

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ARNO PREDONZAN

**Alcuni teoremi relativi all'unirazionalità di
ipersuperficie algebriche non generali**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 31 (1961), p. 281-293

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__281_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

ALCUNI TEOREMI RELATIVI ALL'UNIRAZIONALITÀ DI IPERSUPERFICIE ALGEBRICHE NON GENERALI

Nota (*) di ARNO PREDONZAN (a Padova)

1. - Sia k un corpo di caratteristica zero e K un sopracorpo algebricamente chiuso di k che risulti un dominio universale per k . Sia poi P_r uno spazio proiettivo di dimensione r su K .

È noto che una varietà V di P_r , algebrica sopra k , dicesi *unirazionale* su un sopracorpo algebrico k^* di k se un suo punto $x = (x_0, x_1, \dots, x_r)$, *generico* su k^* , può esprimersi come elemento di $(k_m^*[\xi])^{r+1}$, essendo $k_m^*[\xi]$ lo spazio vettoriale sopra k^* costituito dai polinomi omogenei di un certo grado m (ivi compreso anche il polinomio nullo) dell'anello $k^*[\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_d]$, con $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_d$, ($d = \dim_{k^*}(V)$), elementi di K trascendenti su k^* ed algebricamente indipendenti.

Tra i risultati sinora ottenuti sulle varietà algebriche unirazionali appare particolarmente notevole quello, dovuto ad U. Morin, che riguarda l'ipersuperficie generale V di un qualunque ordine n di P_r : esso assicura l'unirazionalità della V stessa, su un sopracorpo algebrico k^* del suo corpo k di definizione, appena r risulti non inferiore ad un intero $r(n)$, definito in corrispondenza ad n ¹). Si presenta allora il problema — affrontato nel presente

(*) Pervenuta in Redazione il 15 maggio 1961.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

¹) Ved. U. MORIN: *Sull'unirazionalità dell'ipersuperficie algebrica di qualunque ordine e dimensione sufficientemente alta*. Atti II Congresso U.M.I. (1940). Di questo lavoro è stata data un'estensione a varietà

lavoro — di vedere in quale forma e sotto quali condizioni possano sussistere proprietà di tipo analogo per ipersuperficie algebriche non generali, singolari o meno.

Le conclusioni a cui si giunge sono compendiate in quattro teoremi, dal primo dei quali discendono i tre successivi. Precisamente il Teor. 1, (n. 2), stabilisce l'unirazionalità di un'ipersuperficie assoluta V dell'ordine n di P_r , di tipo qualunque, purchè contenente una sottovarietà lineare *totalmente non singolare* su V , la cui dimensione non sia inferiore ad un intero $s(n)$ definito in relazione ad n . Dal Teor. 1 consegue quello 2, (n. 7), nel quale si afferma l'unirazionalità di ogni V assoluta di P_r , qualora sia $r \geq r(n, t)$, con $r(n, t)$ intero determinato in corrispondenza all'ordine n di V ed alla dimensione t della sottovarietà singolare U di V . Il Teor. 3, (n. 8), riguarda invece l'unirazionalità delle V non singolari di P_r : esso comprende, migliorandone i limiti, la condizione del Morin sopra indicata. Infine il Teor. 4, (n. 8), è l'applicazione del Teor. 3 alle ipersuperficie $(r + 1)$ -edrali, ed è stato esplicitamente enunciato perchè può presentare di per sé un qualche interesse, anche in alcune questioni di analisi diofantea.

2. - Sia V una k -ipersuperficie assoluta (cioè assolutamente irriducibile) dell'ordine n di P_r : l'ideale principale ed omogeneo $\mathfrak{S}_k(V)$ di V , appartenente all'anello di polinomi $k[X_0, X_1, \dots, X_r]$, è perciò primo insieme ad ogni ideale $\mathfrak{S}_{k^*}(V) = \mathfrak{S}_k(V) k^*[X_0, X_1, \dots, X_r]$, con k^* sopracorpo algebrico arbitrario di k .

