RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

RENATO ZANOVELLO

Sul metodo di Runge-Kutta per l'equazione differenziale $y' = f(x,y)$

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 30 (1960), p. 349-360

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1960__30__349_0>

SUL METODO DI RUNGE-KUTTA PER L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE $y' = f(x, y)$

Nota (*) *di* RENATO ZANOVELLO (*a Padova*)

Il metodo di Runge-Kutta [1]), come noto, dà una valutazione approssimata delle soluzioni dell'equazione differenziale ordinaria:

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

E cioè, se la (1) ammette l'unica soluzione $y = y(x)$ tale che $y(x_0) = y_0$, viene assunto come valore approssimato di $y(x_0 + h)$ (dove non è restrittivo supporre, come farò nel seguito, h positivo), il numero $y_0 + K$, dove:

$$K = \frac{h}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] \tag{2}$$

e

$$\begin{cases} K_1 = f(x_0, y_0) \\ K_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{hK_1}{2}\right) \\ K_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{hK_2}{2}\right) \\ K_4 = f(x_0 + h, y_0 + hK_3) \end{cases} \tag{3}$$

(*) Pervenuta in Redazione il 17 ottobre 1960.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

1) RUNGE-KÖNIG, *Numerisches Rechnen*, Springer, Berlin 1924, pagg. 286-295.

La giustificazione del metodo consiste nel fatto che nello sviluppo di $\varepsilon = y(x_0 + h) - y_0 - K$ secondo le potenze di h, non figurano i termini contenenti potenze inferiori ad h^5.

Una determinazione rigorosa e semplice dell'*errore* effettivamente commesso è stata realizzata da Bieberbach in una sua memoria [2]), lavoro che nel seguito io indicherò con B., col seguente:

TEOREMA: *se la funzione $f(x, y)$ e le sue derivate fino al quarto ordine incluso, definite in un dominio D: ($|x - x_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$) sono ivi continue, ad un sol valore e se M ed N sono numeri positivi tali che in D:*

$$(4) \qquad |f(x\ y)| \leq N \quad , \quad \left| \frac{\partial^l f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right| \leq \frac{M}{N^{j-1}} \quad (0 < l \leq 4)$$

e che

$$(5) \qquad aN \leq b \quad , \quad aM \leq 1$$

allora, in $|x - x_0| \leq a$, si ha:

$$|\varepsilon| \leq h^5 MN \frac{M^4 - 1}{M - 1} 5{,}37$$

Mi sono proposto in questo lavoro:

---

2) L. BIEBERBACH, ***On the remainder of the Runge-Kutta formula in the theory of ordinary differential equations***, Z. angew. Math. Phys. Bd. 2, 1951, pagg. 233-248. In questo lavoro tratta addirittura il caso del sistema di n equazioni differenziali ordinarie normali. Per quello che riguarda gli enunciati dei risultati, si possono anche vedere:

L. COLLATZ, ***Numerische Behandlung von Differentialgleichungen***, 2ª ed. Springer, Berlin 1955, pagg. 59-68.

L. BIEBERBACH, ***Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen im reellen Gebiet***, Springer, Berlin 1956, pagg. 71-73.

Un altro studio dell'errore, in ipotesi totalmente diverse, si trova in:

J. W. CARR III: ***Error bounds for the Runge-Kutta single step integration process***, Journal of the ACM 5 (1958), pagg. 39-44.

I°) dare una valutazione dell'errore $|\varepsilon|$ quando si voglia sostituire alle (4) le:

$$(6) \qquad |f(x, y)| \leq M_1 \quad , \quad \left|\frac{\partial^l f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}\right| \leq M_1 \qquad (0 < l \leq 4)$$

e togliere contemporaneamente le condizioni (5):

II°) garantire la possibilità di effettuare l'iterazione quante volte si vuole del metodo di Runge-Kutta per il calcolo di $y(x_0 + h)$ e calcolare l'errore che viene così commesso.

Ho risolto questi due problemi, aggiungendo alle ipotesi (6) e a quella dell'esistenza e continuità delle derivate di $f(x, y)$ fino al quarto ordine, anche l'esistenza e la continuità delle derivate di $f(x, y)$ fino all'ottavo ordine incluso. (Presumibilmente queste ultime ipotesi sono sovrabbondanti).

