}{x}, \qquad y' = \frac{zx}{y}, \qquad z' = \frac{xy}{z}$$

forniscono gli stessi valori di $x'y'z'$ anche se ai valori xyz si sostituiscono quelli x, $-y$, $-z$, oppure $-x$, y, $-z$, oppure $-x$, $-y$, z.

D'altra parte, supposti noti x', y', z', le (15.1) forniscono le x, y, z a meno di un contemporaneo cambiamento di segno in due di esse, avendosi,

$$(15.2)\qquad x = \sqrt{y'}\sqrt{z'}, \qquad y = \sqrt{z'}\sqrt{x'}, \qquad z = \sqrt{x'}\sqrt{y'},$$

ed essendo la stessa, nelle due delle tre formule (15.2) in cui rispettivamente compaiono, la determinazione dei radicali $\sqrt{x'}$, $\sqrt{y'}$, $\sqrt{z'}$.

Dunque, indicando con α_1, β_1, γ_1 le omologie armoniche (a prodotti armonici) di centri $A_1 = s \cdot a$, $B_1 = s \cdot b$, $C_1 = s \cdot c$ e di assi $a_1 = SA$, $b_1 = SB$, $c_1 = SC$, *alla stessa successione di terne* $\alpha^{(i)}\beta^{(i)}\gamma^{(i)}$ *si perviene partendo indifferentemente da una qualunque delle terne di omologie armoniche a prodotti armonici*:

$$\alpha\beta\gamma\,, \qquad \alpha\beta_1\gamma_1\,, \qquad \alpha_1\beta\gamma_1\,, \qquad \alpha_1\beta_1\gamma\,. \tag{15.3}$$

4) Dalle (14.2) si ha:

$$k = xyz = x'y'z' = x''y''z'' = \ldots \tag{15.4}$$

Le (15.4) non dipendono dalla scelta del punto unità O sulla retta s, sebbene dalla sua scelta dipenda il valore comune k dei prodotti ternari che vi figurano. Per un cambiamento del punto unità $O \rightarrow \overline{O}$:

$$x^{(i)} = \varrho\overline{x}^{(i)}\,, \qquad y^{(i)} = \varrho\overline{y}^{(i)}\,, \qquad z^{(i)} = \varrho\overline{z}^{(i)}\,,$$

si ha:

$$k = x^{(i)}y^{(i)}z^{(i)} = \varrho^3\overline{x}^{(i)}\overline{y}^{(i)}\overline{z}^{(i)} = \varrho^3\overline{k}\,,$$

cosicchè si può fare in modo che sia $\overline{k} = 1$ scegliendo ϱ in modo da avere $\varrho^3 = k$, ossia assumendo come valori di ϱ una delle tre radici cubiche (complesse) di k: $\sqrt[3]{k}$, $\varepsilon\sqrt[3]{k}$, $\varepsilon^2\sqrt[3]{k}$, dove 1, ε, ε^2 sono le radici cubiche complesse dell'unità. In altre parole: *sulla retta s vi sono tre punti O_1, O_2, O_3 i quali, assunti come punti unità, fanno sì che nelle* (15.4) *sia* $k = 1$. Inoltre: *il ciclo* $(O_1O_2O_3)$ *individua su s una proiettività ciclica del* 3° *ordine con i punti uniti I, J.*

5) Supposto che I, J siano i punti ciclici ed indicate con o_1, o_2, o_3 le rette per S ortogonali alle direzioni dei punti impropri O_1, O_2, O_3, tenendo presente la formula di Laguerre [10]) ed orientato (arbitrariamente) il fascio S, da quanto precede risulta:

---

[10]) Cfr. ad es. COMESSATTI A., *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, P. II (2ª ed., Padova, C.E.D.A.M., 1946), pag. 32.

