RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ARNO PREDONZAN

Su una generalizzazione di una proprietà relativa a ipersuperficie quadriche e cubiche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 31 (1961), p. 357-373

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__357_0>

SU UNA GENERALIZZAZIONE DI UNA PROPRIETÀ RELATIVA A IPERSUPERFICIE QUADRICHE E CUBICHE

Nota (*) *di* Arno Predonzan (*a Padova*)

1. - L'esistenza (eventuale) di mappe birazionali, o di mappe unirazionali suriettive, tra uno spazio proiettivo $P_{r-1}(K)$ e la *generica* ipersuperficie V, dell'ordine n, di uno spazio proiettivo $P_r(K)$, (K corpo algebricamente chiuso di caratteristica zero), non permane, in generale, in corrispondenza a tutte le *specializzazioni* di V, anche limitatamente a quelle che danno luogo a ipersuperficie assolutamente irriducibili.

Così, ad es., se $n = 3$, $r = 3$, ogni k-superficie cubica assoluta V di $P_3(K)$, (k sottocorpo di K), è birazionale su un sopracorpo algebrico k^* di k, a meno che V non sia un cono non birazionale (e perciò di genere uno). Questa proprietà si trasporta facilmente al caso $n = 3$, $r \geqslant 4$, appena al concetto di birazionalità si sostituisca quello più ampio di unirazionalità [1]), e quindi

---

(*) Pervenuta in Redazione il 5 luglio 1961.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

[1]) Se infatti V è una k-ipersuperficie cubica non singolare, ed l una sua retta (necessariamente priva di punti singolari), l'unirazionalità di V su $k(l)$ è, ad es., provata in A. Predonzan, *Alcuni teoremi relativi all'unirazionalità di ipersuperficie algebriche non generali*, Rend. Sem. Mat. di Padova, (1961). Se invece V contiene un punto y di molteplicità due, essa risulta ovviamente birazionale su $k(y)$, e quindi unirazionale. Infine se y ha molteplicità tre su V, la V stessa è un cono che, se non unirazionale, deve proiettare da uno spazio P_{r-3} una cubica piana di ge-

ci si limiti a verificare l'esistenza di mappe unirazionali suriettive del tipo suddetto, anzichè di mappe birazionali.

Tenuto anche conto della nota birazionalità (e quindi unirazionalità) di ogni quadrica assolutamente irriducibile di $P_r(K)$, $(r \geqslant 2)$, si può dunque affermare che: « Ogni k-ipersuperficie assoluta di $P_r(K)$, dell'ordine $n = 2$ o $n = 3$, che non sia un cono non unirazionale, (caso questo possibile solo per $n = 3$), è unirazionale su un sopracorpo algebrico k^* di k appena sia, rispettivamente nei due casi, $r \geqslant 2$ od $r \geqslant 3$ ».

Si presenta allora spontaneo il problema di vedere se, estendendo la nozione di cono in quella (comprendente la prima) di varietà *luogo d'un sistema semplice di spazi* [2]), si possa determinare, in corrispondenza ad n, un intero positivo $r(n)$ in guisa che valga la seguente proposizione:

I) Ogni k-ipersuperficie assoluta di $P_r(K)$, dell'ordine n, che non sia luogo d'un sistema semplice, non unirazionale di spazi, risulta unirazionale su un sopracorpo algebrico k^* di k, appena sia $r \geqslant r(n)$.

In quest'ordine d'idee l'A. è giunto a provare il seguente

TEOREMA: *Ogni ipersuperficie algebrica assoluta V del quarto ordine di uno spazio proiettivo $P_r(K)$, definita su un qualunque sottocorpo k di K, che non sia luogo di un sistema semplice, non unirazionale di spazi, è unirazionale su un sopracorpo algebrico k^* di k appena sia $r \geqslant 7$* [3]).

---

nere uno: infatti se il vertice del cono fosse uno spazio P_s, di dimensione $s \leqslant r - 4$, uno spazio P_{r-s-1}, $(r - s - 1 \geqslant 3)$, sghembo con P_s, segherebbe V in un'ipersuperficie cubica V' non cono, e perciò, per quanto precede, unirazionale (o, in particolare, birazionale), donde l'unirazionalità di V, in contrasto con quanto supposto.

[2]) Una k-varietà d-dimensionale V dicesi « luogo di un sistema semplice di spazi » se contiene un sistema $\{P_m\}$ di spazi lineari m-dimensionali P_m, $(1 \leqslant m \leqslant d - 1)$, il quale sia definito su un sopracorpo algebrico k_1 di k, (eventualmente $k_1 = k$), abbia dimensione $d - m$, e sia di indice 1, (cioè per un punto generico di V su k_1 passi uno ed un solo P_m di $\{P_m\}$).

[3]) L'unirazionalità dell'ipersuperficie algebrica generale del quarto ordine è stata provata, per $r \geqslant 7$, da U. MORIN in Rend. Acc. Naz. dei Lincei, (1936).

Per giungere a questo risultato si poggia sulla considerazione di una sottovarietà lineare bidimensionale π di V, il che, per $r \geqslant 7$, è sempre possibile [4]).

La successiva trattazione è suddivisa in tre paragrafi. Nel § 1 vengono stabilite alcune proposizioni preliminari. Nei §§ 2, 3 vengono invece studiati separatamente i due casi $m(\pi; V) = 1$, $m(\pi; V) \geqslant 2$ [5]).

Si potrà nel seguito sempre escludere che V sia luogo di un sistema semplice $\{P_m\}$ di spazi P_m, $(1 \leqslant m \leqslant r-2)$, perché nel caso che $\{P_m\}$ sia unirazionale la proposizione i_7) del n. 7 assicurerà subito l'unirazionalità di V.

§ 1. - Proposizioni preliminari

2. - Sia V un'ipersuperficie algebrica assolutamente irriducibile, del quarto ordine, di $P_r(K)$, $(r \geqslant 7)$, definita su un sottocorpo k del corpo K algebricamente chiuso e di caratteristica zero, e sia π una sua sottovarietà lineare bidimensionale (piano).

