RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

UGO BARBUTI

Sulla teoria della migliore approssimazione nel senso di Tchebychev. Nota II

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 30 (1960), p. 302-308

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1960__30__302_0>

SULLA TEORIA DELLA MIGLIORE APPROSSIMAZIONE NEL SENSO DI TCHEBYCHEV

Nota II (*) *di* UGO BARBUTI (*a Pisa*)

Denotiamo ancora con S uno spazio topologico di Hausdorff compatto, con $\mathfrak{T}$ un sottospazio dello spazio di Banach $\mathfrak{C}$ delle funzioni reali e continue su S. Se $f(x) \in \mathfrak{C}$ e se $\tau(x) \in \mathfrak{T}$ indica una funzione (supposta esistente) di minima deviazione da $f(x)$ e μ lo scarto, nella precedente nota [1]) abbiamo provato, con il teor. 2, una proposizione la quale conduce a limitazioni per i valori assunti da $f(x)$ negli insiemi:

(1) $E_f^+(\tau) = \{ x : f(x) - \tau(x) = \mu \}$, $E_f^-(\tau) = \{ x : f(x) - \tau(x) = -\mu \}$ [2])

Da essa abbiamo derivato varie e significative proprietà delle funzioni τ. Di tale proposizione vogliamo, con questa seconda nota, trarre qualche altra conseguenza, provando tra l'altro, un teorema d'invarianza degli insiemi (1) rispetto alle funzioni τ nel caso di non unicità e nella ipotesi che le funzioni τ siano una varietà lineare di dimensione finita.

(*) Pervenuta in Redazione il 18 agosto 1960.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Pisa.

[1]) U. BARBUTI, *Sulla teoria della migliore approssimazione nel senso di Tchebychev*, « Rend. del Seminario Mat. della Università di Padova », v. XXX, parte prima (1960), pp. 82-96. Denoteremo nel seguito col simbolo [I] questa nota.

[2]) Considereremo anche l'insieme $E_f(\tau) = E_f^+(\tau) \cup E_f^-(\tau)$.

1. - Una conseguenza del teor. 2 di [I] è la seguente proposizione:

Teor. A

Se $f(x) \backsim \tau(x)$ in $\mathfrak{S}$, con lo scarto $\mu \neq 0$ e se $\mathfrak{S}$ contiene le costanti, allora è possibile trovare un $x' \in E_f^+(\tau)$ e un $x'' \in E_f^-(\tau)$ tali che:

$$f(x') - f(x'') \geq 2\mu \tag{2}$$

e conseguentemente l'oscillazione della $f(x)$ su $E_f(\tau)$ è maggiore od eguale a 2μ.

Si è infatti provato col teor. 2 che, nelle nostre ipotesi, fissato un qualunque σ tale che $0 < \sigma < \mu$, non può accadere che sia

$$f(x) \leq \sigma \quad \text{per ogni} \quad x \in E_f^+(\tau) \tag{3}$$

e simultaneamente

$$f(x) \geq \sigma \quad \text{per ogni} \quad x \in E_f^-(\tau). \tag{4}$$

Se allora consideriamo una qualunque successione $\{\sigma_n\}$ di numeri positivi, crescente e avente per limite μ, le (3) e (4) non potranno simultaneamente valere per ciascun σ_n; esisterà dunque, per ogni σ_n, almeno un x_n, appartenente ad almeno uno degli insiemi (1), per cui sarà:

$$f(x_n) > \sigma_n \quad \text{se} \quad x_n \in E_f^+(\tau) \tag{5}$$

oppure

$$f(x_n) < -\sigma_n \quad \text{se} \quad x_n \in E_f^-(\tau). \tag{6}$$

Poichè S è separato e compatto, la successione $\{x_n\}$ ha almeno un punto d'aderenza ed essendo gli insiemi (1) chiusi ed $f(x)$ continua, le condizioni in disgiunzione (5), (6) conducono alla seguente proprietà: *esiste almeno un $x \in E_f^+(\tau)$ per il quale è:*