5.1) *Ciascuna delle tre rette* $o_1 o_2 o_3$ *è tale che*

$$(15.5) \quad o_j a^i + o_j b^i + o_j c^i \equiv 0 \pmod{\pi} \quad (j = 1, 2, 3;\ i = 0, 1, 2, \ldots)$$

5.2) *Le tre rette* o_1, o_2, o_3 *dividono in parti uguali l'angolo giro.*

6) Si può anche dire che le (15.4) esprimono che *tutte le terne di punti* $A^i B^i C^i$ *della retta* s (e analogamente le terne di-rette $a^i b^i c^i$ del fascio S) *appartengono ad una medesima trilinearità involutoria* T, *con i punti fondamentali* I, J, la quale resta individuata dai punti fondamentali e da una qualsiasi delle sue terne [11]).

Si noti che, nella precedente interpretazione metrica (J, I ciclici) le ∞^2 *terne abc della* T *sono* (nel fascio S) *caratterizzate dall'ammettere tutte le stesse tre rette* $o_1 o_2 o_3$ (necessariamente dividenti in parti uguali l'angolo giro) *come* «t r i s e t t r i c i» (cioè tali che $o_j a + o_j b + o_j c \equiv 0$ ($mod\ \pi$; $j = 1, 2, 3$)).

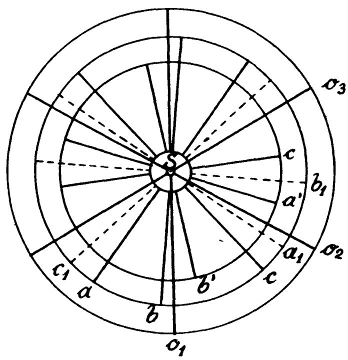

Fig. 21

7) Per quanto riguarda la precedente osservazione 3) sulla indeterminazione del prolungamento sinistro della successione delle terne $\alpha^i \beta^i \gamma^i$, si può anche osservare (v. Fig. 21) che nella attuale interpretazione metrica le coppie di rette ortogonali

[11]) Cfr. ad es. MORGANTINI E., *Teoria delle corrispondenze trilineari tra forme di prima specie* (Rend. Seminario Matematico, Padova, IX (1938), pp. 1-121).

aa_1, bb_1, cc_1, assi delle simmetrie ortogonali α, α_1; β, β_1; γ, γ_1, appaiono come le coppie delle bisettrici degli angoli $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ degli assi delle simmetrie ortogonali α', β', γ'.

Fissate (ad arbitrio) le tre rette a', b', c', quelle tre coppie di bisettrici restano determinate, assieme alle tre « trisettrici » della terna $a'b'c'$ (alle quali si possono assegnare ad arbitrio i nomi o_1, o_2, o_3). Rimane solo da scegliere, in ciascuna coppia di bisettrici, quella delle due al cui nome non va apposto l'indice 1. Per questo basta osservare che per due coppie tale scelta può farsi ad arbitrio. Scelte ad es. (nelle rispettive coppie di bisettrici degli angoli $b'c'$ e $c'a'$) le rette a, b, quella delle due bisettrici da chiamarsi c resta determinata dalla condizione che le trisettrici della terna abc coincidano con quelle o_1, o_2, o_3 della terna $a'b'c'$.

8) Si osservi inoltre che anche le quattro terne di simmetrie ortogonali

$$(15.5) \qquad \alpha_1\beta_1\gamma_1\,, \quad \alpha_1\beta\gamma\,, \quad \alpha\beta_1\gamma\,, \quad \alpha\beta\gamma_1$$

hanno come prodotti tre simmetrie ortogonali α_1', β_1', γ_1' i cui assi a_1', b_1', c_1' sono (anche a norma della precedente osservazione 2)) ortogonali a quelli $a'b'c'$ di α', β', γ'. Le tre trisettrici o_1', o_2', o_3' della terna $a_1'b_1'c_1'$ sono rispettivamente ortogonali a quelle o_1, o_2, o_3 e coincidono con le trisettrici delle quattro terne di assi delle (15.5).