Detto k_1 il minimo sopracorpo algebrico di k che comprende quello di definizione di π, operiamo su $P_r(K)$ una trasformazione di coordinate proiettive, definita su k_1, che muti l'ideale di π in quello $\mathfrak{J}\mathfrak{H}_{k1}(\pi) = (X_3, X_4, \ldots, X_r)$. In virtù di tale trasformazione l'equazione di V [cioè la base del relativo ideale] può scriversi nella forma:

$$(1) \quad \sum_{i=3}^{r} X_i f_i^{(3)}(X_0, X_1, X_2) + \sum_{i,j=3}^{r} X_i X_j f_{ij}^{(2)}(X_0, X_1, X_2) + \\ + g(X_0, X_1, \ldots, X_r), \qquad (f_{ij}^{(2)} = f_{ji}^{(2)}),$$

dove $f_i^{(3)}$ ed $f_{ij}^{(2)}$ sono, rispettivamente, polinomi (omogenei) dei gradi tre e due dell'anello $k_1[X_0, X_1, X_2]$, mentre g è polinomio

4) È noto che per $r \geqslant 7$ ogni ipersuperficie algebrica del quarto ordine di $P_r(K)$ contiene qualche piano; ved. A. PREDONZAN, loc. cit. in 1), n. 5.

5) Con $m(U; V)$ si indica — come di consueto — la molteplicità su V di una sottovarietà U di V.

(omogeneo) di grado quattro dell'anello $k_1[X_0, X_1, ..., X_r]$, ciascun termine del quale è almeno del terzo grado nel complesso delle indeterminate $X_3, X_4, ..., X_r$.

Cominciamo col verificare che:

i_1) $m(\pi; V) = 1$ se, e solo se, i polinomi $f_i^{(3)}$ non sono tutti nulli; mentre $m(\pi; V) = 2$ se, e solo se, sono nulli tutti gli $f_i^{(3)}$, ma non così gli $f_{ij}^{(2)}$.

Ciò può, ad es., vedersi determinando l'intersezione-prodotto $V \cdot P_3$ di V con uno spazio proiettivo P_3, generico su k_1 nel sistema $\{P_3\}$ costituito dagli spazi tridimensionali di $P_r(K)$ uscenti da π. Detto infatti $x = (0, 0, 0, x_3, ..., x_r)$ un punto, generico su k_1, dello spazio P_{r-3}, complementare di π, definito da $\mathfrak{J}\mathfrak{H}_{k_1}(P_{r-3}) = (X_0, X_1, X_2)$, le equazioni di un P_3 del tipo suddetto possono scriversi:

$$x_3 X_i - x_i X_3 , \qquad (i = 4, 5, ..., r); \tag{2}$$

ne viene che $V \cdot P_3$ può rappresentarsi mediante le (2) e la:

$$X_3[x_3^3 \sum_{i=3}^{r} x_i f_i^{(3)}(X_0, X_1, X_2) + X_3 x_3^2 \sum_{i,j=3}^{r} x_i x_j f_{ij}^{(2)}(X_0, X_1, X_2) + \\ + X_3^2 h(X_0, ..., X_3; x_3, ..., x_r)] , \tag{3}$$

essendo h un polinomio (omogeneo) del primo grado nelle $X_0, ..., X_3$ (e di quarto grado nelle $x_3, ..., x_r$) dell'anello $k_1[x_3, ..., x_r][X_0, ..., X_3]$. Il fatto che la (3) contenga X_3 come fattore semplice se, e solo se, non tutte le $f_i^{(3)}$ sono nulle, mentre la stessa (3) contiene X_3 come fattore doppio se, e solo se, sono nulle tutte le $f_i^{(3)}$, ma non le $f_{ij}^{(2)}$, ci permette di concludere come enunciato in i_1).

3. - Se $m(\pi; V) = 1$, il ciclo omogeneo bidimensionale del terzo ordine $F^{(3)} = V \cdot P_3 - \pi$ è positivo e non ha π come componente: esso è elemento generico su k_1 di un sistema $\{F^{(3)}\}$ di dimensione $r - 3$, birazionale su k_1, e determina su π il divisore positivo (unidimensionale) del terzo ordine $C^{(3)} = F^{(3)} \cdot \pi$, rap-

presentato dalle equazioni di π e dalla

$$(4)\qquad \sum_{i=3}^{r} x_i f_i^{(3)}(X_0, X_1, X_2)\ .$$

La (4) ci assicura che $C^{(3)}$ *è elemento generico su* k_1 *di un sistema lineare* $\{C^{(3)}\}$, la cui dimensione può anche essere nulla.

Se invece $m(\pi; V) = 2$, risulta positivo il ciclo omogeneo bidimensionale del secondo ordine $F^{(2)} = V \cdot P_3 - 2\pi$, e non ha π come componente: esso è elemento generico su k_1 di un sistema $\{F^{(2)}\}$ di dimensione $r - 3$, birazionale su k_1, e determina su π il divisore positivo (unidimensionale) del secondo ordine $C^{(2)} = F^{(2)} \cdot \pi$, rappresentato dalle equazioni di π e dalla:

$$(5)\qquad \sum_{i,j=3}^{r} x_i x_j f_{ij}^{(2)}(X_0, X_1, X_2)\ .$$

Dalla (5) deriva che $C^{(2)}$ *è elemento generico su* k_1 *di un sistema non lineare* $\{C^{(2)}\}$, la cui dimensione può essere anche nulla.

È facile constatare che:

i_2) *Se* $dim\,(\{C^{(3)}\}) = 0$ *nel caso* $m(\pi; V) = 1$, *oppure* $dim\,(\{C^{(2)}\}) = 0$ *in quello* $m(\pi; V) = 2$, *si ha* $m(|\,C^{(3)}\,|; V) \geqslant 2$, *o, rispettivamente,* $m(|\,C^{(2)}\,|; V) \geqslant 3$ [6]).