$$f(x) \geq \mu \tag{7}$$

oppure un $x \in E_f^-(\tau)$ *per il quale è*:

$$f(x) \leq -\mu. \tag{8}$$

Ciò posto, osserviamo che può sempre supporsi che il minimo m di $f(x)$ su $E_f^-(\tau)$ sia maggiore di $-\mu$, giacchè, se non lo fosse, potremo ragionare sulla funzione $g(x) = f(x) - - m - k$, con $0 < k < \mu$, la quale gode di questa proprietà e, contenendo $\mathfrak{S}$ le costanti, risulta:

$$g(x) \backsim \tau_1(x) = \tau(x) - m - k$$

con lo scarto μ, e inoltre:

$$E_g^+(\tau_1) = E_f^+(\tau) \quad , \quad E_g^-(\tau_1) = E_f^-(\tau) \text{ (}^3\text{)}.$$

In queste condizioni la (8) non può essere verificata: esisterà dunque almeno un $x' \in E_f^+(\tau)$ per il quale vale la (7). Per tale x', e preso $x'' \in E_f^-(\tau)$ e tale che $f(x'') = -k$, avremo:

$$f(x') - f(x'') \geq \mu + k.$$

Poichè k può prendersi prossimo quanto si vuole a μ e poichè $E_f^-(\tau)$ è chiuso ne viene, dalla precedente disuguaglianza, la (2) e il teor. A è provato.

2. - Proviamo ora il seguente

TEOR. B

Siano $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ ***elementi distinti di minima deviazione*** μ ***da*** $f(x)$ ***in*** $\mathfrak{S}$, ***linearmente indipendenti nel numero massimo*** k, ***e***, $\mathfrak{S}$ ***contenga le costanti, allora gli insiemi di punti di*** S $E_f^+(\tau)$, $E_f^-(\tau)$, ***relativi ad un qualunque elemento*** τ ***di minima deviazione, sono invarianti rispetto a*** τ ***e si ha***:

$$E_f^+(\tau) = \bigcap_{i \leq k} E_f^+(\tau_i) \quad , \quad E_f^-(\tau) = \bigcap_{i \leq k} E_f^-(\tau_i) \text{ (}^4\text{)}. \tag{9}$$

---

3) Cfr. in [I] a p. 88.

4) Per questa proposizione potremo ovviamente scrivere E_f^+, E_f^- in luogo di $E_f^+(\tau)$, $E_f^-(\tau)$, dipendendo questi insiemi unicamente da $f(x)$ e da $\mathfrak{S}$.

Basterà esaminare, ovviamente, solo il caso $\mu \neq 0$. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ k numeri reali e tali che:

$$\lambda_i \geq 0 \qquad (i \leq k), \qquad \sum_{i \leq k} \lambda_i = 1, \tag{10}$$

allora la funzione:

$$\tau' = \sum_{i \leq k} \lambda_i \tau_i \tag{11}$$

è elemento di minima deviazione [5]) da $f(x)$. Consideriamo allora gli insiemi $E_f^+(\tau')$, $E_f^-(\tau')$; se $x^0 \in E_f^+(\tau')$ si ha per la (11) e la seconda delle (10)

$$\mu = f(x^0) - \tau'(x^0) = \sum_{i \leq k} \lambda(f(x^0) - \tau_i(x^0)) \tag{12}$$

ed è $f(x^0) - \tau_i(x^0) \leq \mu$. Se ora una sola delle differenze $f(x^0) - \tau_i(x^0)$ effettivamente presente [6]), fosse minore di μ, e ciò accadesse, ad es., per $f(x^0) - \tau_1(x^0) = \mu - h$ $(h > 0)$, si avrebbe per la seconda delle (10):

$$\mu = \lambda_1(\mu - h) + \mu \sum_{i\,2}^{k} \lambda_i = -\lambda h + \mu$$

e ciò è assurdo. Poichè un analogo ragionamento può ripetersi per l'insieme $E_f^-(\tau')$, ne viene intanto che:

$$E_f^+(\tau') \subseteq \bigcap_{i \leq k} E_f^+(\tau_i), \qquad E_f^-(\tau') \subseteq \bigcap_{i \leq h} E_f^-(\tau_i). \tag{13}$$

Va anzi osservato che il ragionamento ora fatto dipende solamente dalla seconda delle (10).

