RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

BRUNO PINI

Sulle equazioni lineari pseudoparaboliche, II

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 30 (1960), p. 361-375

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1960__30__361_0>

SULLE EQUAZIONI LINEARI PSEUDOPARABOLICHE, *II*

Nota (*) *di* BRUNO PINI (*a Bologna*)

La presente Nota fa seguito ad una precedente dallo stesso titolo [1]) e ha per oggetto lo studio di un problema su un dominio limitato per un'equazione di quelle che abbiamo chiamato pseudoparaboliche.

Consideriamo un'equazione pseudoparabolica nella forma ridotta

$$(1) \qquad \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \sum_{\sum_1^r j\, k_j = m} a_{k_1, k_2, \dots, k_r} \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_r^{k_r}};$$

$a_{k, \dots, k_r}$ è una costante reale, m ed n sono numeri naturali, $m > n$; precisamente $n = 2(2n' + 1)$, $m = 4m'$ oppure $n = 4n'$ $m = 2(2m' + 1)$ oppure $n = 2n' + 1$, $m = 2m'$; $\sum_{\sum k_j = m} a_{k_1, \dots, k_r}$ $s_1^{k_1} \dots s_r^{k_r} > 0$ per s_j reale, $\sum_1^r j\, s_j^2 > 0$.

Consideriamo in particolare il caso di $n = 2(2n' + 1)$, $m = 4m'$. Il caso di $n = 4n'$, $m = 2(2m' + 1)$ è del tutto analogo; i restanti casi si trattano in modo simile con opportune varianti (conformi alla Nota richiamata in [1])).

Sia B un insieme aperto limitato, per esempio semplicemente connesso, dello spazio euclideo reale a r dimensioni E_r:

(*) Pervenuta in Redazione il 3 novembre 1960.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Bologna.

[1]) B. PINI, *Sulle equazioni lineari pseudoparaboliche*, I, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 30 (1960).

I l'intervallo $0 < y < \delta$; indichiamo con x il punto $(x_1, \ldots, x_r)$; col soprassegno indichiamo la chiusura. Sia $C = \overline{B} - B$ una superficie della quale

$$x_k = \omega_k(\beta_1, \ldots, \beta_{r-1}), \qquad \beta \in R \subset E_{r-1}$$

sia una rappresentazione parametrica.

Poniamo il problema

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^n u}{\partial y^n} = \displaystyle\sum_{\Sigma k_j = m} a_{k_1,\ldots,k_r} \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_r^{k_r}} & \text{per } x \in B,\ y \in I \\ \left.\dfrac{\partial^j u}{\partial y^j}\right|_{y=0} = f_{0j}(x), \quad \left.\dfrac{\partial^j u}{\partial y^j}\right|_{y=\delta} = f_{1j}(x) & \text{per } x \in \overline{B},\ j = 0, 1, \ldots, \dfrac{n}{2} - 1 \\ \left.\dfrac{d^j u}{d\nu^j}\right|_{x \in C} = g_j(y) & \text{per } y \in \overline{I},\ j = 0, 1, \ldots, \dfrac{m}{2} - 1 \end{cases}$$

indicando con ν la normale a C diretta verso B. Se le f_{0j}, f_{1j} hanno una conveniente regolarità, prolungandole su tutto E_r e ponendole eguali a zero fuori di una sfera contenente $\overline{B}$, utilizzando i risultati della Nota richiamata in [1]) possiamo ritenere $f_{0j} = f_{1j} = 0$.

I risultati che seguono si possono agevolmente estendere al caso che il secondo membro di (1) sia un polinomio differenziale d'ordine m con coefficienti funzioni di x, positivamente ellittico.

1. - Consideriamo il problema

$$(3)\qquad \frac{d^n v}{dy^n} = \mu v \qquad \text{per} \quad y \in I$$

$$(4)\qquad \frac{d^j v(0)}{dy^j} = \frac{d^j v(\delta)}{dy^j} = 0 \quad \text{per} \quad j = 0, 1, \ldots, 2n'$$

essendo $n = 2(2n' + 1)$.

Poniamo (indicando con $\overline{g}$ la funzione complessa coniugata di g)

$$(f, g) = \int_0^\delta f(y)\overline{g(y)}\,dy, \qquad \| f \| = (f, f)^{1/2}$$

per $f,\ g \in L_2$ su I. Si ha

$$\left(\frac{d^n v_1}{dy^n},\ v_2\right)=\left(v_1,\ \frac{d^n v_2}{dy^n}\right)$$

per ogni coppia di funzioni v_1, $v_2 \in C^n$ su I e verificanti entrambe le condizioni (4).