In altre parole la configurazione crescente delle terne di omologie armoniche a prodotti armonici determinata indifferentemente da una delle 4 terne (15.3) scelta come iniziale, viene trasformata nell'analoga configurazione determinata da una delle (15.5) mediante una rotazione di $\pi/2$ attorno ad S.

9) La situazione delle terne T di simmetrie ortogonali *del piano* rispetto a tre assi concorrenti in un punto S rispecchia quella delle *terne T' di involuzioni con la coppia fissa I, J* da esse subordinate *sulla retta s* (o nel fascio S). Così anche queste terne T' sono *a prodotti involutori* e ciascuna di esse, assunta come terna iniziale, *individua*, procedendo verso destra, la successione « derivata » Σ' delle terne dei prodotti ternari.

Si noti però che, per quanto precede, *ad una terna apparte-*

nente a T' sono associate 8 *terne appartenenti a T*, quattro delle quali (le (15.3)) determinano una medesima successione Σ, mentre le altre quattro (le (15.5)) determinano un'altra successione Σ_1, che si può dedurre dalla precedente con una rotazione di $\pi/2$ attorno ad S (cioè con una omografia del piano, ciclica del 4° ordine, coi punti uniti S, I, J). Dunque *le due successioni Σ, Σ_1 sono associate ad una stessa successione Σ'.*

D'altra parte, *anche le successioni Σ' non sono prolungabili univocamente verso sinistra,* a partire dalla loro terna iniziale.

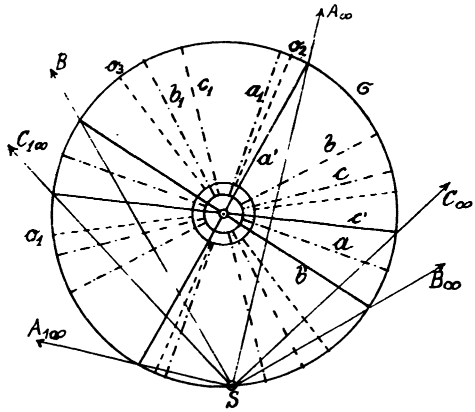

Fig. 22

Infatti, se AA_1, BB_1, CC_1 sono i punti doppi delle tre involuzioni di questa terna, supposto come al solito che la coppia fissa IJ sia quella dei punti ciclici, la retta impropria s (od il fascio S) si può riferire prospettivamente da S ad un circolo σ passante per S. Allora, essendo ortogonali le direzioni dei punti impropri AA_1, BB_1, CC_1 di ciascuna di queste tre coppie, queste tre involuzioni divengono su σ quelle subordinate dalle simmetrie ortogonali α', β', γ' del suo piano rispetto a tre suoi diametri $a'b'c'$ (v. Fig. 22).

Cosicchè si ricade nella situazione precedente, in quanto si potranno determinare quattro distinte terne di simmetrie ortogonali (diametrali per σ) $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta_1\gamma_1$, $\alpha_1\beta\gamma_1$, $\alpha_1\beta_1\gamma$, ciascuna delle quali ha come prodotti ternari le α', β', γ'.

Si tenga presente che le tre trisettrici $o_1 o_2 o_3$ di ciascuna delle 5 terne $a'b'c'$, abc, ab_1c_1, a_1bc_1, a_1b_1c di diametri del circolo σ, *nel fascio* S divengono tre coppie di rette ortogonali, ossia *sei rette dividenti in parti uguali l'angolo giro.*

La circostanza che a ed a_1 (b e b_1, c e c_1) siano ortogonali significa che *nel fascio* S *le simmetrie* $\bar{\alpha}$ *ed* $\bar{\alpha}_1$ (proiezioni di quelle subordinate da α ed α_1 su σ) hanno come rette unite due coppie di rette ortogonali (quelle che da S' proiettano gli estremi dei diametri ortogonali a, a_1 di σ) che *si deducono una dall'altra con una rotazione di* $\pi/4$.