Sia ora τ un *qualunque* elemento di minima deviazione da $f(x)$ in $\mathfrak{F}$; poichè $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ sono linearmente indipendenti nel numero massimo k, sarà:

$$\tau = \sum_{i \leq k} \lambda_i \tau_i, \tag{14}$$

---

[5]) Questa affermazione è anzi valida per la metrica definita in $\mathfrak{C}$ da una norma astratta $\| f \|$. Si ha infatti, posto $\mu^* = \| f - \tau_i \|$, che è: $\| f - \tau' \| \leq \Sigma \lambda_i \| f - \tau_i \| = \mu^*$ e d'altro canto $\| f - \tau' \| \geq \mu^*$.

[6]) Cioè col corrispondente $\lambda_i \neq 0$ nella somma $\Sigma \lambda_i (f(x^0) - \tau_i(x^0))$.

essendo i numeri λ_i $(i \leq k)$ dipendenti da τ. Proviamo che se $\underset{x \in E_f^-(\tau')}{\text{Min}} f(x) = 0$ (la qual cosa può sempre supporsi senza ledere le generalità del nostro ragionamento, contenendo $\mathfrak{S}$ le costanti), allora per i λ_i vale la seconda delle (10). Infatti per l'ipotesi ora fatta, esisterà, a norma del teorema A, un punto $x' \in E_f^+(\tau')$, almeno, per il quale è:

$$f(x') \geq 2\mu. \tag{15}$$

Per tale x' si ha dalla (14):

$$f(x') - \tau(x') = f(x') - \sum_{i \leq k} \lambda_i \tau_i(x') = f(x') - f(x') \sum_{i \leq k} \lambda_i +$$
$$+ \sum_{i \leq k} \lambda_i (f(x') - \tau_i(x')).$$

Vale a dire per la (13)

$$f(x') - \tau(x') = f(x')(1 - \sum_{i \leq k} \lambda_i) + \mu \sum_{t \leq k} \lambda_i \tag{16}$$

e poichè, avendo supposto τ elemento di minima deviazione, riesce $f(x') - \tau(x') \leq \mu$, dalla (16) segue:

$$f(x')(1 - \sum_{i \leq k} \lambda_i) - \mu(1 - \sum_{i \leq k} \lambda_i) \leq 0,$$

cioè:

$$(f(x') - \mu)(1 - \sum_{i \leq k} \lambda_i) \leq 0$$

Dalla (15) segue allora:

$$\sum_{i \leq k} \lambda_i \geq 1. \tag{17}$$

D'altro canto esiste in $E_f^-(\tau')$ un punto x'', per quanto ammesso, per cui è:

$$f(x'') = 0. \tag{18}$$

Ragionando nello stesso modo su x'', si ha analogamente alla (16)

$$f(x'') - \tau(x'') = f(x'')(1 - \sum_{i \leq k} \lambda_i) - \mu \sum_{i \leq k} \lambda_i$$

e per la (18)

$$f(x'') - \tau(x') = - \mu \sum_{i \leq k} \lambda_i .$$

Ma è $f(x'') - \tau(x'') \geq - \mu$ e perciò:

$$- \mu \sum_{i \leq k} \lambda_i \geq - \mu$$

vale a dire:

$$\sum_{i \leq k} \lambda_i \leq 1. \tag{19}$$

Dalle (17) e (19) segue per i numeri λ_i, che determinano τ, la seconda delle (10). Conseguentemente, per una osservazione su fatta, segue, più generalmente, che le (13) valgono per ogni τ di minima deviazione, si ha cioè:

$$E_f^+(\tau) \subseteq \bigcap_{i \leq k} E_f^+(\tau_i) \quad , \quad E_f^-(\tau) \subseteq \bigcap_{i \leq k} E_f^-(\tau_i). \tag{13'}$$