Una sottovarietà H di V verrà detta *totalmente non singolare* su V se ogni suo punto x risulterà k -semplice su V e quindi — poichè k è perfetto — *assolutamente semplice* o, più prevemente, *semplice su V* : ciò equivarrà a dire che l'anello locale (assoluto)

intersezioni di ipersuperficie generiche di P_r ; ved. A. PREDONZAN: *Sull'unirazionalità della varietà intersezione completa di più forme*. Rend. Sem. Mat. di Padova, 18 (1949).

Nei due lavori ora citati si opera sul corpo complesso: le argomentazioni possono però trasportarsi, in maniera naturale, ad un qualunque corpo di caratteristica zero.

$\mathfrak{v}(x; V)$ di x su V sarà regolare, e perciò sarà anche regolare l'anello locale $\mathfrak{v}(H; V)$ di H su V .

Ci proponiamo di dimostrare il seguente:

TEOREMA 1: *Ogni k -ipersuperficie assoluta V dell'ordine $n \geq 2$ che contenga una sottovarietà lineare P_s , totalmente non singolare su V , la cui dimensione s soddisfi alla limitazione*

$$(1) \quad s \geq s(n),$$

con $s(n)$ intero non negativo definito dalla relazione ricorrente

$$(2) \quad s(n) = \binom{s(n-1) + n - 1}{n - 1}, \quad s(2) = 0,$$

è unirazionale sul corpo $k^* = k(P_s)^2$.

La dimostrazione verrà condotta nei seguenti nn. 3-6 e pogrà, in particolare, su due proposizioni stabilite nel n. 4.

3. - Il Teor. 1 appare ovvio per $n = 2$; verrà perciò dimostrato con procedimento induttivo rispetto ad n : supposto cioè $n > 2$, ed ammessane la validità per $n - 1$, ne verrà di conseguenza provata la validità per n .

Si consideri dunque una k -ipersuperficie assoluta V di P_r , dell'ordine $n \geq 3$, e si supponga ch'essa contenga una sottovarietà lineare (spazio lineare) P_s , totalmente non singolare su V , e di dimensione s soddisfacente alla (1).

Posto $k^* = k(P_s)$ e scelto arbitrariamente un k^* -sottospazio $P_{s(n)}$ di P_s , di dimensione $s(n)$ data dalla (2), si fissi in P_r un k^* -sottospazio $P_{r-s(n)-1}$, di dimensione $r - s(n) - 1$, sghembo con $P_{s(n)}$.

Per semplicità operiamo in P_r un cambiamento di coordinate

²⁾ Con $k(P_s)$ viene indicato il minimo sopracorpo di k che contiene quello di definizione di P_s .

Nell'enunciato del Teor. è stato tralasciato il caso $n = 1$ in quanto banale.

proiettive, definito su k^* , in modo che sia:

$$(3) \quad \begin{aligned} P_{s(n)} &= VP_K((X_0, X_1, \dots, X_{r-s(n)-1})), \\ P_{r-s(n)-1} &= VP_K((X_{r-s(n)}, \dots, X_r)), \end{aligned}$$

il simbolo funzionale $VP_K(\)$ stando ad indicare quel sottoinsieme algebrico di P_r che ha come ideale quello scritto tra parentesi.

La base dell'ideale $\mathfrak{S}_{k^*}(V)$ di V su k^* può allora scriversi nella forma:

$$(4) \quad F = \sum_{i=0}^{r-s(n)-1} X_i f_i(X_{r-s(n)}, \dots, X_r) + \sum_{i,j=0}^{r-s(n)-1} X_i X_j g_{ij}(X_0, X_1, \dots, X_r),$$

con f_i, g_{ij} polinomi omogenei dei gradi rispettivi $n-1, n-2$ degli anelli $k^*[X_{r-s(n)}, \dots, X_r], k^*[X_0, X_1, \dots, X_r]$, i primi dei quali non tutti nulli³⁾.

Dalla seconda delle (3) deriva inoltre che, se $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-s(n)-1}$ sono elementi di K trascendenti su k^* ed algebricamente indipendenti, il punto $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-s(n)-1}, 0, \dots, 0)$ è generico di $P_{r-s(n)-1}$ su k^* .