Il problema (3)-(4) è autoaggiunto e conseguentemente i suoi autovalori sono reali. Se μ è un autovalore e v una corrispondente autofunzione, moltiplicando la (1) per v e integrando su I si ha

$$\mu=-\frac{\left\|\dfrac{d^{2n'+1}v}{dy^{2n'+1}}\right\|^2}{\|v\|^2}$$

e quindi gli autovalori sono negativi.

Per risultati noti [2]), posto $\mu=-\lambda^n$, esiste una successione λ_1, λ_2, ... di numeri positivi tali che $\mu_k=-\lambda_k^n$ sono tutti e soli gli autovalori di (3)-(4); questi, almeno se il rango è sufficientemente elevato, sono semplici e

$$\lambda_k = 0(k) \quad \text{per} \quad k \to +\infty\ (^3). \tag{5}$$

---

[2]) J. TAMARKINE, *Sur quelques points de la théorie des équations différentielles linéaires et sur la généralization de la série de Fourier*, Rend. Circolo Mat. di Palermo, 34 (1912) in particolare pp. 358-59.

[3]) Se $n=4n'$ gli autovalori del problema autoaggiunto

$$\frac{d^n v}{dy^n}=\mu v \quad \text{per} \quad y\in I, \quad \frac{d^j v(0)}{dy^j}=\frac{d^j v(\delta)}{dy^j}=0 \quad \text{per} \quad j=0,\ 1, \dots,\ 2n'-1$$

sono positivi perchè sono reali e

$$\|v\|^2\mu=\left\|\frac{d^{2n'}v}{dy^{2n'}}\right\|^2;$$

essi sono semplici, almeno se il rango è sufficientemente elevato; posto $\mu=\lambda^n$, sussiste la (5). Se n è dispari, $n=2n'+1$, supposto per esem-

Sia v_1^*, v_2^*, ... una corrispondente successione ortonormale completa di autofunzioni. Supposto $f \in C^n$ su $\bar{I}$ e $\frac{d^j f(0)}{dy^j} = \frac{d^j f(\delta)}{dy^j} = 0$ per $j = 0, 1, \ldots, 2n'$, da

$$f \frac{d^n v_k^*}{dy^n} = \sum_{0}^{n-1}{}_j (-1)^j \frac{d}{dy}\left(\frac{d^j f}{dy^j} \frac{d^{n-j-1} v_k^*}{dy^{n-j-1}}\right) + (-1)^n v_k^* \frac{d^n f}{dy^n}$$

e

$$(f, v_k^*) = -\frac{1}{\lambda_k^n}\left(f, \frac{d^n v_k^*}{dy^n}\right)$$

segue

$$(f, v_k^*) = -\frac{1}{\lambda_k^n}\left(\frac{d^n f}{dy^n}, v_k^*\right)$$

e quindi

$$(6) \qquad |(f, v_k^*)| \leq \frac{1}{\lambda_k^n}\left\|\frac{d^n f}{dy^n}\right\| \cdot \|v_k^*\| = \frac{1}{\lambda_k^n}\left\|\frac{d^n f}{dy^n}\right\| = 0\left(\frac{1}{k^n}\right)$$

per $k \rightarrow +\infty$.

È poi noto che sussiste lo sviluppo

$$f = \sum_{1}^{\infty}{}_k (f, v_k^*) v_k^*$$

riuscendo la serie uniformemente convergente su I.

---

pio n' dispari, il problema

$$\frac{d^n v}{dy^n} = \mu v \text{ per } y \in I, \frac{d^j v(0)}{dy^j} = 0 \text{ per } j = 0, 1, \ldots, n', \frac{d^j v(\delta)}{dy^j} = 0 \text{ per } j = 0, 1, \ldots, n' - 1$$

non è autoaggiunto; da $\bar{v} \frac{d^n v}{dy^n} = \mu v \bar{v}$, $v \frac{d^n \bar{v}}{dy^n} = \bar{\mu} v \bar{v}$, integrando su I si ottiene

$$2 \| v \|^2 \mathcal{R}e(\mu) = -\left|\frac{d^{n'} v(\delta)}{dy^{n'}}\right|^2 < 0.$$

Anche in questo caso esiste una successione di autovalori e quelli di rango abbastanza elevato sono tutti semplici; posto $\mu = -\lambda^n$, sussiste ancora la valutazione (5) per $\mathcal{R}e(\lambda_k)$.