1. - In questo numero darò una valutazione dell'*errore* $|\varepsilon|$, nelle ipotesi che la $f(x, y)$ e le sue derivate fino al quarto ordine incluso siano continue in tutta la striscia S: $(|x - x_0| \leq a, \; -\infty < y < +\infty)$ e che quivi valgano le:

$$(7) \qquad |f(x, y)| \leq M \quad , \quad \left|\frac{\partial^l f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}\right| \leq M \quad (0 < l \leq 4)$$

Poichè la $f'_y(x, y)$ è limitata in S, ne segue che la funzione continua $f(x, y)$ è lipschitziana rispetto ad y in S e ciò m'assicura che in tutto l'intervallo I: $|x - x_0| \leq a$, esiste ed è unica la soluzione della (1), $y = y(x)$, verificante la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$.

Allora, ripetendo quanto fa il Bieberbach in B., ottengo:

$$(8) \quad |\varepsilon| \leq h^5 \left(\frac{2 \max\left|\frac{d^4 K_2}{dh^4}\right| + 2 \max\left|\frac{d^4 K_3}{dh^4}\right| + \max\left|\frac{d^4 K_4}{dh^4}\right|}{6.24} + \frac{\max\left|\frac{d^4 f}{dx^4}\right|}{120} \right)$$

$$(0 < h = x - x_0 \leq a)$$

Per effettuare una maggiorazione dei massimi che compaiono a secondo membro nella (8), mi servirò delle formule di B., che danno le espressioni delle derivate di K_2, K_3, K_4, $f(x, y(x))$. Data la lunghezza di tali formule, ho ritenuto opportuno di non riportarle e di rimandare a prenderne visione direttamente nel lavoro originale del Bieberbach. Ho intanto:

$$|K_i| \leq M \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{9}$$

e tenendo conto delle (7) e (9) per le formule (21) di B., ho anche subito:

$$\left|\frac{d^iK_2}{dh^i}\right| \leq M\left(\frac{1+M}{2}\right)^i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{10}$$

Sfruttando le disuguaglianze finora ottenute e tenendo conto delle (22) di B., ricavo, come si può verificare facilmente:

$$\left|\frac{d^i(K_2h)}{dh^i}\right| \leq M\left(\frac{1+M}{2}\right)^{i-1}\left[i + \frac{1+M}{2}\alpha\right] \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{11}$$

Analogamente, tenendo conto delle (7) e (11), per le formule (23) di B., ottengo:

$$\left|\frac{d^iK_3}{dh^i}\right| \leq \frac{M}{2^i}\left\{1 + (1+M)^i\left[i + \frac{1+M}{2}\alpha\right]^i\right\} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{12}$$

Dalle (24) di B., sfruttando le (9) e (12), ricavo:

$$\left|\frac{d^i(K_3h)}{dh^i}\right| \leq \frac{M}{2^{i-1}}\left(i + \frac{\alpha}{2}\right)\left\{1 + (1+M)^i\left|i + \frac{1+M}{2}\alpha\right|^i\right\} \tag{13}$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

Così procedendo, ottengo dalle (25) di B., tenendo conto delle

(7) e (13), la:

$$(14)\qquad \begin{aligned}\left|\frac{d^4K_4}{dh^4}\right| \leq\; & M\left\{1+M\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\left[1+(1+M)\left(1+\frac{1+M}{2}\alpha\right)\right]\right\}^4 + \\ & + 3M^2\left(2+\frac{\alpha}{2}\right)\left\{1+(1+M)^2\left[2+\frac{1+M}{2}\alpha\right]^2\right\}\left\{1+\right. \\ & \left. + M\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\left[1+(1+M)\left(1+\frac{1+M}{2}\alpha\right)\right]\right\}^2 + \\ & + M^2\left(3+\frac{\alpha}{2}\right)\left\{1+(1+M)^3\left[3+\frac{1+M}{2}\alpha\right]^3\right\}\left\{1+\right. \\ & \left. + M\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\left[1+(1+M)\left(1+\frac{1+M}{2}\alpha\right)\right]\right\} + \\ & + \frac{3}{4}M^3\left(2+\frac{\alpha}{2}\right)^2\left\{1+(1+M)^2\left[2+\frac{1+M}{2}\alpha\right]^2\right\}^2 + \\ & + \frac{M^2}{8}\left(4+\frac{\alpha}{2}\right)\left\{1+(1+M)^4\left[4+\frac{1+M}{2}\alpha\right]^4\right\}.\end{aligned}$$

dove in tutte le precedenti disuguaglianze, α va inteso il maggiore tra i numeri 1 ed a.