Infatti, nelle ipotesi poste, risulta, rispettivamente nei due casi, $i(y; p \cdot F^{(3)}) \geqslant 1$, oppure $i(y; p \cdot F^{(2)}) \geqslant 1$, e quindi $i(y; p \cdot V) \geqslant 2$, o $i(y; p \cdot V) \geqslant 3$, essendo y un punto di $C^{(3)}$ o $C^{(2)}$ comunque prefissato, e p una retta per y generica in P_3 su $k_1(P_3, y)$, e quindi generica su $k_1(y)$ in $P_r(K)$ tra quelle uscenti da y [7]).

4. - Detto $y = (y_0, y_1, y_2, 0, \dots, 0)$ un punto di π generico su k_1, l'equazione dell'iperpiano polare $\Delta_y^{(1)}$ [se $m(\pi; V) = 1$] e quella della quadrica polare $\Delta_y^{(2)}$ [se $m(\pi; V) \leqslant 2$] di y rispetto

[6]) Se $\aleph$ é un ciclo di uno spazio proiettivo, con $|\,\aleph\,|$, o con $Supp(\aleph)$ viene indicato il relativo supporto.

[7]) Con $i(D;\ V \cdot W)$ si denota la molteplicità d'intersezione di due varietà V, W in una loro comune sottovarietà D.

a V, possono scriversi, rispettivamente, nella forma:

$$(6)\qquad \sum_{i=3}^{r} X_i f_i^{(3)}(y_0, y_1, y_2)\,,$$

$$(7)\qquad \sum_{h=o}^{2} X_h \sum_{i=3}^{r} X_i \frac{\partial f_i^{(3)}(y_0, y_1, y_2)}{\partial y_h} + \sum_{i,j=3}^{r} X_i X_j f_{ij}^{(2)}(y_0, y_1, y_2)\,.$$

Dalla (6) — tenuto conto che y è punto generico di π su k_1, e quindi y_0, y_1, y_2 sono trascendenti su k_1 ed algebricamente indipendenti — deriva che affinché $\Delta_y^{(1)}$ sia indipendente da y occorre e basta che:

$$(8)\qquad f_3^{(3)} = \lambda_i f_i^{(3)}\,, \qquad (\lambda_i \in k_1;\ i = 3, 4, \ldots, r),$$

dove si è supposto, senza restrizione, $f_3^{(3)} \neq 0$.

Poichè la (8) equivale alla 0-dimensionalità del sistema lineare $\{C^{(3)}\}$, si può affermare — tenuto anche conto della i_2) del n. 3 — che:

i_3) *Se* $m(\pi; V) = 1$, *l'iperpiano polare* $\Delta_y^{(1)}$ *rispetto a* V *di un punto* y *di* π, *generico su* k_1, *è indipendente da* y (*cioè non varia in corrispondenza alle specializzazioni di* y *in cui resta definito*) *se, e solo se, dim* $(\{C^{(3)}\}) = 0$, *il che comporta* $m(|\,C^{(3)}\,|;\ V) \geqslant 2$.

Dalla (7) — e con analoghe considerazioni — deriva invece che affinchè $\Delta_y^{(2)}$ sia indipendente da y occorre e basta, rispettivamente nei due casi $m(\pi; V) = 2$ ed $m(\pi; V) = 1$, che si abbia:

$$(9)\qquad f_{33}^{(2)} = \mu_{ij} f_{ij}^{(2)}\,, \quad (\mu_{ij} \in k_1;\ i, j = 3, 4, \ldots, r),$$

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_3^{(3)}}{\partial X_0} = \nu_{lh} \dfrac{\partial f_l^{(3)}}{\partial X_h} = \mu_{ij} f_{ij}^{(2)}\,, \\ (\nu_{lh}, \mu_{ij} \in k_1;\ h = 0, 1, 2;\ i, l, j = 3, 4, \ldots, r)\,, \end{cases}$$

avendo supposto, senza restrizione, $f_{33}^{(2)} \neq 0$ nella (9), e $\dfrac{\partial f_3^{(3)}}{\partial X_0} \neq 0$ nella (10) [8].

[8]) Si noti che non essendo nulle, nel caso $m(\pi;\ V) = 1$, tutte le $f_i^{(3)}$,

Nel caso $m(\pi; V) = 2$, la (9) equivale alla 0-dimensionalità del sistema $\{C^{(2)}\}$.

Se invece $m(\pi; V) = 1$, indicato con $D^{(2)}$ il divisore del secondo ordine di π rappresentato da $\dfrac{\partial f_3^{(3)}}{\partial X_0}$, la (10) comporta che sia:

$$m(|D^{(2)}|;\ V) \geqslant 3\ \text{[9]}\,. \tag{11}$$

Dalla (11) deriva che la generica $F^{(3)}$ di $\{F^{(3)}\}$ su k_1 deve contenere $|D^{(2)}|$ e deve inoltre risultare $m(|D^{(2)}|;\ F^{(3)}) \geqslant 2$. Ne viene che $D^{(2)}$ deve essere dotato di una sola componente rettilinea l di molteplicità due, ($D^{(2)} = 2l$), perché altrimenti $F^{(3)}$ verrebbe ad avere π come componente, il che comporterebbe $m(\pi; V) > 1$, in contrasto con l'ipotesi iniziale.

Da $D^{(2)} = 2l$ discende $|D^{(2)}| = l$ e perciò la $m(|D^{(2)}|;\ F^{(3)}) \geqslant 2$ può scriversi $m(l;\ F^{(3)}) \geqslant 2$. Quest'ultima comporta che l sia componente di molteplicità $\geqslant 2$ per $C^{(3)}$; ed è facile vedere che non può verificarsi il caso dell'uguaglianza essendo questo incompatibile con la prima uguaglianza indicata in (10). Dunque $C^{(3)} = 3l$, e perciò *dim* $(\{C^{(3)}\}) = 0$.