Nel sistema Σ , razionale su k^* e di dimensione $r-s(n)-1$, dei $P_{s(n)+1}$ di P_r per il $P_{s(n)}$ di cui alla prima delle (3), si consideri ora il $P_{s(n)+1}(\lambda)$ congiungente $P_{s(n)}$ con il punto λ : tale $P_{s(n)+1}(\lambda)$ è ovviamente generico di Σ su k^* , ed una base del relativo ideale $\mathfrak{S}_{k^*(\lambda)}(P_{s(n)+1}(\lambda))$ è data da:

$$(5) \quad \lambda_1 X_0 - \lambda_0 X_1, \quad \lambda_2 X_0 - \lambda_0 X_2, \quad \dots, \quad \lambda_{r-s(n)-1} X_0 - \lambda_0 X_{r-s(n)-1}.$$

³⁾ Se infatti tutti gli f_i fossero nulli, sarebbe zero il rango della matrice jacobiana:

$$J(F, x) = \left| (D_{X_0} F)(x), \dots, (D_{X_r} F)(x) \right|,$$

con x punto generico di $P_{s(n)}$ su k^* , e ciò — per un noto criterio jacobiano di semplicità di ZARISKI [ved. ad es. P. SAMUEL: *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique*. *Ergebnisse der Mathematik* (1955), 74] — sarebbe in contrasto con la supposta regolarità dell'anello locale $v(x; V)$.

Poichè per ipotesi l'anello locale $\mathfrak{v}(P_{s(n)}; V)$ è regolare, la molteplicità d'intersezione $i(P_{s(n)}; V \cdot P_{s(n)+1}(\lambda))$ di V e $P_{s(n)+1}(\lambda)$ in $P_{s(n)}$ vale uno. Ne viene che il divisore positivo $V \cdot P_{s(n)+1}(\lambda)$, dell'ordine n , di $P_{s(n)+1}(\lambda)$ ha $P_{s(n)}$ come componente semplice, cioè:

$$(6) \quad V \cdot P_{s(n)+1}(\lambda) = P_{s(n)} + W(\lambda),$$

con $W(\lambda)$ divisore positivo, dell'ordine $n - 1$, di $P_{s(n)+1}(\lambda)$, non avente $P_{s(n)}$ come componente. Lo stesso $W(\lambda)$ è chiaramente elemento generico su k^* di un sistema Φ , razionale su k^* e di dimensione $r - s(n) - 1$; inoltre esso determina su $P_{s(n)}$ il divisore positivo dell'ordine $n - 1$:

$$(7) \quad \chi(\lambda) = W(\lambda) \cdot P_{s(n)}.$$

4. - In questo n. proveremo che:

i) Il divisore positivo $\chi(\lambda)$ dell'ordine $n - 1$ di $P_{s(n)}$, definito dalla (7), è elemento generico su k^ di un sistema lineare L la cui dimensione verifica la disuguaglianza*

$$(8) \quad \dim(L) \geq s(n);$$

$\chi(\lambda)$ è inoltre, per ogni $n \geq 4$, una $k^(\lambda)$ -ipersuperficie assoluta e priva di punti singolari di $P_{s(n)}$; invece per $n = 3$ $\chi(\lambda)$ è dotato, in un sopracorpo algebrico di $k^*(\lambda)$, di $n - 1$ componenti semplici 0-dimensionali.*

Dalla *i)*, tenuto conto che l'irriducibilità assoluta di $\chi(\lambda)$ assicura quella di $W(\lambda)$, seguirà immediatamente che:

ii) Il divisore positivo $W(\lambda)$ dell'ordine $n - 1$ di $P_{s(n)+1}(\lambda)$, definito dalla (6), è, per ogni $n \geq 4$, una $k^(\lambda)$ -ipersuperficie assoluta.*

Partendo dalle (4), (5), si può facilmente verificare che le equazioni di $\chi(\lambda)$, cioè la base del relativo ideale $\mathfrak{S}_{k^*(\lambda)}(\chi(\lambda))$,

possono scriversi nella forma:

$$(9) \quad X_0, X_1, \dots, X_{r-s(n)-1}, \sum_{i=0}^{r-s(n)-1} \lambda_i f_i(X_{r-s(n)}, \dots, X_r),$$

il che assicura che L è un sistema lineare sopra $P_{s(n)}$.