Osservo che per poter dare le espressioni abbastanza semplici (12), (13) sono stato costretto a sostituire volta per volta alle espressioni che si ottenevano per maggiorare i loro primi membri, delle quantità notevolmente maggiori. Il non fare questo, mi avrebbe praticamente impedito di effettuare il calcolo, dato che il numero dei termini delle espressioni che via via s'incontrano, cresce molto rapidamente.

Così, facilmente, ho stabilito la:

$$(15)\qquad \left|\frac{d^4f}{dx^4}\right| \leq M + 15M + 50M^3 + 60M^4 + 24M^5$$

Tenendo conto delle (10), (12), quando $i=4$, e delle (14), (15), ottengo dalla (8) la:

$$(16)\qquad |\varepsilon| \leq Ah^5$$

dove:

$$
\begin{aligned}
A = {} & \frac{\frac{M}{2^3}(1+M)^4 + \frac{M}{2^3}\Big\{1+(1+M)^4\Big[4+\frac{1+M}{2}\alpha\Big]^4\Big\}+}{6.24} \\
& \underline{+M\Big\{1+M\Big(1+\frac{\alpha}{2}\Big)\Big[1+(1+M)\Big(1+\frac{1+M}{2}\alpha\Big)\Big]\Big\}^4+} \\
& \underline{+3M^2\Big(2+\frac{\alpha}{2}\Big)\Big\{1+(1+M)^2\Big[2+\frac{1+M}{2}\alpha\Big]^2\Big\}\Big\{1+M\Big(1+} \\
& \underline{+\frac{\alpha}{2}\Big)\Big[1+(1+M)\Big(1+\frac{1+M}{2}\alpha\Big)\Big]\Big\}^2+M^2\Big(3+\frac{\alpha}{2}\Big)\Big\{1+} \\
& \underline{+(1+M)^3\Big[3+\frac{1+M}{2}\alpha\Big]^3\Big\}\Big\{1+M\Big(1+\frac{\alpha}{2}\Big)\Big[1+(1+M)\Big(1+} \\
& \underline{+\frac{1+M}{2}\alpha\Big)\Big]\Big\}+\frac{3M^3}{4}\Big(2+\frac{\alpha}{2}\Big)^2\Big\{1+(1+M)^2\Big[2+\frac{1+M}{2}\alpha\Big]^2\Big\}^2+} \\
& \underline{+\frac{M^2}{8}\Big(4+\frac{\alpha}{2}\Big)\Big\{1+(1+M)^4\Big[4+\frac{1+M}{2}\alpha\Big]^4\Big\}}+ \\
& +\frac{M+15M^2+50M^3+60M^4+24M^5}{120}
\end{aligned}
$$

Faccio notare, perchè essenziale per il procedimento usato nel prossimo numero, che A non dipende dal punto iniziale (x_0, y_0), bensì soltanto da M ed α.

2. - Mantenendo le stesse ipotesi del numero precedente sulla $f(x, y)$, espongo ora una valutazione dell'errore che si ottiene applicando il metodo di Runge-Kutta iteratamente.

A tale scopo, divido l'intervallo $(x_0, x_0 + h)$ in n parti che suppongo uguali tra loro e pongo $x_r = x_0 + r\frac{h}{n}$, $(r = 1, 2, \ldots n)$.

Detta $y = y(x)$ la soluzione della (1), verificante la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$, pongo $y_r = y(x_r)$, $(r = 1, 2, \dots n)$, $(y_1 = \bar{y}_1)$. Determino con la formula di Runge-Kutta il valore approssimato di $y(x_1)$, che indico con y_1'. Considero poi la soluzione della (1) che nel punto x_1 vale y_1'. La curva rappresentativa di tale soluzione incontra la retta $x = x_2$ in un punto di ordinata $\bar{y}_2$; riapplico la formula di Runge-Kutta per calcolare il valore approssimato y_2' di $\bar{y}_2$.
Di nuovo, prendo in considerazione la soluzione della (1) che nel punto x_2 vale y_2'. La curva rappresentativa di questa soluzione incontra la retta $x = x_3$ in un punto avente ordinata $\bar{y}_3$ e sia, analogamente a quanto fatto in precedenza, y_3' il valore approssimato di $\bar{y}_3$; e così procedo fino ad arrivare al punto $x_n = x_0 + h$.

Pongo $\omega_r = y_r - \bar{y}_r$ $(r = 1, 2, \dots n)$. Chiamo *errore* in x_r $(r = 1, 2, \dots n)$ relativo alla curva integrale $y = y(x)$ verificante la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$, il valore $| \varepsilon_r + \omega_r |$, ove $\varepsilon_r = \bar{y}_r - y_r'$. Ora dò una maggiorazione di tali errori $| \varepsilon_r + \omega_r |$.