Tenuto conto di quest'ultima proposizione e della (11) — che ora può scriversi $m(l;\ V) \geqslant 3$ — e ricordando quanto in precedenza ottenuto in relazione al caso $m(\pi;\ V) = 2$, si può concludere — anche a norma della i_2) del n. 3 — che:

i_4) *Se* $m(\pi;\ V) = 1$, *affinché la quadrica polare* $\Delta_y^{(2)}$ *rispetto a* V *di un punto* y *di* π, *generico su* k_1, *sia indipendente da* y (*cioè non vari in corrispondenza alle specializzazioni di* y *in cui resta definita*) *deve risultare necessariamente dim* $(\{C^{(3)}\}) = 0$ *e* $C^{(3)}$ *deve avere una componente rettilinea* l *di molteplicità tre* ($C^{(3)} = 3l$) *per la quale sia* $m(l;\ V) \geqslant 3$.

---

non possono essere nulle tutte le $\dfrac{\partial f_i^{(3)}}{\partial X_h}$, $(h = 0, 1, 2;\ i = 3, 4, \ldots, r)$.

[9]) Ciò consegue dal fatto che le derivate seconde della (1) rispetto alle X_s, $(s = 0, 1, \ldots, r)$, si annullano in tutti e soli quei punti di π che sono zeri contemporanei di $\dfrac{\partial f_i^{(3)}}{\partial X_h}$ e di $f_{ij}^{(2)}$, $(h = 0, 1, 2;\ i, j = 3, 4, \ldots, r)$.

Se invece $m(\pi;\ V) = 2$, *perchè* $\Delta_y^{(2)}$ *sia indipendente da* y *occorre e basta che dim* $(\{C^{(2)}\}) = 0$, *il che comporta* $m(|\ C^{(2)}\ |;\ V) \geqslant 3$.

5. – Supporremo, in questo n.:

$$(12) \qquad m(\pi;\ V) = 1\ , \quad \dim(\{C^{(3)}\}) \geqslant 1\ .$$

Sia ancora y un punto di π generico su k_1, e siano $\Delta_y^{(1)}$ e $\Delta_y^{(2)}$ i relativi iperpiano e quadrica polari rispetto a V.

Verifichiamo che, nelle ipotesi (12), risulta $\Delta_y^{(1)} \not\subset \Delta_y^{(2)}$. A tale scopo consideriamo uno spazio tridimensionale P_3 generico su $k_1(y)$ tra quelli di $\Delta_y^{(1)}$ che contengono π: tale P_3 — a norma della i_3) del n. 4 che garantisce la variabilità di $\Delta_y^{(1)}$ con y — è anche generico su k_1 tra quelli di $P_r(K)$ che passono per π, e quindi, (usando le notazioni del n. 3), sono generiche su k_1 le relative $F^{(3)}$ e $C^{(3)}$.

Facciamo ora l'ipotesi assurda $\Delta_y^{(1)} \subset \Delta_y^{(2)}$. Questa comporta $P_3 \subset \Delta_y^{(1)} \cdot \Delta_y^{(2)}$, e perciò — per note proprietà sulle ipersuperficie polari — $i(y;\ V \cdot p) \geqslant 3$, essendo p una qualunque retta di P_3 uscente da y e non situata su V. Ne segue $m(y;\ F^{(3)}) \geqslant 2$, e perciò $m(y;\ C^{(3)}) \geqslant 2$, il che è assurdo non potendo – a norma di un classico teorema di Bertini — la $C^{(3)}$ generica su k_1 del sistema lineare $\{C^{(3)}\}$ avere un punto multiplo in un punto y di π, pure generico su k_1. Si conclude che $\Delta_y^{(1)} \not\subset \Delta_y^{(2)}$, e perciò $H_y = \Delta_y^{(1)} \cdot \Delta_y^{(2)}$ è un cono quadrico $(r-2)$-dimensionale di vertice y (o un sopraspazio di y), definito su $k_1(y)$.

Dalle i_3), i_4) e dalle (6), (7) segue che per un punto generico di V su k_1 passa almeno un elemento del sistema $\{H_y\}$, *luogo* su k_1 di H_y. Ciò permette di affermare che un punto x generico su $k_1(y)$ di $V \cdot H_y$ è anche generico di V su k_1.

Da quest'ultima constatazione segue facilmente che $m(\pi;\ H_y) = 1$ e $H_y \not\subset V$. Se infatti fosse $m(\pi;\ H_y) = 2$, oppure $H_y \subset V$, il $P_3 = (\pi, x)$ apparterrebbe ad H_y, oppure la $F^{(3)} = V \cdot P_3 - \pi$ avrebbe come componente il piano $H_y \cdot P_3 - \pi = \Delta_y^{(2)} \cdot \Delta_y^{(1)} \cdot P_3 - \pi = \Delta_y^{(2)} \cdot P_3 - \pi$ passante per x, e sarebbe perciò riducibile in piani. Nel primo caso si avrebbe $i(y;\ V \cdot p) \geqslant 3$ per ogni retta p di P_3 uscente da y e non situata su V; e ciò — tenuto conto che la constatata genericità del punto x di V su k_1 assicura quella su k_1 dello spazio P_3 nel sistema di quelli di $P_r(K)$ che passano per π — appare assurdo con un'argomentazione analoga a quella del quarto capoverso di questo n. Nel secondo caso invece V sarebbe luogo d'un sistema semplice di spazi, il che è stato escluso nell'ultimo comma del n. 1.

Dalla ora provata $H_y \not\subset V$, segue che la generatrice $g = (y, x)$ di H_y, generica su $k_1(y)$, non è situata su V, e perciò $i(y;\ V \cdot g) = 3$. Si può pertanto concludere che:

i_5) *Nelle ipotesi* (12), *la* $k_1(y)$*-varietà* $H_y = \Delta_y^{(1)} \cdot \Delta_y^{(2)}$, *relativa al generico punto* y *di* π *su* k_1, *è un cono quadrico* $(r-2)$*-dimensionale di vertice* y (*o un sopraspazio di* y), *e tale che* $m(\pi;\ H_y) = 1$; *inoltre per una generica generatrice* g (*per* y) *di* H_y *su* $k_1(y)$ *si ha* $i(y;\ V \cdot g) = 3$. *Infine per un punto generico* x *di* V *su* k_1 *passa almeno un elemento del sistema* $\{H_y\}$ *luogo di* H_y *su* k_1.