Indichiamo ora con $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ le radici n-sime di -1; essendo $n = 2(2n' + 1)$, esse sono i numeri i e $-i$, n' coppie di numeri complessi coniugati con parte reale negativa e n' coppie di numeri complessi coniugati con parte reale positiva. Supponiamole ordinate in modo che sia

$$\mathcal{R}e(\alpha_1) = \mathcal{R}e(\alpha_2) < \mathcal{R}e(\alpha_3) = \mathcal{R}e(\alpha_4) < \ldots < \mathcal{R}e(\alpha_{2n'+1}) = 0 = \\ = \mathcal{R}e(\alpha_{2n'+2}) < \ldots < \mathcal{R}e(\alpha_{n-1}) = \mathcal{R}e(\alpha_n).$$

Poichè gli autovalori sono semplici, almeno per k abbastanza grande, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots\ldots\ldots & 1 \\ \alpha_1 & \ldots\ldots\ldots & \alpha_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \alpha_1^{2n'} & \ldots\ldots\ldots & \alpha_n^{2n'} \\ \exp(\lambda_k\alpha_1\delta) & \ldots\ldots\ldots & \exp(\lambda_k\alpha_n\delta) \\ \alpha_1\exp(\lambda_k\alpha_1\delta) & \ldots\ldots\ldots & \alpha_n\exp(\lambda_k\alpha_n\delta) \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \alpha_1^{2n'}\exp(\lambda_k\alpha_1\delta) & \ldots\ldots\ldots & \alpha_n^{2n'}\exp(\lambda_k\alpha_n\delta) \end{pmatrix}$$

ha caratteristica $4n' + 1$. Pertanto una soluzione v_k di (3)-(4) $(\mu = -\lambda_k^n)$ si può scrivere come il determinante ottenuto dalla matrice ora scritta sostituendo una opportuna riga con la riga

$$\exp(\lambda_k\alpha_1 y), \ldots, \exp(\lambda_k\alpha_n y);$$

si porrà poi

$$v_k^* = \frac{v_k}{\| v_k \|}.$$

Supponiamo che la riga soppressa sia quella di posto $s + 1$ e sia $0 \leq s \leq 2n'$ (per $s > 2n'$ il ragionamento è analogo); indichiamo con $\mathcal{V}_{(j)}(\alpha_{k_1}, \ldots, \alpha_{k_{2n'+1}})$ il determinante di Vandermonde costruito con $\alpha_{k_1}, \ldots, \alpha_{k_{2n'+1}}$ essendo $k_1 < k_2 < \ldots < k_{2n'+1}$ $2n' + 1$ tra i numeri $1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$;

indichiamo con $\mathcal{V}'_{(j)}(\alpha_{k'_1}, \dots, \alpha_{k'_{2n'}})$ il determinante che si ottiene dal determinante di Vandermonde costruito con $\alpha_{k'_1}, \dots, \alpha_{k'_{2n'}}, \alpha_j$, essendo $k'_1 < \dots < k'_{2n'}$ i $2n'$ numeri che restano dei $4n'+1$ numeri $1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ sopprimendo $k_1, k_2, \dots, k_{2n'+1}$, da cui sia stata soppressa l'ultima colonna (contenente le potenze di α_j) e la riga di posto $s+1$. Allora si ha

$$v_k = \sum_{1}^{n}{}_j (-1)^j \exp(\lambda_k \alpha_j y) \Sigma (-1)^{k_1 + \dots + k_{2n'+1}} \mathcal{V}_{(j)}(\alpha_{k_1}, \dots, \alpha_{k_{2n'+1}}) \cdot$$

$$\cdot \mathcal{V}'_{(j)}(\alpha_{k'_1}, \dots, \alpha_{k'_{2n'}}) \exp(\lambda_k \delta(\alpha_{k_1} + \dots + \alpha_{k_{2n'+1}})),$$

la Σ intendendosi estesa a tutte le possibili scelte di $k_1, \dots, k_{2n'+1}$.