È evidente che in x_1, per la (16) e poichè $\omega_1 = 0$, l'errore è:

$$| \varepsilon_1 | \leq A \left(\frac{h}{n} \right)^5$$

Inoltre, ancora per la (16), è:

$$| \varepsilon_2 | \leq A \left(\frac{h}{n} \right)^5$$

mentre, per i noti teoremi [3]) sulla dipendenza continua delle soluzioni dai valori iniziali, ricaverei per ω_2:

$$| \omega_2 | \leq | y_1 - y_1' | \, e^{H\frac{h}{n}} = | \varepsilon_1 | \, e^{H\frac{h}{n}} \leq A \left(\frac{h}{n} \right)^5 e^{H\frac{h}{n}}$$

---

[3]) G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte I, Zanichelli, Bologna 1948, pagg. 27-31.

dove H $(H > 0)$ è la costante di Lipschitz, relativa alla $f(x, y)$, rispetto ad y; cosicchè è:

$$|\varepsilon_2 + \omega_2| \leq |\varepsilon_2| + |\omega_2| \leq A\left(\frac{h}{n}\right)^5 \left|1 + e^{H\frac{h}{n}}\right|$$

Osservando ancora che per la (16) è:

$$|\varepsilon_3| \leq A\left(\frac{h}{n}\right)^5$$

e che inoltre, sempre per i teoremi sulla dipendenza continua delle soluzioni dai valori iniziali, ricaverei per ω_3:

$$|\omega_3| \leq |y_2 - y_2'|\, e^{H\frac{h}{n}} = |\varepsilon_2 + \omega_2|\, e^{H\frac{h}{n}} \leq A\left(\frac{h}{n}\right)^5 \left[1 + e^{H\frac{h}{n}}\right] e^{H\frac{h}{n}} =$$

$$= A\left(\frac{h}{n}\right)^5 \left[e^{H\frac{h}{n}} + e^{2H\frac{h}{n}}\right]$$

ottengo:

$$|\varepsilon_3 + \omega_3| \leq |\varepsilon_3| + |\omega_3| \leq A\left(\frac{h}{n}\right)^5 \left[1 + e^{H\frac{h}{n}} + e^{2H\frac{h}{n}}\right].$$

Così procedendo, ricavo:

$$|\varepsilon_n + \omega_n| \leq |\varepsilon_n| + |\omega_n| \leq A\left(\frac{h}{n}\right)^5 \left[1 + e^{H\frac{h}{n}} + \ldots + e^{(n-1)H\frac{h}{n}}\right]$$

cioè:

$$(17) \qquad |\varepsilon_n + \omega_n| \leq A\frac{h^5}{n^5} \frac{e^{Hh} - 1}{e^{H\frac{h}{n}} - 1}$$

Come si vede facilmente passando al limite per $n \to +\infty$, il valore del secondo membro della (17) tende a zero e, al crescere di n, l'approssimazione cresce assai rapidamente. Infatti è:

$$\lim_{n \to +\infty}\left[\frac{1}{n} \cdot \frac{e^{Hh} - 1}{e^{H\frac{h}{n}} - 1}\right] = \frac{e^{Hh} - 1}{Hh}, \qquad \lim_{h \to 0}\left[\frac{1}{n} \cdot \frac{e^{Hh} - 1}{e^{H\frac{h}{n}} - 1}\right] = 1;$$

e quindi risulta che l'errore viene valutato con l'approssimazione dell'ordine di $\frac{h^5}{n^4}$, il che è perfettamente analogo a quanto avviene nella formula d'approssimazione di SIMPSON, per il calcolo degli integrali definiti.

3. - Suppongo ora che $f(x, y)$ sia definita, anzichè in una striscia, nel *rettangolo R*, contorno compreso, definito dalle limitazioni: $(|x - x_0| \leq a, \ -d \leq y \leq d)$, $(d > 0)$; ivi essa sia continua assieme alle sue derivate fino all'ottavo ordine incluso. Suppongo ulteriormente che la soluzione della (1), $y = y(x)$, verificante la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$, sia tutta contenuta in R. Ora, in tali ipotesi, se applico il metodo di Runge-Kutta al calcolo di $y(x_0 + h)$, $0 < h \leq a$, il numero Ah^5 dato dalla formula (16) risulta essere, di solito, molto grande, cosicchè per ottenere una migliore valutazione dell'errore, s'impone l'applicazione del procedimento d'iterazione. Però anche questo procedimento potrebbe non essere applicabile perchè già al primo passo del procedimento stesso, potrebbe darsi di pervenire ad un punto $(x_0 + \frac{h}{n}, y_1')$, che sta fuori del rettangolo R e ciò non mi consentirebbe di procedere ulteriormente.