Per dimostrare la validità della (8) cominciamo con l'osservare che *il sistema lineare L è necessariamente privo di punti base*. Se infatti così non fosse, detta P_1 una retta di $P_{s(n)+1}(\lambda)$ uscente da un punto base x di L e generica su $k^*(\lambda, x)$ — e quindi generica su $k^*(x)$ nel sistema delle rette di P_r , passanti per x — si avrebbe, tenuto anche conto della (6):

$$\begin{aligned} V \cdot P_1 &= (V \cdot P_{s(n)+1}(\lambda)) \cdot P_1 = (P_{s(n)} + W(\lambda)) \cdot P_1 = \\ &= P_{s(n)} \cdot P_1 + W(\lambda) \cdot P_1 = x + (lx + X) = (l+1)x + X, \end{aligned}$$

con l intero ≥ 1 ed X divisore positivo di P_1 non avente x come componente; ne verrebbe $i(x; V \cdot P_1) = l+1 \geq 2$, donde l'irregolarità di $v(x; V)$, in contrasto con le ipotesi del Teor. 1.

Da quanto testè osservato segue subito la (8). Qualora infatti risultasse $\dim(L) \leq s(n) - 1$, l'intersezione di $\dim(L) + 1$ elementi di L , linearmente indipendenti su k^* , sarebbe un insieme algebrico non vuoto, il che implicherebbe l'esistenza di almeno un punto base x di L .

Sempre dall'osservata impossibilità per L di avere punti base, e poggiando su due classici teoremi del Bertini⁴⁾, si deduce che $\chi(\lambda)$ è, per ogni $n \geq 4$, un'ipersuperficie assoluta non singolare di $P_{s(n)}$. Se infatti $\chi(\lambda)$ — la cui dimensione non è inferiore a tre, in quanto da $n \geq 4$ segue $s(n) \geq 4$ — non avesse una sola componente assoluta semplice, o ciascun elemento di L avrebbe (almeno) una componente fissa che sarebbe perciò base per L , oppure gli elementi di L avrebbero tutti componenti variabili in un medesimo fascio il cui insieme base sarebbe base anche per L ; $\chi(\lambda)$ inoltre è non singolare, non potendo l'elemento ge-

⁴⁾ Ved., ad es., M. BALDASSARRI: *Algebraic varieties*. Ergebnisse der Mathematik (1956), 33.

nerico di un sistema lineare avere punti singolari fuori dell'insieme base del sistema stesso. Quest'ultima proprietà sussiste anche per sistemi lineari di cicli 0-dimensionali (cioè per serie lineari sopra una retta) e perciò nel caso $n = 3$, che comporta $s(n) = 1$, le componenti del ciclo 0-dimensionale $\chi(\lambda)$ sono, nella chiusura algebrica di $k^*(\lambda)$, tutte semplici ed in numero quindi di $n - 1$.

5. - Ricordiamo che se P_ϱ è uno spazio proiettivo di dimensione ϱ su K , la postulazione $\pi(P_\sigma; \Delta)$ di un qualunque suo sottospazio P_σ , ($\sigma < \varrho$), rispetto al sistema lineare Δ di tutti i divisori positivi di un certo ordine ν di P_ϱ , è data da:

$$(10) \quad \pi(P; \Delta) = \binom{\sigma + \nu}{\nu}.$$

Inoltre l'elemento *generico* di Δ , e quindi ogni sua *specializzazione*, contiene, in un sopracorpo algebrico del suo corpo di definizione, sottovarietà lineari P_σ se valgono le limitazioni:

$$(11) \quad \begin{aligned} \varrho &\geq 2\sigma + 1, & \text{se } \nu = 2, \quad \sigma \geq 2, \\ \varrho &\geq \frac{1}{\sigma + 1} \binom{\sigma + \nu}{\nu} + \sigma, & \text{negli altri casi } ^5). \end{aligned}$$

Dalle (10), (11), ed appena si tenga conto delle (8), (2), discende che esistono elementi del sistema lineare L (n. 4), che passano per un sottospazio $P_{s(n-1)}$ di $P_{s(n)}$ comunque prefissato, ed inoltre che l'elemento generico $\chi(\lambda)$ di L su k^* contiene sottovarietà lineari $P_{s(n-1)}$ di $P_{s(n)}$. Da ciò si può facilmente dedurre che è possibile determinare un k^* -insieme algebrico Γ di sottospazi

⁵⁾ Ved., U. MORIN: *Sull'insieme degli spazi lineari contenuti in una ipersuperficie algebrica*. Rend. Acc. dei Lincei (1936); B. SEGRE: *Intorno agli S_k che appartengono alle forme generali di dato ordine*. Rend. Acc. dei Lincei (1948); A. PREDONZAN: *Intorno agli S_k giacenti sulla varietà intersezione completa di più forme*. Rend. Acc. dei Lincei (1948).

