# Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova



Giorgio Trevisan


## Un'espressione esplicita per l'integrale di un sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie a coefficienti costanti. Applicazioni


*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 31 (1961), p. 301-307

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__301_0>

# UN'ESPRESSIONE ESPLICITA PER L'INTEGRALE DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI ORDINARIE A COEFFICIENTI COSTANTI. APPLICAZIONI.

*Nota* (*) *di* GIORGIO TREVISAN (*a Padova*)

In questo lavoro, l'integrale generale di un sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie a coefficienti costanti viene espresso esplicitamente mediante una formula [la (10) del testo] che richiama, nell'aspetto, quella valida nel caso di una sola equazione. Per la deduzione della formula è fondamentale il lemma del n. 2.

Il possesso di un'espressione esplicita di quell'integrale generale permette (n. 4) di precisare, in maniera spontanea e semplice, un bel risultato di Pini [1] relativo ad un sistema lineare ai differenziali totali.

1. - Nel presente lavoro, $A$, $B$, ... staranno ad indicare matrici quadrate di dato ordine $n$, i cui elementi sono numeri complessi; $I$ rappresenterà sempre la matrice unitaria di ordine $n$; i simboli $|A|$, $|B|$, ... denoteranno, invece, i determinanti delle rispettive matrici $A$, $B$, ... .

Se $\lambda$ è una indeterminata e si considera il polinomio di ordine $n$ nella $\lambda$, $\varphi(\lambda) = |\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}|$, si rammenterà che il numero complesso $\alpha$ è chiamato un *valore caratteristico di molteplicità* $r$ per $A$ se esso è radice $r$-pla dell'equazione algebrica $\varphi(\lambda) = 0$.

---

(*) Pervenuta in redazione il 29 maggio 1961.
Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

2. - Ora è essenziale per il seguito il seguente

LEMMA: *Se $\alpha$ è un valore caratteristico di molteplicità $r$ per la matrice $A$, allora la matrice $(\alpha I - A)^r$ ha caratteristica eguale ad $n - r$.*

Questo lemma si dedurrebbe facilmente dalla teoria delle caratteristiche di Weyr [2], ma poichè in questi anni tale teoria è un poco dimenticata, si ritiene comodo per il lettore darne qui una dimostrazione diretta.

Posto $\alpha = 0$, il che non è restrittivo, sia $T$, $|T| \neq 0$, una matrice tale che la $P = T(\alpha I - A)T^{-1} = T(-A)T^{-1}$ risulti posta in forma canonica secondo Jordan ed anzi in modo tale che della diagonale principale di $P$ risultino nulli gli elementi delle sue prime $r$ righe e perciò i rimanenti diversi da zero. Poichè $P^r = [T(-A)T^{-1}]^r = T(-A)^r T^{-1}$ segue come è ben noto che $-A^r$ e $P^r$ (e quindi $A^r$ e $P^r$) hanno la stessa caratteristica.

Si vede però agevolmente, procedendo ad esempio, per induzione, che $P^r$ ha le prime $r$ righe formate con elementi tutti nulli e perciò la sua caratteristica è $\leqslant n - r$, ma la sua sub-matrice formata con le rimanenti righe e le ultime $n - r$ colonne ha determinante diverso da zero, perchè tali sono gli elementi della sua diagonale principale mentre tutti nulli sono quelli che stanno sopra di essa, e si conclude che la caratteristica di $A^r$ è proprio $n - r$.

3. - Si consideri il sistema di equazioni differenziali ordinarie omogenee in $n$ incognite, a coefficienti costanti,

$$Y' = AY . \tag{1}$$

Il vettore incognito $Y$ sarà, ovviamente, ad $n$ componenti, che si supporranno funzioni derivabili della variabile $x$.

Se si introduce l'operatore lineare D di derivazione la (1) si può anche scrivere

$$(\mathrm{D}I - A)Y = 0 \tag{2}$$

e da questa, se $\varphi(\mathrm{D}) = |\,\mathrm{D}I - A\,|$ si pensa ora come un polinomio differenziale, si ricava $\varphi(\mathrm{D})Y = 0$.

La deduzione si ottiene trattando (2) come un sistema algebrico lineare, dove D sia una costante, e operando con le consuete regole, ciò è lecito appunto perchè i polinomi differenziali in D a coefficienti numeri complessi costituiscono un anello.