Ora le ipotesi di esistenza delle derivate continue fino all'ottavo ordine incluso sulla $f(x, y)$, mi permettono di prolungare questa funzione in tutta la striscia S: $(|x - x_0| \leq a$, $-\infty < y < +\infty)$ in modo da poter applicare il procedimento d'iterazione dato nel n. 2. Infatti, per effettuare un siffatto prolungamento, posso procedere, per esempio, come dico nel seguito. Posto.

$$a_{00}(x) = f(x, d),$$

$$a_{ij}(x) = \left[\frac{\partial^{i+j} f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}\right]_{y=d} \qquad (i \geq 0, \ j > 0, \ 0 < i + j \leq 8)$$

considero per $y \geq d$ la seguente funzione continua $(a_{0j} = a_{0j}(x))$:

$$(18) \qquad \varphi(x, y) = a_{00} + a_{01}d\frac{y-d}{y} + \frac{a_{02}d^2 + 2a_{01}d}{2}\frac{(y-d)^2}{y^2} + \\ + \frac{a_{03}d^3 + 6a_{02}d^2 + 6a_{01}d}{6}\frac{(y-d)^3}{y^3} + \\ + \frac{a_{04}d^4 + 12a_{03}d^3 + 36a_{02}d^2 + 24a_{01}d}{24}\frac{(y-d)^4}{y^4}.$$

Essa coincide per $y = d$ $(x \in I)$ con la funzione $f(x, y)$ calcolata nello stesso punto. Inoltre le sue derivate fino al quarto ordine, calcolate per $y = d$ $(x \in I)$ coincidono, come si prova col calcolo, con le corrispondenti derivate della $f(x, y)$ calcolate nello stesso punto. La funzione $\varphi(x, y)$ è inoltre limitata per ogni $y \geq d$, poichè le $a_{ij}(x)$ sono funzioni continue definite nell'intervallo chiuso e limitato I e limitate sono pure le funzioni $\left(\frac{y-d}{y}\right)^n$ $(n = 1, \dots 4)$ in quanto funzioni continue per $y \geq d$ e convergenti al valore 1 quando y tende a $+\infty$. Di più, anche le derivate delle funzioni $\left(\frac{y-d}{y}\right)^n$ sono limitate per ogni $y \geq d$: anch'esse infatti sono funzioni continue per $y \geq d$ ed è $\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{d^k}{dy^k}\left(\frac{y-d}{y}\right)^n = 0$, $(k = 1, 2, \dots n)$. Posso allora concludere che la $\varphi(x, y)$ è limitata assieme alle sue derivate fino al quarto ordine incluso in tutta la *semistriscia*: $(|x - x_0| \leq a,\ d \leq y < +\infty)$. È ovvio inoltre che le derivate della $\varphi(x, y)$ sono funzioni continue in detta semistriscia.

Mi propongo ora di dare una valutazione della limitazione di $\varphi(x, y)$ e delle sue derivate. È infatti:

$$(19) \qquad |\varphi(x, y)| \leq |a_{00}| + |a_{01}|\, d\left(1 + \frac{d}{y}\right) + \frac{|a_{02}|\, d^2 + 2\,|a_{01}|\, d}{2}\left(1 + \right. \\ \left. + \frac{2d}{y} + \frac{d^2}{y^2}\right) + \frac{|a_{03}|d^3 + 6|a_{02}|d^2 + 6|a_{01}|d}{6}\left(1 + \frac{3d}{y} + \frac{3d^2}{y^2} + \right. \\ \left. + \frac{d^3}{y^3}\right) + \frac{|a_{04}|d^4 + 12|a_{03}|d^3 + 36|a_{02}|d^2 + 24|a_{01}|d}{24}\left(1 + \right. \\ \left. + \frac{4d}{y} + \frac{6d^2}{y^2} + \frac{4d^3}{y^3} + \frac{d^4}{y^4}\right).$$