Il termine di modulo più elevato per $k \to +\infty$ nell'espressione di v_k è

$$-(-1)^{(2n'+1)(3n'+2)} \mathcal{V}_{(2n', 1)}(\alpha_{2n'+2}, \dots, \alpha_n) \mathcal{V}'_{(2n'+1)}(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n'}) \cdot$$

$$\cdot \exp(\lambda_k \alpha_{2n'+1} y) \exp(\lambda_k \delta \sum_{2n'+2}^{n}{}_h \alpha_h).$$

Ora $\mathcal{V}'_{(2n'+1)}(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n'})$ è uguale al prodotto del determinante di Vandermonde di $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n'}$ per $c_{2n'-s}$, somma dei prodotti delle α_j $(j = 1, 2, \dots, 2n')$ prese a $2n'-s$ a $2n'-s$. Queste somme sono d'altra parte tutte $\neq 0$ perchè

$$x^{2n'} + \sum_{1}^{2n'}{}_k (-1)^k c_k x^{2n'-k} = \prod_{1}^{n'}{}_k (x - \alpha_{2k-1})(x - \alpha_{2k}) =$$

$$= \prod_{1}^{n'}{}_k (x^2 - 2\,\mathcal{R}e(\alpha_{2k-1})x + |\alpha_{2k}|^2)$$

e i numeri $\mathcal{R}e(\alpha_{2k-1})$ per $1 \leq k \leq n'$ sono tutti negativi.

Pertanto il modulo del termine detto, a meno di una costante $\neq 0$, è eguale a

$$\exp(\lambda_k \delta \sum_{2n'+2}^{n}{}_h \alpha_h).$$

Segue allora che

$$v_k^*(y) = 0(1) \quad \text{per} \quad k \to +\infty \tag{7}$$

e conseguentemente, ricordando la (5),

$$\frac{d^h v_k^*(y)}{dy^h} = 0(k^h) \quad \text{per} \quad k \to +\infty. \tag{8}$$

In base a (8) si può procedere nella valutazione dei coefficienti di Fourier (f, v_k^*). Se $f \in C^n$ e $\dfrac{d^{n+1}f}{dy^{n+1}} \in L_1$ su $\bar{I}$,

$$\frac{d^j f(0)}{dy^j} = \frac{d^j f(\delta)}{dy^j} = 0 \text{ per } j = 0, 1, \dots, 2n',$$

si ha

$$(f, v_k^*) = -\frac{1}{\lambda_k^n}\left(\frac{d^n f}{dy^n}, v_k^*\right) = \frac{1}{\lambda_k^{2n}}\left(\frac{d^n f}{dy^n}, \frac{d^n v_k^*}{dy^n}\right) = \tag{9}$$

$$= \frac{1}{\lambda_k^{2n}}\left[\frac{d^n f}{dy^n}\,\frac{d^{n-1} v_k^*}{dy^{n-1}}\right]_{y=0}^{y=\delta} - \frac{1}{\lambda_k^{2n}}\left(\frac{d^{n+1} f}{dy^{n+1}}, \frac{d^{n-1} v_k^*}{dy^{n-1}}\right) = 0\left(\frac{1}{k^{n+1}}\right),$$

ecc.

2. - Consideriamo l'equazione

$$\sum_{\Sigma \alpha_j = m} a_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \frac{\partial^m w}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}} + \lambda_k^n w = \varphi_k(x) \tag{10}$$

con $m = 4m'$. Con notazioni attualmente in uso scriviamo

$$\sum_{|\alpha| = m} a_\alpha D_x^\alpha w + \lambda_k^n w = \varphi_k(x). \tag{10'}$$

Consideriamo il problema di Dirichlet: trovare una funzione w soluzione di (10) per $x \in B$ e tale che

$$D_x^\alpha w \,|_{x \in C} = 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq |\alpha| \leq 2m' - 1. \tag{11}$$

Indichiamo con H l'insieme delle funzioni indefinitamente differenziabili e nulle fuori di un compatto contenuto in B. Poniamo

$$(12)_j \qquad (f, g)_j = \int_B \sum_{|\alpha|=j} D_x^\alpha f(x)\overline{D_x^\alpha g(x)}dx, \qquad \| f \|_j^2 = (f, f)_j$$

per $j \geq 1$ e

$$(12)_0 \qquad (f, g)_0 = \int_B f(x)\overline{g(x)}dx, \qquad \| f \|_0^2 = (f, f)_0 .$$