6. - Mettiamoci ora nelle seguenti ipotesi:

$$m(\pi;\ V) = 2\,, \qquad \dim(\{C^{(2)}\}) \geqslant 1\,. \tag{13}$$

Un punto generico y di π su k_1 determina la relativa quadrica polare $\Delta_y^{(2)}$ rispetto a V, la cui equazione, dedotta dalla (7) tenendo conto della i_1) del n. 2, può scriversi nella forma:

$$\sum_{i,j=3}^{r} X_i X_j f_{ij}^{(2)}(y_0, y_1, y_2)\,, \tag{14}$$

e perciò $\Delta_y^{(2)}$ è un cono quadrico di vertice π (o un sopraspazio di π), definito su $k_1(y)$.

A norma della i_4) del n. 4 e delle (13), $\Delta_y^{(2)}$ varia in corrispondenza alle specializzazioni di y su k_1; ciò assicura la possibilità di poter fissare su π una k_1-retta l tale che il sistema $\{\Delta_y^{(2)}\}$, ottenuto in corrispondenza alle specializzazioni su k_1 del punto y di l generico su k_1, abbia dimensione uno. Ne viene che per un punto generico di V su k_1 passa almeno un elemento di $\{\Delta_y^{(2)}\}$, dal che consegue che un punto generico x di $V \cdot \Delta_y^{(2)}$ su $k_1(y)$ è anche punto generico di V su k_1. La generatrice $g = (y, x)$ di $\Delta_y^{(2)}$, generica su $k_1(y)$, non risulta situata su V (perchè ciò comporterebbe $\Delta_y^{(2)} \subset V$), il che ci permette di affermare che $i(y; V \cdot g) = 3$. Concludendo:

i_6) *Nelle ipotesi* (13) *è sempre possibile fissare su* π *una* k_1*-retta* l *tale che per un punto generico* x *di* V *su* k_1 *passi almeno un elemento del sistema* $\{\Delta_y^{(2)}\}$, *luogo su* k_1 *del cono quadrico* $\Delta_y^{(2)}$ *relativo ad un punto generico* y *di* l *su* k_1. *Inoltre per una generica generatrice* g *(per* y*) di* $\Delta_y^{(2)}$ *su* $k_1(y)$ *risulta* $i(y; V \cdot g) = 3$.

7. – Ci proponiamo qui di verificare la seguente condizione di unirazionalità [10]:

i_7) *Sia* V_d *una* k*-varietà algebrica* d*-dimensionale di* $P_r(K)$, *e sia* $\{W_m\}$ *un insieme algebrico, di dimensione* $d - m$ *e d'indice* $v \geqslant 1$, *di sottovarietà* m*-dimensionali* W_m *di* V_d, *che sia unirazionale su un sopracorpo* k_1 *di* k, *e quindi tale che la generica* W_m *di* $\{W_m\}$ *su* k_1 *appartenga ad un corpo* $k_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{d-m})$ *estensione trascendente pura di grado* $d - m$ *di* k_1. *Se allora* W_m *è unirazionale su* $k_1^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{d-m})$, *con* k_1^* *sopracorpo algebrico di* k_1, *di conseguenza* V_d *è unirazionale su* k_1^*.

Poiché infatti W_m è unirazionale su $k_1^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{d-m})$ ed ha dimensione m, un suo punto generico x su $k_1^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{d-m})$ ha coordinate x_i, $(i = 0, 1, \dots, r)$, esprimibili mediante elementi di un corpo $k_1^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{d-m})(\xi_{d-m+1}, \dots, \xi_d)$ estensione trascendente pura, di grado m, di $k_1^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{d-m})$; cioè le x_i sono elementi del corpo $k_1^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$ od anche (dopo un'opportuna riduzione a forma intera) polinomi φ_i dell'anello $k_1^*[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d]$:

$$x_i = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d), \qquad (i = 0, 1, \dots, r). \tag{15}$$

Le (15) che, per quanto precede, rappresentano un punto generico di W_m su $k_1^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{d-m})$, rappresentano anche —

[10]) Cfr., a tal proposito, L. ROTH, *Algebraic threefolds*, Ergebnisse der Mathematik, Berlin-Springer, (1955), pag. 43.

poiché $\{W_m\}$ è d'indice $\nu \geqslant 1$, (cioè per un punto generico di V_d su k_1^* passano $\nu \geqslant 1$ elementi di $\{W_m\}$) — un punto generico di V_d su k_1^*. Tanto basta per concludere che V_d è unirazionale su k_1^*; ed i punti di V_d si ottengono dalle (15) attraverso le specializzazioni (generalizzate) delle $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d$ su k_1^*.

§ 2. - Il caso $m(\pi; V) = 1$

8. – Supporremo in tutto questo paragrafo $m(\pi; V) = 1$. Considereremo inoltre separatamente le due eventualità: $dim\ (\{C^{(3)}\}) \geqslant 1$, $dim\ (\{C^{(3)}\}) = 0$, (n. 3).

A) $dim\ (\{C^{(3)}\}) \geqslant 1$: Sia y un punto generico di π su k_1 ed H_y il relativo cono $(r - 2)$-dimensionale del sistema $\{H_y\}$, (n. 5). Fissato opportunamente in $P_r(K)$ un k_1-iperpiano P_{r-1}, si consideri la quadrica $(r - 3)$-dimensionale, definita su $k_1(y)$, $Q_y = H_y \cdot P_{r-1}$. Poichè — a norma della i_5) del n. 5 — $m(\pi; H_y) = 1$, si può fissare su π un k_1-punto $\bar{y}$ in guisa che la generatrice $\bar{g} = (y, \bar{y})$ di H_y sia semplice, e perciò risulti semplice per Q_y il punto $\bar{z} = \bar{g} \cap P_{r-1}$. Poiché $\bar{z}$ appartiene ovviamente a $k_1(y)$, la Q_y, se irriducibile, risulta notoriamente birazionale sul suo corpo $k_1(y)$ di definizione [11].