La funzione $f(x, y)$ e le sue derivate, data la loro continuità in R, sono ivi limitate; ne segue che c'è una costante M_1, tale che la $f(x, y)$ e le sue derivate fino all'ottavo ordine incluso, siano in modulo minori od uguali di M_1, per ogni coppia di valori x, y di R. Inoltre le funzioni $\frac{ld^n}{y^n}$, dove l è una costante, sono funzioni monotone decrescenti che assumono il valore massimo per $y = d$. Sostituendo perciò nella (19 M_1 al posto di $|a_{0j}|$ $(j = 0, 1, \dots, 4)$ e d al posto di y, dopo aver raccolto i termini simili, ottengo per ogni coppia di valori x, y $(x \in I,\ y \geq d)$:

$$|\varphi(x, y)| \leq (d^4 + 10d^3 + 34d^2 + 30d + 1)M_1. \tag{20}$$

Inoltre, ragionando allo stesso modo sulle derivate della $\varphi(x, y)$, vedo che le funzioni:

$$\left.\begin{array}{l}
|\varphi'_x(x, y)|,\ |\varphi''_{x^2}(x, y)|,\ |\varphi'''_{x^3}(x, y)|,\ |\varphi^{(\mathrm{IV})}_{x^4}(x, y)| \text{ sono tutte} \\
\qquad\qquad \leq (d^4 + 10d^3 + 34d^2 + 30d + 1)M_1 \\
|\varphi'_y(x, y)|,\ |\varphi''_{xy}(x, y)|,\ |\varphi'''_{x^2y}(x, y)|,\ |\varphi^{(\mathrm{IV})}_{x^3y}(x, y)| \text{ sono tutte} \\
\qquad\qquad \leq (2d^3 + 18d^2 + 62d + 49)M_1 \\
|\varphi''_{y^2}(x, y)|,\ |\varphi'''_{xy^2}(x, y)|,\ |\varphi^{(\mathrm{IV})}_{x^2y^2}(x, y)| \text{ sono tutte} \\
\qquad\qquad \leq \left(5d^2 + 62d + 209 + \frac{160}{d}\right)M_1 \\
|\varphi'''_{y^3}(x, y)|,\ |\varphi^{(\mathrm{IV})}_{xy^3}(x, y)| \text{ sono tutte} \\
\qquad\qquad \leq \left(22d + 289 + \frac{960}{d} + \frac{720}{d^2}\right)M_1 \\
|\varphi^{(\mathrm{IV})}_{y^4}(x, y)| \quad \text{è} \quad \leq \left(129 + \frac{1680}{d} + \frac{5520}{d^2} + \frac{4080}{d^3}\right)M_1
\end{array}\right. \tag{21}$$

Da ciò segue che per ogni $y \geq d$ $(x \in I)$, la $\varphi(x, y)$ e le sue derivate fino al quarto ordine incluso, sono in modulo minori od uguali del maggior valore tra quelli a secondo membro nella (20) e nelle (21), valore che indico con M'.

Analogamente, posto:

$$(22)\quad \psi(x, y) = b_{00} - b_{01} d \frac{y+d}{y} + \frac{b_{02}d^2 - 2b_{01}d}{2} \frac{(y+d)^2}{y^2} + $$
$$+ \frac{-b_{03}d^3 + 6b_{02}d^2 - 6b_{01}d}{6} \frac{(y+d)^3}{y^3} + $$
$$+ \frac{b_{04}d^4 - 12b_{03}d^3 + 36b_{02}d^2 - 24b_{01}d}{24} \frac{(y+d)^4}{y^4}$$

ove

$$b_{00}(x) = f(x, -d), \quad b_{ij}(x) = \left[\frac{\partial^{i+j} f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}\right]_{y=-d}$$
$$(i \geq 0, \ j \geq 0, \ 0 < i + j \leq 8)$$
$$(b_{0j} = b_{0j}(x))$$

nella *semistriscia*: $(|x - x_0| \leq a, \ -\infty < y \leq -d)$, ottengo gli stessi risultati di prima espressi dalle (20), (21), quando si sostituisca $\psi(x, y)$ alla funzione $\varphi(x, y)$.

Considero ora la funzione

$$F(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y) & \text{per } y \geq d \\ f(x, y) & \text{in } R \\ \psi(x, y) & \text{per } y \leq -d \end{cases}$$

$F(x, y)$ risulta essere in S continua, limitata ed avente derivate continue e limitate fino al quarto ordine incluso. In tali ipotesi posso perciò applicare i risultati del n. 2. Osservo che per $F(x, y)$ dovrò prendere come numero M il maggiore tra M_1 ed M'.