Scritta la $\sum_{\Sigma \alpha_j = m} a_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_r^{\alpha_r}$ nella forma

$$\sum_{k_1, \dots, k_m = 1}^{r} a_{k_1 \dots k_m} \xi_{k_1} \dots \xi_{k_m}$$

dove i numeri reali $a_{k_1 \dots k_m}$ sono simmetrici in tutti i loro indici, poniamo

$$(13) \quad ((f, g)) = \int_B \sum a_{i_1 \dots i_{2m'}, j_1 \dots j_{2m'}} \frac{\partial^{2m'} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{2m'}}} \overline{\frac{\partial^{2m'} g}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{2m'}}}} dx$$

$$||| f |||^2 = ((f, f)).$$

Per risultati di Gårding[4]) si ha che:
esistono delle costanti positive c_{ij} tali che

$$(14) \qquad \| f \|_i \leq c_{ij} \| f \|_j, \qquad i \leq j;$$

esiste una costante positiva c tale che

$$(15) \qquad c^{-1} \| f \|_{2m'} \leq ||| f ||| \leq c \| f \|_{2m'} ;$$

chiudendo H rispetto alla norma $\| \; \|_j$ si ottiene uno spazio

---

4) L. GÅRDING, *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations*, Math. Scand. 1 (1953).

di Hilbert separabile H_j e riesce

$$H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots$$

Supponiamo allora $\varphi_k(x) \in C^\infty$ per $x \in B$ e $\|\varphi_k\|_{2m'} < +\infty$. Sappiamo che il problema omogeneo di Dirichlet per la (10) ha una sola soluzione $w_k \in H_{2m'}$. Ci proponiamo di valutare $w_k(x)$ per x fissato in B e per $k \to +\infty$ e $\|w_k\|_{2m'}$ per $k \to +\infty$, supponendo $\varphi_k(x) = 0(k^n)$ uniformemente su B. Da

$$\Big(\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D_x^\alpha w_k,\ w_k\Big)_0 = |||w_k|||^2 \ (^5)$$

segue

$$(16)\qquad |||w_k|||^2 + \lambda_k^n \|w_k\|_0^2 = (\varphi_k,\ w_k)_0 \leq \|\varphi_k\|_0 \|w_k\|_0$$

e quindi, per la (5) e per l'ipotesi su φ_k,

$$(17)\qquad \|w_k\|_0 = 0(1) \quad \text{per} \quad k \to +\infty.$$

Dalle (15) (16) e (17) segue l'esistenza di una costante positiva c tale che

$$(18)\qquad \|w_k\|^2_{2m'} < ck^n.$$

Facciamo ora alcune osservazioni sul comportamento asintotico di $w_k(x)$ e delle sue derivate, nell'ipotesi di $r < m$.

Indichiamo con $V(x, \xi)$ una soluzione fondamentale relativa all'operatore $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D_x^\alpha$ [6]). Fissiamo un insieme chiuso $\bar\Omega \subset B$. Si può coprire $\bar\Omega$ con un numero finito di sfere di raggio ε in modo che le sfere concentriche alle prime e di raggio 3ε appartengono a B.

Sia $\omega(x)$ una funzione di classe C^∞ in E_r tale che

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad \|x\| \leq 2\varepsilon \\ 0 & \text{»} \quad \|x\| \geq 3\varepsilon \end{cases}, \qquad \|x\| = \Big(\sum_1^r{}_j\, x_j^2\Big)^{1/2}.$$

---

[5]) w_k è il limite secondo la norma $\|\ \|_{2m'}$ di una successione di funzioni $w_{k\nu} \in H$; si ha

$$(\varphi_k - \lambda_k^n w_k,\ w_{k\nu})_0 = \Big(\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D_x^\alpha w_k,\ w_{k\nu}\Big)_0 = ((w_k,\ w_{k\nu}));$$

l'ultimo membro tende a $|||w_k|||^2$ e il primo a $(\varphi_k - \lambda_k^n w_k,\ w_k)_0 = \Big(\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D_x^\alpha w_k,\ w_k\Big)_0$.

[6]) F. JOHN, *The fundamental solution of linear Elliptic Differential Equations with Analytic coefficients*, Comm. pure appl. math., 3 (1950).