$P_{s(n-1)}$ di $P_{s(n)}$, razionale su k^* , che abbia dimensione c opportuna in guisa che si abbia:

$$(12) \quad \begin{cases} \text{pr}_\Gamma(E) = \Gamma, & \text{pr}_L(E) = L, \\ \dim(\chi(\lambda)E^{-1}) = 0, \end{cases}$$

dove si è indicato con E quel sottoinsieme del prodotto $\Gamma \times L$ definito da:

$$(P_{s(n-1)}, \chi) \in E \Leftrightarrow P_{s(n-1)} \subset \chi, \quad (P_{s(n-1)} \in \Gamma, \chi \in L) \text{ } ^6).$$

Detto M lo spazio proiettivo c -dimensionale luogo su k^* del punto $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_c)$, con $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_c$ elementi di K trascendenti su k^* ed algebricamente indipendenti, la razionalità di Γ su k^* garantisce l'esistenza di un'applicazione birazionale μ , definita su k^* , di M sopra Γ , e l'elemento $P_{s(n-1)}(\mu)$ di Γ definito da:

$$(13) \quad P_{s(n-1)}(\mu) = \mu\varphi$$

⁶ Se τ è un'applicazione birazionale, definita su k^* , della varietà grassmanniana G — immagine in uno spazio proiettivo P_s , di dimensione $S = \binom{s(n) + 1}{s(n-1) + 1} - 1$, dei $P_{s(n-1)}$ di $P_{s(n)}$ — sopra uno spazio proiettivo P_D , di dimensione $D = (s(n) - s(n-1))(s(n-1) + 1)$, l'immagine su G dei $P_{s(n-1)} \subset \chi(\lambda)$ viene mutata da τ in un insieme algebrico \mathcal{E} , il cui sottoinsieme Θ dei punti in cui τ^{-1} non è biregolare ha dimensione inferiore a quella di \mathcal{E} stesso. Si può allora determinare un k^* -sottospazio P_c di P_D , di dimensione $c = D - \dim(\mathcal{E})$, che seghi \mathcal{E} in un numero finito di punti e sia tale che $P_c \cap \Theta = \emptyset$: la controimmagine su $P_{s(n)}$ di $P_c\tau^{-1}$ appare così un sistema Γ del tipo voluto.

Si noti che $c = \dim(\Gamma) \leq s(n)$. Infatti se X è elemento generico del sistema lineare di tutti i divisori positivi dell'ordine $n-1$ di $P_{s(n)}$, la dimensione del sistema dei $P_{s(n-1)}$ di $P_{s(n)}$ giacenti su X vale [ved. lavori loc. cit. in ⁵]:

$$(s(n) - s(n-1))(s(n-1) + 1) - s(n),$$

dove $(s(n) - s(n-1))(s(n-1) + 1)$ è notoriamente la dimensione del sistema di tutti i $P_{s(n-1)}$ di $P_{s(n)}$. Un sistema del tipo di Γ , cioè tale che un numero finito di suoi elementi giaccia su X , ha allora dimensione $s(n)$, e pertanto per la dimensione c di Γ vale la limitazione sopra indicata.

risulta ovviamente generico di Γ su k^* .