Consideriamo ora la $k_1(y)$-varietà $\Omega_y = V \cdot H_y$. Poichè, per la i_5), $H_y \not\subset V$, la Ω_y ha dimensione $r - 3$. Inoltre Ω_y è in corrispondenza birazionale su $k_1(y)$ con Q_y, e perciò Ω_y è birazionale su $k_1(y)$: infatti un generico x di Ω_y su $k_1(y)$ determina univocamente la generatrice $g = (y, x)$ di H_y, la quale individua il punto $z = g \cap P_{r-1}$ di Q_y, e viceversa tale z è determinato solo da x in quanto, sempre per la i_5), risulta $i(y;\ V \cdot g) = 3$.

Il sistema $\{\Omega_y\}$, *luogo* di Ω_y su k_1, è chiaramente unirazionale su k_1, e per un punto generico x di V su k_1 passa, in virtù

---

[11]) **Nell'eventualità che Q_y sia riducibile, si può ancora applicare (con ovvie modifiche) il procedimento poi seguito, in quanto la conoscenza su Q_y di un suo $k_1(y)$-punto semplice permette di sostituire a Q_y una delle sue due componenti, entrambe determinabili razionalmente su $k_1(y)$.**

ancora della i_5), almeno un elemento di $\{\Omega_\nu\}$, cioè $\{\Omega_\nu\}$ è d'indice (ovviamente finito) $\nu \geqslant 1$. Tanto basta per concludere — a norma della condizione i_7) del n. 7 — con l'unirazionalità di V su k_1.

9. - Sempre nell'ipotesi $m(\pi;\ V) = 1$, consideriamo ora l'eventualità:

B) dim $(\{C^{(3)}\}) = 0$: In questo caso il sistema $\{C^{(3)}\}$ ha un unico elemento $C^{(3)}$, il quale è il ciclo sezione di π con la generica $F^{(3)}$ di $\{F^{(3)}\}$ su k_1, (n. 3). Inoltre, per la i_2) del n. 3, si ha $m(|\ C^{(3)}\ |;\ V) \geqslant 2$.

Poiché il sistema $\{F^{(3)}\}$ è birazionale su k_1 ed ha dimensione $r-3$, la generica $F^{(3)}$ appartiene ad un corpo $k_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{r-3})$ estensione trascendente pura di grado $r-3$ di k_1.

Distingueremo nel seguito due sottocasi a seconda che $C^{(3)}$ sia una cubica assolutamente irriducibile, oppure abbia (in un sopracorpo algebrico di k_1) una (o più) componenti rettilinee [12]).

b_1) Se $C^{(3)}$ è assolutamente irriducibile, tale risulta anche la generica $F^{(3)}$ di $\{F^{(3)}\}$ su k_1. Escluderemo che quest'ultima sia rigata (in particolare cono) perché ciò comporterebbe che V sia luogo di un sistema semplice di spazi, il che si può escludere per l'ultimo comma del n. 1.

Detto y un punto generico di $C^{(3)}$ su k_1 ed ω_y il piano tangente ad $F^{(3)}$ in y, si consideri il ciclo $E_y = F^{(3)} \cdot \omega_y$. Poichè $F^{(3)}$ non è rigata, E_y è una cubica assolutamente irriducibile che ha y come punto doppio. Fissata ora una opportuna specializzazione $\bar{y}$ di y che appartenga ad un sopracorpo algebrico $\bar{k}_1$ di k_1 [13]), e considerato il piano tangente $\omega_{\bar{y}}$ ad $F^{(3)}$ in $\bar{y}$, la cubica assolutamente irriducibile $E_{\bar{y}} = F^{(3)} \cdot \omega_{\bar{y}}$, definita su $\bar{k}_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{r-3})$, ha un punto doppio in $\bar{y}$ ed è perciò birazionale su $\bar{k}_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{r-3})$. I piani tangenti ad $F^{(3)}$ nei punti di $E_{\bar{y}}$ segano $F^{(3)}$ in un sistema, unirazionale su $\bar{k}_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{r-3})$, di cubiche con un punto doppio e perciò birazionali sul loro corpo di definizione. Ne viene — a

[12]) Si noti che se $C^{(3)}$ ha come componenti una retta ed una conica, entrambe debbono appartenere a k_1. Se invece le componenti sono tutte lineari, una almeno di queste deve appartenere a k_1.

[13]) Un tale $\bar{k}_1$ può ottenersi da k_1 con l'aggiunzione tuttalpiù di una radice quadrata e una cubica.

norma della i_7) del n. 7 — che $F^{(3)}$ è unirazionale su $\bar{k}_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{r-3})$, e perciò — sempre per la stessa i_7) — è unirazionale la V su $\bar{k}_1$.

b_2) Qui supporremo che $C^{(3)}$ sia riducibile, e quindi abbia in k_1 almeno una componente rettilinea l. Questa deve risultare necessariamente semplice per $F^{(3)}$, perché se fosse $m(l; F^{(3)}) \geqslant 2$ la $F^{(3)}$ sarebbe rigata (in particolare cono razionale di vertice su l) oppure si spezzerebbe in tre piani (due almeno dei quali per l), il che comporterebbe che V sia luogo di un sistema semplice di spazi, il che escludiamo dalle nostre attuali considerazioni. Inoltre, sempre per la medesima ragione, nessun punto di l può essere triplo per $F^{(3)}$ perché, in tale caso, $F^{(3)}$ sarebbe un cono.