Fissato x in $\bar{\Omega}$, sia x_0 il centro della sfera di raggio ε cui appartiene x. Si ha

(19) $$w_k(x) = \int\limits_{\|\xi - x_0\| \leq 3\varepsilon} \omega(\xi - x_0) V(x, \xi) \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha D_\xi^\alpha w_k(\xi) d\xi -$$

$$- \int\limits_{2\varepsilon \leq \|\xi - x_0\| \leq 3\varepsilon} w_k(\xi) \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha D_\xi^\alpha [\omega(\xi - x_0) V(x, \xi)] d\xi.$$

Riesce

$$\left| D_x^\beta \int\limits_{2\varepsilon \leq \|\xi - x_0\| \leq 3\varepsilon} w_k(\xi) \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha D_\xi^\alpha [\omega(\xi - x_0) V(x, \xi)] d\xi \right| <$$

$$< \| w_k \|_0 \left(\int\limits_{2\varepsilon \leq \| x_0 - \xi \| \leq 3\varepsilon} \left(\sum_{|\alpha| = m} a_\alpha D_x^\beta D_\xi^\alpha [\omega(\xi - x_0) V(x, \xi)]\right)^2 d\xi \right)^{1/2}$$

qualunque sia $|\beta|$.

Per $\| x - \xi \| \to 0$ si ha

$$D_x^\alpha V(x, \xi) = 0(\| x - \xi \|^{m - r - \alpha}) = D_\xi^\alpha V(x, \xi)$$

oppure

$$D_x^\alpha V(x, \xi) = 0(\| x - \xi \|^{m - r - \alpha} lg \| x - \xi \|) = D_\xi^\alpha V(x, \xi).$$

Poichè $D_\xi^\alpha V(x, \xi)$ per $|\alpha| = 2m'$ è di quadrato sommabile nell'ipotesi di $r < m$, si ha

$$\left| \int\limits_{\|\xi - x_0\| \leq 3\varepsilon} \omega(\xi - x_0) V(x, \xi) \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha D_\xi^\alpha w_k(\xi) d\xi \right| =$$

$$= |((w_k, \omega V))| < c_1 \| w_k \|_{2m'} < c_2 k^{\frac{n}{2}}$$

Per $x \in \bar{\Omega}$ si ha perciò

(20) $$| w_k(x) | < c_\Omega k^{\frac{n}{2}}$$

per una conveniente costante positiva c_Ω dipendente da Ω.

Se $|\beta| \leq m-1$ poichè $\sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha D_x^\alpha w_k(x) = \varphi_k(x) - \lambda_k^n w_k(x)$, si ha

$$\left| D_\beta^x \int\limits_{\|\xi - x_0\| \leq 8\varepsilon} \omega(\xi - x_0) V(x, \xi) \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D_\xi^\alpha w_k(\xi) d\xi \right| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_{\|\xi - x_0\| \leq 8\varepsilon} \omega(\xi - x_0) \varphi_k(\xi) D_x^\beta V(x, \xi) d\xi \right| +$$

$$+ \lambda_k^n \left| \int\limits_{\|\xi - x_0\| \leq 8\varepsilon} \omega(\xi - x_0) w_k(\xi) D_x^\beta V(x, \xi) d\xi \right| < \begin{cases} ck^n & \text{per } |\beta| \leq 2m' \\ ck^{\frac{3n}{2}} & \text{»} \; 2m' < |\beta| \leq m-1 \end{cases}$$

tenendo presente la (17), l'ipotesi fatta su φ_k e osservando che $D_x^\beta V(x, \xi)$ è di quadrato sommabile se $|\beta| \leq 2m'$ e sommabile con una qualunque potenza di esponente $p < r/(r-1)$ se $|\beta| \leq m-1$.

Dunque per $x \in \bar{\Omega}$ si ha

$$(21) \qquad |D_x^\beta w_k(x)| < \begin{cases} c_\Omega k^n & \text{per} \quad |\beta| \leq 2m' \\ c_\Omega k^{\frac{3n}{2}} & \text{»} \quad 2m' < |\beta| \leq m-1 \end{cases}$$

per una conveniente costante positiva c_Ω dipendente da Ω.