6. - Sia ψ l'applicazione lineare su k^* dello spazio $P_{r-s(n)-1}$, di punto generico λ (n. 3), sopra il sistema lineare L (n. 4), definita da:

$$\lambda\psi = \chi(\lambda).$$

Gli elementi di L che passano per il generico $P_{s(n-1)}(\mu)$ di Γ , di cui alla (13), formano un sistema lineare $L(\mu)$, e perciò $L(\mu)\psi^{-1}$ è un sottospazio $P_d(\mu)$ di $P_{r-s(n)-1}$, di una certa dimensione $d \geq 0$. Indicati allora con v_0, v_1, \dots, v_d , $d + 1$ elementi di K trascendenti su $k^*(\mu)$ ed algebricamente indipendenti, un punto $\lambda(\mu)$ di $P_d(\mu)$, generico su $k^*(\mu)$, ha coordinate $\lambda_i(\mu)$, ($i = 0, 1, \dots, r$), esprimibili come elementi dello spazio vettoriale $k^*(\mu)_i[v]$ sopra $k^*(\mu)$ ⁷⁾, e gli elementi di $k^*(\mu)$ che in tali $\lambda_i(\mu)$ compaiono potranno anzi ridursi ad appartenere allo spazio vettoriale $k^*_i[\mu]$, con l intero positivo opportuno; in definitiva dunque — ricordando anche che $\lambda_i(\mu) = 0$ per $i = r - s(n), \dots, r$, (n. 3) — si avrà:

$$(14) \quad \begin{cases} \lambda_i(\mu) = \sum_{j=0}^d v_j h_{ij}(\mu), & (i = 0, 1, \dots, r - s(n) - 1), \\ \lambda_i(\mu) = 0, & (i = r - s(n), \dots, r), \end{cases}$$

con
$$h_{ij}(\mu) \in k^*_i[\mu].$$

Detto N lo spazio proiettivo d -dimensionale lungo su k^* del punto $v = (v_0, v_1, \dots, v_d)$, le (14) definiscono un'applicazione T , razionale su k^* , dello spazio biproiettivo $M \times N$ in quello proiettivo $P_{r-s(n)-1}$. La T risulta, a norma delle (12), suriettiva e d'indice di proiezione su $P_{r-s(n)-1}$ finito, dal che segue l'equidimensionalità di $M \times N$ e $P_{r-s(n)-1}$, cioè:

$$(15) \quad c + d = r - s(n) - 1.$$

⁷⁾ Ved., per il simbolismo, il secondo capoverso del n. 1.

Attraverso la trasformazione:

$$(16) \quad \lambda_i \rightarrow \lambda_i(\mu), \quad (i = 0, 1, \dots, r),$$

con le $\lambda_i(\mu)$ date dalle (14), le (9) determinano un elemento $\chi(\lambda(\mu))$ di L il quale risulta, come $\chi(\lambda)$, *generico* di L su k^* , e gli elementi $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_c$ che compaiono esplicitamente nella base del relativo ideale individuano, attraverso l'applicazione φ di cui alla (13), una sua sottovarietà lineare $P_{s(n-1)}(\mu)$, la quale risulta — per quanto stabilito nella *i)* del n. 4 — totalmente non singolare su $\chi(\lambda(\mu))$.

Sempre attraverso la (16), le (4), (5) determinano un elemento $W(\lambda(\mu))$ di Φ (n. 3), pur esso *generico* [come già $W(\lambda)$] di Φ su k^* e tale che:

$$\chi(\lambda(\mu)) = W(\lambda(\mu)) \cdot P_{s(n)};$$

sopra $W(\lambda(\mu))$ resta perciò determinata, razionalmente su k^* , la sottovarietà lineare $P_{s(n-1)}(\mu)$, che risulta, anche su $W(\lambda(\mu))$, totalmente non singolare.