16. - Sfruttando le (14.2) si può affrontare la *ricerca di quelle terne* $\alpha\beta\gamma$ *di omografie involutorie a prodotti involutori del tipo* III_{32}, *per le quali è finita la successione delle terne* $\alpha^{(i)}\beta^{(i)}\gamma^{(i)}$.

Infatti, essendo dato il triangolo SIJ, ognuna delle omologie armoniche $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$, $\gamma^{(i)}$ è determinata dalla scelta (su s) del suo centro (o, dualmente, del suo asse, appartenente ad S) ossia dalla sua coordinata $x^{(i)}$, $y^{(i)}$ o rispettivamente $z^{(i)}$. Si tenga presente che, nelle ipotesi fatte (III_{32})

$$x \neq y \neq z \neq x\,, \qquad xyz \neq 0, \infty\,. \tag{16.1}$$

Perciò, se ad es. si vuole che la terna iniziale $\alpha\beta\gamma$ coincida già con quella $\alpha'\beta'\gamma'$, non potendo essere, per le (16.1) $\alpha = \beta'$ oppure $\alpha = \gamma'$, nè $\beta = \gamma'$, resta solo da vedere se sia possibile che

$$\alpha = \alpha'\,, \qquad \beta = \beta'\,, \qquad \gamma = \gamma'\,.$$

Perciò, come vogliono le (14.2), (16.1) occorre e basta che x, y, z siano soluzioni distinte del sistema

$$x^2 = yz\,, \qquad y^2 = zx\,, \qquad z^2 = xy\,. \tag{16.2}$$

Ora è noto [12]) che, interpretate x, y, z come coordinate proiettive omogenee in un piano, le tre coniche (16.2) hanno in comune solo i tre punti

$$(1, 1, 1)\,, \qquad (\varepsilon, \varepsilon^2, 1)\,, \qquad (\varepsilon^2, \varepsilon, 1)\,.$$

---

[12]) Cfr. MORGANTINI E., l. cit. [8]), n. 3, p. 9.

La prima di queste soluzioni va scartata, per le (16.1). Rimangono le altre due, le quali sostanzialmente forniscono la stessa soluzione, in quanto entrambe affermano che *i centri A, B, C delle α, β, γ costituiscono sulla retta s un ciclo di una proiettività ciclica del 3° ordine avente come punti uniti I, J.*

Nella interpretazione metrica già più volte usata (I, J ciclici) ciò equivale a dire che *nel caso III_{32} la successione delle terne di omografie involutorie a prodotti involutori $\alpha^{(i)}\beta^{(i)}\gamma^{(i)}$ si riduce alla sola terna iniziale $\alpha\beta\gamma$ quando le omologie armoniche $\alpha\beta\gamma$ sono* (trasformabili simultaneamente con una omografia del loro piano ne) *le simmetrie ortogonali rispetto alle tre altezze di un triangolo equilatero* (v. Figg. 23, 24).

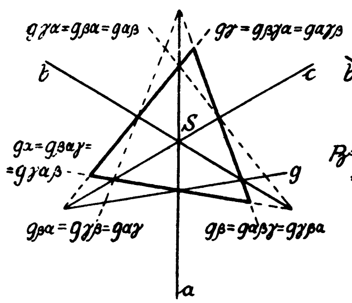

Fig. 23

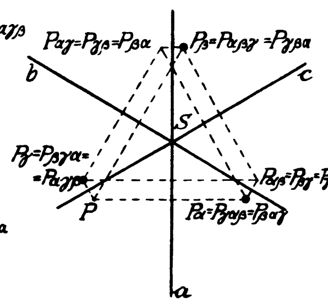

Fig. 24

Si ha così (anche nel campo reale) un interessante *sistema di tre omologie armoniche, chiuso in sè di fronte alla moltiplicazione ternaria* [13]), in quanto

$$\alpha\beta\gamma = \gamma\beta\alpha = \beta\,, \quad \beta\gamma\alpha = \alpha\gamma\beta = \gamma\,, \quad \gamma\alpha\beta = \beta\alpha\gamma = \alpha\,.$$

Si tenga presente che in questo caso gli assi a, b, c delle α, β, γ coincidono con le trisettrici della loro terna.