3. - Torniamo ora al problema (2). È immediato che:

Se u (x, y) è una soluzione del problema omogeneo, $u \in H_{2m'}$, $x \in B$, per ogni $y \in I$, $|||u|||^2$ è sommabile su I, $\frac{\partial^k u}{\partial y^k}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, è assolutamente continua su $\bar{I}$ per ogni $x \in B$ e $\frac{\partial^k u}{\partial y^k} \frac{\partial^{n-k} u}{\partial y^{n-k}}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, e $\left(\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right)^2$ sono sommabili su $B \times I$, allora $u \equiv 0$. Infatti per quasi ogni $y \in I$ è $\left(\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right)^2$ sommabile su B; fissato $y \in I$, esiste una successione di funzioni $f_\nu \in H$ convergente ad u secondo la norma $\| \; \|_{2m'}$; si ha

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial y^n}, f_\nu\right)_0 = \Big(\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D_x^\alpha u, f_\nu\Big)_0 = ((u, f_\nu));$$

l'ultimo membro tende a $|||u|||^2$ e il primo a $\left(\frac{\partial^n u}{\partial y^n}, u\right)_0 =$ $= (\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D_x^\alpha u, u)_0$: perciò

$$\int_B u \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D_x^\alpha u dx = |||u|||^2.$$

Inoltre

$$\int_{B\times I} u \frac{\partial^n u}{\partial y^n} dxdy = - \int_B dx \int_0^\delta \left(\frac{\partial^{2n'+1} u}{\partial y^{2n'+1}}\right)^2 dy$$

$(n = 2(2n' + 1))$. Da

$$\int_I |||u|||^2 dy + \int_B dx \int_0^\delta \left(\frac{\partial^{2n'+1} u}{\partial y^{2n'+1}}\right)^2 dy = 0$$

segue l'affermazione.

Supponiamo ora $f_{0j} = f_{1j} = 0$ e $r < m$. Si può applicare il metodo di Fourier.

Sia $\{v_k^*(y)\}$ la successione delle autofunzioni normalizzate di (3)-(4). Sia $z_{kj}(x)$ soluzione del problema

$$(22) \quad \begin{cases} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D_x^\alpha z + \lambda_k^n z = 0 & \text{per} \quad x \in B \\ \left(\frac{d^l z}{d\nu^l}\right)_{x\in C} = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad l = j \\ 0 & \text{»} \quad l \neq j \end{cases}, & j = 0, 1, \dots, \frac{m}{2} - 1, \end{cases}$$

essendo ν la normale a C diretta verso B.

Allora il problema (2) è formalmente risolto da

$$(23) \qquad u(x, y) = \sum_{1}^{\infty}{}_k \sum_{0}^{\frac{m}{2}-1}{}_j \; z_{kj}(x) \int_0^\delta v_k^*(\eta) g_j(\eta) d\eta \, v_k^*(y).$$

Se $\bar{B}$ è di classe $A^{6m'+1} (m = 4m')$, cioè se C è suscettibile di una rappresentazione parametrica di classe $C^{6m'+1}$, allora esiste almeno una funzione γ_j tale che $\gamma_j \in C^\infty$ per $x \in B$ e

$\gamma_j \in C^{6m'}$ per $x \in \bar{B}$ tale che

$$\left(\frac{d^l\gamma_j}{dy^l}\right)_{x\in C} = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad l = j \\ 0 & \text{»} \quad l \neq j \end{cases}, \qquad j = 0, 1, \ldots, 2m' - 1 \text{ (7)}.$$

Posto

$$z = w + \gamma_j$$

il problema (22) si riduce al problema omogeneo di Dirichlet per l'equazione

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D_x^\alpha w + \lambda_k^* w = -\left(\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D_x^\alpha \gamma_j + \lambda_k^* \gamma_j\right).$$

Se $g_j(y) \in C^n$ per $y \in \bar{I}$ e $\left.\frac{\partial^k g_j}{\partial y^k}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial^k g_j}{\partial y^k}\right|_{y=\delta} = 0$ per $k = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1$, si ha da (23)

$$(24) \qquad u(x, y) = \sum_0^{2m'-1}{}_j \; g_j(y)\gamma_j(x) +$$

$$+ \sum_0^{2m'-1}{}_j \; \sum_1^{\infty}{}_k \; w_{kj}(x) \int_0^\delta v_k^*(\eta) g_j(\eta) d\eta \, v_k^*(y).$$

Se B è di classe $A^{6m'+1}$ e $(g_j, v_k^*) = O\left(\frac{1}{k^{n+1}}\right)$ per $k \to +\infty$, la (24) è soluzione debole del problema (2).