Supponiamo ora che l'elemento $W(\lambda(\mu))$ di Φ , definito su $k^*(\lambda(\mu)) = k^*(\mu, \nu)$, sia un'ipersuperficie assolutamente irriducibile, il che certamente avviene — a norma della *ii)* del n. 4 — se $n \geq 4$. Ricordiamo inoltre che $W(\lambda(\mu))$ possiede, per quanto sopra, una sottovarietà lineare $P_{s(n-1)}(\mu)$, totalmente non singolare su $W(\lambda(\mu))$ e tale che $k^*(\mu, \nu)(P_{s(n-1)}(\mu)) = k^*(\mu, \nu)$. Ciò permette di affermare — tenuto conto dell'ipotesi induttiva dell'inizio del n. 3 — che la suddetta $W(\lambda(\mu))$ è unirazionale su $k^*(\mu, \nu)$, il che equivale a dire — appena si indichino con $\varrho_0, \varrho_1, \dots, \varrho_{s(n)}, s(n) + 1$ elementi di K trascendenti su $k^*(\mu, \nu)$ ed algebricamente indipendenti — che un punto generico x di $W(\lambda(\mu))$ su $k^*(\mu, \nu)$ ha coordinate x_i , ($i = 0, 1, \dots, r$), esprimibili come elementi dello spazio vettoriale $k^*(\mu, \nu)_{m_1}[\varrho]$ sopra $k^*(\mu, \nu)$, con m_1 intero positivo opportuno, [vedi nota (7)]; o meglio ancora — tenuto anche conto delle (14) — le x_i potranno esprimersi con:

$$(17) \quad x_i = p_i(\mu_0, \dots, \mu_c; \nu_0, \dots, \nu_a; \varrho_0, \dots, \varrho_{s(n)}), \quad (i = 0, 1, \dots, r),$$

dove i secondi membri indicano polinomi dell'anello $k^*[\mu; \nu; \varrho]$, omogenei tanto nelle ϱ che nelle ν e μ , di gradi rispettivi m_1, m_2, m_3 , con m_2, m_3 interi positivi opportuni.

Le (14), che in precedenza si è visto rappresentare un punto generico di $P_d(\mu)$ su $k^*(\mu)$, possono ovviamente anche interpretarsi come punto generico di $P_{r-s(n)-1}$ su k^* . Ne consegue che le (17) rappresentano non solo un punto generico di $W(\lambda(\mu))$ su $k^*(\mu, \nu)$, ma anche un punto generico di V su k^* .

Detto R lo spazio proiettivo $s(n)$ -dimensionale luogo su k^* del punto $\varrho = (\varrho_0, \varrho_1, \dots, \varrho_{s(n)})$, si consideri ora lo spazio triproiettivo $M \times N \times R$. Esso ha, in virtù della (15), dimensione $r - 1$ e perciò può porsi in corrispondenza birazionale su k^* con uno spazio proiettivo $(r - 1)$ -dimensionale di cui sia $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{r-1})$ un punto generico su k^* ⁸⁾. Le (17), attraverso quest'ultima corrispondenza, possono scriversi nella forma:

$$x_i = g_i(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{r-1}), \quad (i = 0, 1, \dots, r),$$

con le g_i elementi di uno spazio vettoriale $k_m[\xi]$. Tanto basta per concludere che V è unirazionale su $k^* = k(P_{s(n)})$, (n. 2), nel caso in cui sia $n \geq 4$, oppure quando, per $n = 3$, $W(\lambda(\mu))$ è assolutamente irriducibile.

Resta ancora da provare l'unirazionalità di V su k^* qualora sia $n = 3$ e la conica $W(\lambda)$ di $P_{s(n)+1}(\lambda) = P_2(\lambda)$ abbia, in un sopracorpo algebrico di $k^*(\lambda)$, due componenti rettilinee semplici l_1, l_2 che — a norma dell'ultima parte della prop. i) del n. 4 — devono incontrarsi in un punto y non situato su $P_{s(n)} = P_1$.

Per giungere a questo risultato cominciamo con l'osservare che $y = l_1 \cap l_2$ appartiene, in quanto punto doppio di $W(\lambda)$, al corpo $k^*(\lambda)$. Detta allora l una retta, generica su $k^*(\lambda)$ tra quelle di P_r uscenti da y , si consideri lo spazio tridimensionale P_3

⁸⁾ La suddetta corrispondenza può, ad es., essere definita da:

$$\begin{cases} \nu_0 \varrho_0 \mu_i \rightarrow \xi_i, & (i = 0, 1, \dots, c), \\ \varrho_0 \mu_0 \nu_i \rightarrow \xi_{c+i}, & (i = 1, 2, \dots, d), \\ \mu_0 \nu_0 \varrho_i \rightarrow \xi_{c+d+i}, & (i = 1, 2, \dots, s(n)). \end{cases}$$

congiungente l con $P_2(\lambda)$. Poichè il ciclo $S = V \cdot P_3$ è chiaramente una rigata cubica avente P_1 come direttrice semplice, si ha che y appartiene alla direttrice doppia di S ⁹⁾. Ne viene che $i(y; V \cdot l) = i(y; S \cdot l) = 2$: epperciò y è punto doppio su V , dal che consegue notoriamente l'unirazionalità (anzi la razionalità) della V stessa su $k^*(y) = k^*(\lambda)$, e quindi anche su k^* appena nella precedente costruzione si scelga una specializzazione di $P_2(\lambda)$ che appartenga a k^* . Il Teor. 1 del n. 2 resta così completamente dimostrato.