Nell'ipotesi che l sia *totalmente non singolare* su $F^{(3)}$, (cioè se *ogni* punto di l è semplice per $F^{(3)}$), la $F^{(3)}$ stessa è unirazionale su $k_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{r-3})$ [14], e perciò — per la i_7) del n. 7 — V è unirazionale su k_1.

Ad analoga conclusione si può giungere qualora $F^{(3)}$ abbia su l un solo punto doppio y', eventualmente variabile in corrispondenza alle specializzazioni di $F^{(3)}$ su k_1; oppure due punti doppi y', y'', uno almeno dei quali, ad es. y', non variabile con $F^{(3)}$. Infatti allora y' deve necessariamente appartenere a $k_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{r-3})$ o ad un'estensione quadratica $\bar{k}_1$ di k_1, e perciò $F^{(3)}$ è birazionale su $k_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{r-3})$ o su $\bar{k}_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{r-3})$, e quindi V è unirazionale (anzi in questo caso birazionale) su k_1 o su $\bar{k}_1$. Più semplicemente ancora, nell'eventualità sopra considerata che y' non vari in corrispondenza alle specializzazioni di $F^{(3)}$ su k_1, si ha $m(y'; V) = 3$, donde l'immediata birazionalità di V.

Resta da considerare il caso che $F^{(3)}$ abbia su l due punti doppi distinti y', y'', entrambi variabili in corrispondenza alle specializzazioni di $F^{(3)}$ su k_1. Ciò comporta che si abbia $C^{(3)} = 2l + l_1$, con l_1 componente lineare di $C^{(3)}$ (eventualmente coincidente con l): l è perciò retta stazionaria per $F^{(3)}$, e π è il relativo piano tangente stazionario (cioè tangente ad $F^{(3)}$ in ogni punto di l) [15].

---

[14]) Ved. A. Predonzan, loc. cit. in [1]).

[15]) Ved., a tal proposito, A. Predonzan, *Una nuova caratterizzazione delle rigate cubiche, ecc.*, Rend. Sem. Mat. di Padova, (1960).

Qualora l_1 sia distinta da l, ed appena si osservi ch'essa non può passare né per y', né per y'' in quanto retta fissa, mentre y', y'' variano con $F^{(3)}$, si ha che sulla l_1 stessa non possono giacere ovviamente punti doppi per $F^{(3)}$, perché se ne esistesse uno, y_1, esso dovrebbe appartenere ad l, e perciò si avrebbe $m(l;\, F^{(3)}) = 2$. La retta l_1, che appartiene necessariamente al corpo k_1, è dunque totalmente non singolare su $F^{(3)}$, donde l'unirazionalità di $F^{(3)}$ su $k_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{r-3})$, e quindi quella di V su k_1.

Se infine $l_1 = l$, cioè se $C^{(3)} = 3l$, si consideri un punto generico y di l su k_1 e si dica $\{\Delta_y^{(2)}\}$ il *luogo* su k_1 della quadrica polare $\Delta_y^{(2)}$ di y rispetto a V. Con un ragionamento analogo a quello usato per giungere alla proposizione enunciata nell'ultimo capoverso della i_4) del n. 4 [16]), è facile constatare che $\Delta_y^{(2)}$ non varia in corrispondenza alle specializzazioni di y su k_1 se, e soltanto se, vi è un divisore positivo 0-dimensionale, del secondo ordine, di l, il cui supporto ha molteplicità almeno tre su V: caso questo che può essere non considerato comportando esso che V sia un monoide, e perciò birazionale; oppure un cono. È dunque lecito supporre che dim $(\{\Delta_y^{(2)}\}) = 1$, e pertanto per un punto generico x di V su k_1 passa almeno un elemento di $\{\Delta_y^{(2)}\}$. In ogni caso, escluso quello in cui $\Delta_y^{(2)}$ abbia due componenti lineari entrambe variabili in corrispondenza alle specializzazioni di y su k_1, si può allora giungere all'unirazionalità di V su k_1 con il medesimo procedimento usato nei casi analoghi considerati in A), B) dei successivi nn. 10, 11 del seguente paragrafo. Nel caso escluso invece basta sostituire al piano π un altro piano π', certo esistente su V, che non si trovi nelle stesse particolari condizioni del primo [17]).

---

[16]) Basta sostituire, in quel ragionamento, al piano π la retta l, il che è lecito avendosi ora — a norma della i_2) del n. 3 — $m(|\, C^{(3)}\, |; V) = m(l; V) = 2$.

[17]) Un tale piano π' può ad es. ricercarsi tra le componenti delle quadriche riducibili del sistema $\{G^{(2)}\}$, di dimensione $r - 4 \geqslant 3$, *luogo* su k_1 della quadrica $G^{(2)} = W \cdot P_3 - 2\pi$, essendo W l'intersezione $V \cdot P_{r-1}$ di V con l'iperpiano P_{r-1} tangente fisso a V nei punti (semplici) di π, e P_3 uno spazio tridimensionale, generico su k_1 tra quelli di P_{r-1} che passano per π: ed è facile vedere che le suddette componenti non pos-

§ 3. - Il caso $m(\pi; V) \geqslant 2$

10. - Il caso $m(\alpha; V) \geqslant 3$, con $\alpha \subseteq \pi$, potrà essere escluso dalle considerazioni di questo paragrafo, comportando esso che V sia un cono, e perciò luogo di un sistema semplice di spazi (ved. ultimo comma del n. 1); oppure un monoide, il quale risulta notoriamente birazionale (e pertanto anche unirazionale). Supporremo dunque nel seguito $m(\pi; V) = 2$, e $m(y; V) = 2$ per ogni punto y di π, il che ci assicura — in virtù della i_4) del n. 4 — che $dim\,(\{C^{(2)}\}) \geqslant 1$.

Sia l una k_1-retta di π del tipo considerato nella i_6) del n. 6, e sia $\{\Delta_y^{(2)}\}$ il *luogo* su k_1 del cono $\Delta_y^{(2)}$ relativo ad un punto generico y di l su k_1.

Consideriamo due casi, a seconda che $\Delta_y^{(2)}$ sia assolutamente irriducibile, o meno.