Per ogni h si ha

$$u_{hj}(x, y) = \sum_1^h{}_k \; w_{kj}(x)(g_j, v_k^*) v_k^*(y) \in H_{2m'}.$$

Provando allora che la successione $\{u_{hj}(x, y)\}$, $h = 1, 2, \ldots$, converge secondo la norma $\| \ \|_{2m'}$ per ogni $y \in I$, resta pro-

---

7) Cfr. per es. C. MIRANDA, ***Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico***, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete (1955) 36-39.

vato che il limite $u_j(x, y) \in H_{2m'}$ e perciò si annulla insieme alle sue derivate d'ordine $\leq \frac{m}{2} - 1$, in senso variazionale, su C.

E infatti è

$$\| u_{\mu j} - u_{\nu j} \|_{2m'}^2 = \sum_{\mu+1}^{\nu}{}_{pq} \; v_p^*(y) v_q^*(y)(g_j, v_p^*)(g_j, v_q^*)(w_{pj}, w_{qj})_{2m'}.$$

Tenendo presente la (7), la (18)) e l'ipotesi fatta su (g^j, v_k^*), si ha

$$\lim_{\mu, \nu \to \infty} \| u_{\mu j} - u_{\nu j} \|_{2m'} = 0.$$

Dalle (7) e (8) segue subito che sono soddisfatte le condizioni richieste per $y = 0$, $y = \delta$.

È

$$\lim_{h,k \to \infty} \left[\int_I ((u_{hj} - u_{kj}, f))dy + \int_{B \times I} \frac{\partial^{\frac{n}{2}}(u_{hj} - u_{kj})}{\partial y^{\frac{n}{2}}} \frac{\partial^{\frac{n}{2}} f}{\partial y^{\frac{n}{2}}} \, dxdy \right] = 0$$

per ogni $f(x, y)$ definita su $B \times I$ e tale che $\| f \|_{2m'}^2$ è sommabile su I e $\left(\frac{\partial^{\frac{n}{2}} f}{\partial y^{\frac{n}{2}}} \right)^2$ è sommabile su $B \times I$; se inoltre $f \in H_{2m'}$ per ogni $y \in I$, $\frac{\partial^k f(x, 0)}{\partial y^k} = \frac{\partial^k f(x, \delta)}{\partial y^k} = 0$ per $k = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1$, si ha

$$\int_{B \times I} f \left\{ \left(\sum_{|\alpha| = m} a_\alpha D_x^\alpha - \frac{\partial^n}{\partial y^n} \right) \sum_0^{2m'-1}{}_j \, (g_j \gamma_j + u_{hj}) \right\} dxdy =$$

$$= \int_I ((\sum_0^{2m'+1}{}_j \, (g_j \gamma_j + u_{hj}), f))dy + \int_{B \times I} \frac{\partial^{\frac{n}{2}} \sum_0^{2m'-1}{}_j \, (g_j \gamma_j + u_{hj})}{\partial y^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{\partial^{\frac{n}{2}} f}{\partial y^{\frac{n}{2}}} dxdy =$$

$$= \sum_0^{2m'-1}{}_j \left\{ \int_I [g_j - \sum_1^h{}_k \, (g_j, v_k^*) v_k^*]((\gamma_j, f))dy + \int_I \left[\sum_1^h{}_k \left(\frac{d^n g_j}{dy^n}, v_k^* \right) v_k^* - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{d^n g_j}{dy^n} \right] (\gamma_j, f)_0 dy \right\} \xrightarrow[h \to \infty]{} 0.$$

Pertanto $u(x, y)$ è soluzione del problema nel senso che

$$\int_I ((u, f))dy + \int_{B \times I} \frac{\partial^{\frac{n}{2}} u}{\partial y^{\frac{n}{2}}} \frac{\partial^{\frac{n}{2}} f}{\partial y^{\frac{n}{2}}} dxdy = 0$$

per ogni f del tipo specificato. Essa assume i dati assegnati su $C \times I$ in senso variazionale per ogni $y \in I$ e in senso ordinario i dati per $y = 0$ e $y = \delta$ per ogni $x \in B$.

L'unicità della soluzione debole del problema omogeneo segue dall'ultima formola scritta ponendo u al posto di f.