7. - Dal Teor. 1 del n. 2 consegue con facilità il seguente:

TEOREMA 2: *Ogni k -ipersuperficie assoluta V dell'ordine $n \geq 2$ di P_r , con r soddisfacente alla limitazione*

$$(18) \quad r \geq \frac{1}{s(n) + 1} \binom{s(n) + n}{n} + s(n) + t + 1,$$

dove $s(n)$ è un intero non negativo definito dalla (2) e t è la dimensione della sottovarietà singolare U di V , è unirazionale su un sopracampo algebrico k^* di k .

Si consideri infatti in P_r un k -sottospazio P_{r-t-1} , di dimensione $r-t-1$ e sghembo con U , in guisa che l'intersezione-prodotto $V' = V \cdot P_{r-t-1}$ sia una k -ipersuperficie non singolare di P_{r-t-1} .

Qualora sia verificata la (18), sulla V' esiste — a norma delle (11) del n. 5 — almeno una sottovarietà lineare $P_{s(n)}$, definita su un corpo k^* algebrico su k . Poichè V' è non singolare, $P_{s(n)}$ è totalmente non singolare su V' , e quindi anche su V : la V stessa è allora — in virtù del Teor. 1 — unirazionale su k^* , il che conferma la validità del Teor. 2.

8. - Se V è una k -ipersuperficie non singolare, epperciò $t = -1$, il Teor. 2 si particolarizza nel seguente:

⁹⁾ Si noti che S non può, nelle nostre ipotesi, essere un cono; nè risultare riducibile (assolutamente).

TEOREMA 3: *Ogni k -ipersuperficie non singolare V dell'ordine $n \geq 2$ di P_r , con r soddisfacente alla limitazione*

$$(19) \quad r \geq \frac{1}{s(n) + 1} \binom{s(n) + n}{n} + s(n), \quad \text{se } n \geq 3,$$

oppure alla

$$(20) \quad r \geq 2, \quad \text{se } n = 2,$$

dove $s(n)$ è un intero non negativo definito dalla (2), è unirazionale su un sopracorpo algebrico k^ di k .*

In questo enunciato — in cui non si fa cenno, come in quello del Teor. 2, all'assoluta irriducibilità di V — si è dovuto aggiungere alla (19) — ottenuta dalla (18) per $t = -1$ — l'ulteriore condizione (20), perchè, per $n = 2$, la (19) stessa fornisce $r \geq 1$, e quindi la possibilità $r = 1$, che è l'unica in cui una V non singolare non risulta assolutamente irriducibile.

Il Teor. 3 — come già fatto notare nel n. 1 — comprende, come caso particolare, la condizione d'unirazionalità del Morin citata in ¹⁾: la limitazione (19) qui ottenuta è altresì meno restrittiva di quella imposta da quest'ultimo Autore.

Sempre dal Teor. 3, come sua immediata applicazione alle k -ipersuperficie $(r + 1)$ -edrali V dell'ordine n di P_r , cioè alle V il cui relativo $\mathfrak{S}_k(V)$ ha per base un polinomio del tipo

$$a_0 X_0^n + a_1 X_1^n + \dots + a_r X_r^n, \quad (a_i \in k \div 0),$$

si ha il seguente:

TEOREMA 4: *Ogni k -ipersuperficie $(r + 1)$ -edrale V dell'ordine $n \geq 2$ di P_r , è, qualora siano soddisfatte le (19), (20), unirazionale su un sopracorpo algebrico k^* di k .*

Una tale V è infatti priva di punti singolari, eppertanto ad essa si possono applicare le conclusioni del Teor. 3.