Quanto stabilito dice dunque che ogni componente $y_i(x)$ di $Y$ è una soluzione dell'equazione differenziale lineare, di ordine $n$,

$$\varphi(\mathrm{D})y = 0 \tag{3}$$

Ora bisogna vedere quando $n$ soluzioni della (3) costituiscono le componenti di un vettore $Y$ verificante (2).

Detti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ gli zeri del polinomio algebrico $\varphi(\lambda) = |\,\lambda I - A\,|$ ed $r_1, r_2, \ldots, r_t$ le loro rispettive molteplicità, talchè $r_1 + r_2 + \ldots + r_t = n$, una soluzione $y_i(x)$ generica della (3) dovrà essere della forma

$$y_i(x) = \sum_{1}^{t}{}_s\, q_{s,i}(x) e^{\alpha_s x}$$

con $q_{s,i}(x)$ polinomi in $x$ di grado, al più, $r_s - 1$.

Fatto variare $i$ da 1 ad $n$ e posto $Y = \|\, y_i(x) \,\|$ è ben noto [3] che $Y$ è soluzione della (1), se e soltanto se, ne sono soluzioni le $t$ matrici

$$\|\, q_{s,i}(x) \,\|\, e^{\alpha_s x} \qquad (s = 1, 2, \ldots t)$$

Ora una generica di queste è perciò della forma

$$(P_{r-1}x^{r-1} + \ldots + P_1 x + P_0)e^{\alpha x}\,, \tag{4}$$

dove $\alpha$ è uno zero di $\varphi(\lambda)$ di molteplicità $r$ e $P_0, P_1, \ldots P_{r-1}$, vettori ad $n$ componenti che sono numeri complessi.

Sostituendo (4) nella (1) se ne ricava con immediato calcolo che deve essere

$$\begin{gathered}(\alpha I - A)(P_{r-1}x^{r-1} + \ldots + P_1 x + P_0) + \\ + [(r-1)P_{r-1}x^{r-2} + \ldots + P_1] = 0\end{gathered}$$

e per una ovvia conseguenza del principio di identità dei polinomi la:

(5) $$(\alpha I - A)P_{r-1} = 0 ,$$

e se $r > 1$ anche la

(6) $$(\alpha I - A)P_{r-h} + (r - h + 1)P_{r-h+1} = 0 \qquad (h = 2, 3, \ldots, r),$$

operando sulla (6) con $(\alpha I - A)^{h-1}$ $(h = 2, 3, \ldots, r)$ tenendo sempre conto della (5), si ottiene la

$$(\alpha I - A^h)P_{r-h} = 0 \qquad (h = 2, 3, \ldots r)$$

ed in particolare la

(7) $$(\alpha I - A)^r P_0 = 0 ,$$

cioè necessariamente $P_0$ è soluzione del sistema algebrico (7), che per il LEMMA del n. 2 ammette $r$ soluzioni linearmente indipendenti.

Viceversa se $P_0$ verifica le (7) dalle (6) è possibile trarre successivamente $P_1, P_2, \ldots, P_{r-1}$ e si verifica immediatamente che $P_{r-1}$ soddisfa alla (5).

Cioè il sistema (6), (7) è equivalente al sistema (5), (6).

La generica $P_s$ $(s > 0)$ è data come si stabilisce subito dalla

(8) $$P_s = (-1)^s \frac{1}{s!}(\alpha I - A)^s P_0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, r - 1).$$

Sostituendo tali espressioni nella (4) si ottiene per il sistema (1) la soluzione

(9) $$\left[I + \sum_{1}^{r-1}{}_s \frac{(-1)^s}{s!} x^s(\alpha I - A)^s\right] P_0 e^{\alpha x} .$$

Il complesso delle considerazioni fin qui svolte permette di enunciare a conclusione il seguente

TEOREMA: *Il sistema differenziale lineare* (1) *se l'equazione algebrica* $\varphi(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$ *ammette come radici* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$, *con molteplicità rispettivamente* $r_1, r_2, \ldots, r_t$ *possiede come integrale generale*

$$(10) \qquad Y = \sum_{1}^{t}{}_{i} \left[ I + \sum_{1}^{r_i-1}{}_{s} \frac{(-1)^s}{s!} x^s (\alpha_i I - A)^s \right] P_{0,i} e^{\alpha_i x},$$