---

[13]) Questa proprietà si aggiunge alle altre ben note della configurazione di tre omologie armoniche siffatte, che risultano « *in posizione omologica* ». Cfr. MORGANTINI E., *Sulla configurazione di tre omologie piane in posizione omologica* (Rend. Seminario Matematico, Padova, Vol. XXIX (1959), pp. 328-400), p. 394.

Imponendo che *la terna* $\alpha\beta\gamma$ *coincida con quella* $\alpha''\beta''\gamma''$ si riconosce che i casi essenzialmente distinti sono i seguenti.

$$\alpha = \alpha'' , \quad \beta = \beta'' , \quad \gamma = \gamma'' ; \tag{16.3}$$

$$\alpha = \alpha'' , \quad \beta = \gamma'' , \quad \gamma = \beta'' ; \tag{16.4}$$

$$\alpha = \beta'' , \quad \beta = \gamma'' , \quad \gamma = \alpha'' . \tag{16.5}$$

Il caso (16.3) non dà nulla di nuovo. Rimangono i casi (16.4) e (16.5). Poichè $z \neq 0$, si può supporre $z = 1$ nelle equazioni omogenee che li interpretano tramite le (14.2). Si tratta allora (come vogliono le (16.1), di determinare i punti propri del piano cartesiano xy (non appartenenti agli assi, alla bisettrice $x = y$ ed alle rette $x = 1$, $y = 1$) comuni rispettivamente alle curve:

$$y = x^2 , \quad xy^2 = 1 , \quad x = y^3 ,$$

oppure alle:

$$x^2 = y^3 , \quad xy^2 = 1 , \quad y = x^3 ,$$

e dunque:

$$x^5 = y^5 = 1 , \quad y = x^2 ; \tag{1.6}$$

oppure:

$$x^7 = y^7 = 1 , \quad y = x^3 .$$

In altre parole, *posti* I, J *nei punti ciclici e scelto ad arbitrio per* S *l'asse* c *della* γ, *gli assi* a *e* b *delle* α, β *vanno scelti rispettivamente fra le 4 o fra le 6 rette per* S *che assieme a* c *dividono in parti uguali l'angolo giro. Scelta una di queste rette come* a, *la* b *è quella delle rimanenti che si ottiene da* c *con la rotazione attorno ad* S *doppia o rispettivamente tripla di quella che porta* c *in* a.

Per concludere osserviamo come da quanto già detto al n. 14 risulti *che nel campo reale esistono sistemi di un numero finito* $n \geqslant 3$ *qualsiasi di omografie involutorie, chiusi di fronte alla moltiplicazione ternaria.* Sistemi siffatti sono *quelli trasformabili omograficamente nel sistema delle* n *simmetrie ortogonali rispetto ad assi concorrenti in un punto proprio* S *e dividenti in parti uguali l'angolo giro.*

Infatti, prese tre di queste simmetrie α, β, γ di assi a, b, c, si può supporre (altrimenti la cosa sarebbe banale) che sia ad es. $b \neq c$. Allora, orientato (arbitrariamente) il fascio S e detto b' l'asse (appartenente ad S) della simmetria ortogonale $\beta' = \alpha\beta\gamma$, risulta (n. 14):

$$ab' \equiv bc \equiv m\frac{\pi}{n} \qquad (mod\ \pi),$$

essendo m un intero compreso tra 1 ed $n - 1$, cosicchè anche β' è una delle n simmetrie date, c. v. d.