A) $\Delta_y^{(2)}$ *assolutamente irriducibile*: Fissato opportunamente in $P_r(K)$ un k_1-iperpiano P_{r-1}, l'intersezione $Q_y = \Delta_y^{(2)} \cdot P_{r-1}$ è una quadrica $(r-2)$-dimensionale, definita sul corpo $k_1(y)$ ed assolutamente irriducibile: essa potrà perciò essere tuttalpiù un cono di vertice P_m, con $m \leqslant r-4$. Si potrà allora fissare in $P_r(K)$ un k_1-spazio P_3, sghembo con P_m, in guisa che $C_y = Q_y \cdot P_3$ sia una conica assolutamente irriducibile, che appartiene chiaramente al corpo $k_1(y)$.

In corrispondenza alle varie specializzazioni di y su k_1, tale conica descrive un sistema unidimensionale $\{C_y\}$, definito su k_1, il quale — per un noto criterio [18]) — ammette, in un sopracorpo algebrico k_1^* di k_1, un'unisecante Γ. Quest'ultima determina su C_y un $k_1^*(y)$-punto $\bar{z}_y$ che appartiene ovviamente alla Q_y ed è semplice per essa: la Q_y risulta pertanto birazionale su $k_1^*(y)$.

Tenuto conto della i_6) del n. 6, e con lo stesso ragionamento

---

sono trovarsi tutte nelle particolari condizioni di π, venendo ciò a contrastare con l'ipotesi $dim(\{\Delta_y^{(2)}\}) = 1$.

[18]) Ved. M. Baldassarri, *Su un criterio di riduzione per un sistema algebrico di varietà*, Rend. Sem. Mat. di Padova, (1950).

fatto nel penultimo capoverso del n. 8, si vede che la $\Omega_y = V \cdot \Delta_y^{(2}$ è birazionale su $k_1^*(y)$, e da ciò — avuto anche riguardo alla i_7) del n. 7 — si conclude che V è unirazionale su k_1^*.

11. - Resta ancora da considerare, sempre nelle ipotesi del n. 10, il caso:

B) $\Delta_y^{(2)}$ ***riducibile***: Anche qui si può giungere all'unirazionalità di V sia nell'eventualità che $\Delta_y^{(2)}$ abbia — in un sopracorpo algebrico di $k_1(y)$ — due componenti distinte, P'_{r-1}, P''_{r-1}, sia in quella che abbia una sola componente P'_{r-1} di molteplicità due.

Se $\Delta_y^{(2)} = 2P'_{r-1}$, oppure se $\Delta_y^{(2)} = P'_{r-1} + P''_{r-1}$ e P''_{r-1} resta fisso in corrispondenza alle specializzazioni di y su k_1, l'iperpiano P'_{r-1} sega V in un monoide $(r-2)$-dimensionale Φ_y, appartenente a $k_1(y)$ ed avente y come punto triplo, donde la birazionalità di Φ_y su $k_1(y)$ e quindi — a norma della i_7) del n. 7 — quella di V su k_1.

Se invece $\Delta_y = P'_{r-1} + P''_{r-1}$ ed entrambe le componenti variano in corrispondenza alle specializzazioni di y su k_1, l'intersezione $\Psi_y = V \cdot (P'_{r-1} \cap P''_{r-2})$ è un monoide $(r-3)$-dimensionale appartenente a $k_1(y)$, avente y come punto triplo, e perciò birazionale su $k_1(y)$. Se ora y lo si pensa come punto generico su k_1 del piano π e non della retta l, il *luogo* $\{\Psi_y\}$ di Ψ_y su k_1, nell'ipotesi *dim* $(\{\Psi_y\}) = 2$, è un sistema soddisfacente alle condizioni volute dalla i_7) del n. 7 donde, anche in questo caso, l'unirazionalità di V su k_1.

Qualora invece si abbia ***dim*** $(\{\Psi_y\}) = 0$, il sistema $\{C^{(2)}\}$ di cui al n. 3 è unidimensionale ed ammette pertanto, in un sopracorpo algebrico k_1^* di k_1, un'unisecante Γ, che risulta anche unisecante del sistema $\{F^{(2)}\}$. Escluso allora, come di consueto (ved. ultimo comma del n. 1), che $F^{(2)}$ sia un cono (con il vertice su π), oppure si spezzi in due piani, e detto $k_1(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{r-3})$ il corpo d'appartenenza di $F^{(2)}$, si ha che la $F^{(2)}$ stessa è birazionale su $k_1^*(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{r-3})$, e perciò — ancora per la i_7) del n. 7 — V è unirazionale, anzi birazionale su k_1^*.

Infine se ***dim*** $(\{\Psi_y\}) = 1$, non potendosi in questo caso applicare nessuno dei procedimenti sopra indicati, basta sostituire al piano π un altro piano π' (eventualmente semplice su V), che non si trovi nelle particolari condizioni del primo [19]).

Il Teorema del n. 1 resta così completamente stabilito.

OSSERVAZIONE: Si hanno buoni motivi per ritenere valida, per un opportuno $r(n)$, la proposizione generale I) enunciata nel n. 1.

La dimostrazione di una tale proposizione è stata infatti recentemente tentata dall'A. con procedimenti diversi da quelli qui usati (non potendo ovviamente questi ultimi essere estesi al caso $n > 4$): ed i risultati sinora ottenuti sembrano incoraggianti. Restano ancora alcune difficoltà inerenti a questioni di carattere apparentemente marginale che si ha fede di poter presto superare.

---

[19]) Un tale piano π' — la cui esistenza appare evidente — può ad es. ricercarsi tra le componenti delle quadriche riducibili del sistema $\{F^{(2)}\}$, di dimensione $r - 3 \geqslant 4$, *luogo* su k_1 della quadrica $F^{(2)} = V \cdot P_3 - 2\pi$, dove P_3 è uno spazio tridimensionale, generico su k_1 tra quelli di $P_r(K)$ che passano per π.