*dove* $P_{0,i}$ *è la soluzione generale del sistema algebrico lineare*

$$(11) \qquad (\alpha_i I - A)^{r_i} P_{0,i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, t).$$

4. - Come applicazione del risultato stabilito nel numero precedente si mostra in che modo esso permetta di ricondurre immediatamente a studiare sistemi del tipo (1) il sistema lineare ai differenziali totali

$$(12) \qquad dY = (A du + B dv) Y,$$

dove $A$ e $B$ siano matrici di ordine $n$, date nel corpo complesso, e $Y$ sia il vettore $\| y_i(u, v) \|$ ad $n$ componenti. Il sistema (12) è equivalente al sistema alle derivate parziali

$$(13) \qquad \frac{\partial}{\partial u} Y = AY$$

$$(13') \qquad \frac{\partial}{\partial v} Y = BY.$$

È noto che la condizione di completa integrabilità per un siffatto sistema è data dalla permutabilità delle due matrici $A$ e $B$, cioè deve essere $AB = BA$.

Per quanto visto in precedenza la soluzione del sistema (13) sarà data dalle (10), (11) dove si ponga $u$ al posto di $x$ e si pensino i parametri da cui dipendono le $P_{0,i}$ come funzioni di $v$.

Perchè la (10), intesa nel senso ora detto, verifichi il sistema (13') è necessario e sufficiente che ciò accada per ciascuno dei $t$ termini di tipo (9) (ove si cambi $u$ in $x$, e ciò valga per tutto il seguito) di cui (10) é somma e questo per una proprietà già ricordata [2].

Si imponga dunque alla (9) di essere soluzione della (13′). Conviene esprimere esplicitamente la soluzione $P_0$ della (7) e cioè porla nella forma

$$P_0 = \varrho_1 S_1 + \varrho_2 S_2 + \dots + \varrho_r S_r \,,$$

dove $S_1, S_2, \dots, S_r$ sono $r$ soluzioni della (7) tra loro linearmente indipendenti e $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_r$ parametri arbitrari che nel problema attuale diventano funzioni della $v$ da calcolarsi.

Sostituendo (9) in (13′) si ha

$$\left[I + \sum_{1}^{r-1}{}_s \frac{(-1)^s}{s!} u^s(\alpha I - A)^s\right](\varrho_1' S_1 + \dots + \varrho_r' S_r) =$$

$$= B\left[I + \sum_{1}^{r-1}{}_s \frac{(-1)^s}{s!} u^s(\alpha I - A)^s\right]\cdot(\varrho_1 S_1 + \dots + \varrho_r S_r)$$

che pensate adesso come identità in $u$, per la permutabilità di $B$ con $A$ implica la

$$\varrho_1' S_1 + \dots + \varrho_r' S_r = \varrho_1 B S_1 + \dots + \varrho_r B S_r \,. \tag{14}$$

Ma $BS_i$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ è una soluzione della (7) infatti

$$(\alpha I - A)^r B S_i = B(\alpha I - A)^r S_i = 0$$

ed allora in uno ed in un sol mȯdo si potranno determinare i numeri $h_{s,i}$ $(s = 1, 2, \dots, r)$ per modo che

$$BS_i = h_{1,i} S_1 + \dots + h_{r,i} S_r \qquad (i = 1, 2, \dots, r),$$

Sostituite tali espressioni nella (14) per la lineare indipendenza delle $S_1, S_2, \dots, S_r$ se ne ricava che deve essere

$$\varrho_i' = \varrho_1 h_{i1} + \dots + \varrho_r h_{ir} \qquad (i = 1, 2, \dots, r) \tag{15}$$

e si è così ricondotti ad un ben determinato sistema differenziale del tipo studiato nel numero precedente.

Si capisce che per effettuare tutto il calcolo, al fine di risolvere il problema, si dovranno trattare più sistemi del tipo (15), uno per ogni valore caratteristico della $A$.

## BIBLIOGRAFIA

[1] PINI B.: *Sui sistemi di equazioni lineari del primo ordine ai differenziali totali.* Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, s. III, v V, 1950, 255.

[2] MAC DUFFEE C. C.: *Vectors and matrices.* The mathematical association of America, 1943, 150.

[3] SANSONE G.: *Equazioni differenziali nel campo reale.* Zanichelli, Bologna, vol. I, 1941, 66.