A questo punto, in virtù della già conseguita identità (10), è subito visto che se $x^0 \in \bigcap_{i \leq k} F_f^+(\tau_i)$, si ha:

$$f(x^0) - \tau(x^0) = \sum_{i \leq k} \lambda_i (f(x^0) - \tau_i(x^0)) = \mu,$$

cioè la prima delle (13') può invertirsi; analogamente si ragiona per la seconda e il teor. B resta completamente provato [7]).

Dalla dimostrazione del teor. B risulta implicitamente provato che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione τ, ottenuta combinando con coefficienti $\lambda_i \geq 0$ (ma non tutti nulli) le funzioni $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$, sia elemento di minima deviazione da $f(x)$ è che i λ_i soddisfino la seconda delle (10).

3. - Ci si può domandare se la seconda delle condizioni (10) sia, da sola, sufficiente ad assicurare che la funzione definita dalla (14) sia elemento di minima deviazione da

---

[7]) Si osservi che nel caso $k = 1$ il ragionamento fatto, col provare la (10), posta l'unicità per τ_1.

$f(x)$; ma ciò non accade. Suppongasi infatti per semplicità $k=2$. Si ha per la (10)

$$(20)\qquad f(x)-\tau(x)=\lambda_1(f(x)-\tau_1(x))+\lambda_2(f(x)-\tau_2(x))$$

ove λ_1, λ_2 si suppongono, per ora, solo vincolati dalla seconda delle (10). Si ponga:

$$(21)\qquad f(x)-\tau_1(x)=\mu-h_1(x),\qquad f(x)-\tau_2(x)=\mu-h_2(x);$$

sarà $h_1(x)\geq 0$, $h_2(x)\geq 0$, il segno d'eguale valendo per per $x\in\bigcap_{i\leq 2}E_f^+(\tau_i)$. Esisterà un punto $x^0\notin\bigcap_{i\leq 2}E_f^+(\tau_i)$ tale che per esso è $h_1(x^0)\neq h_2(x^0)$ e, per fissare le idee, si supponga $h_1(x^0)>h_2(x^0)$. Si consideri allora $\lambda_2>1$ e tale che:

$$(22)\qquad h_1(x^0)<\lambda_2(h_1(x^0)-h_2(x^0)),$$

indi si ponga $\lambda_1=1-\lambda_2$. Avremo: $\lambda_1+\lambda_2=1$ e dalle (20) e (21):

$$(23)\qquad f(x^0)-\tau(x^0)=\mu-(\lambda_1h_1(x^0)+\lambda_2h_2(x^0))$$

e, per la (22), la (23) dà: $f(x^0)-\tau(x^0)>\mu$, cioè la funzione determinata dai suddetti valori di λ_1, λ_2 non è di minima deviazione da $f(x)$, sebbene la identità (10) sia verificata.

Questa osservazione chiarisce anche un altro punto. Avendo provato, nelle condizioni poste al n. 2, che gli insiemi E_f^-, E_f^- sono invarianti rispetto alla varietà (14) delle funzioni di minima deviazione da $f(x)$, ci possiamo domandare se ogni $p\in\mathfrak{F}$ che abbia da $f(x)$ in E_f^+ e in E_f^- uno scarto eguale μ e $-\mu$, rispettivamente, sia di necessità funzione di minima deviazione da $f(x)$. Per la osservazione su fatta si può rispondere negativamente a questa questione, perchè la funzione $\tau=\lambda_1\tau_1+\lambda_2\tau_2$, ove λ_2 soddisfa la (22) e $\lambda_1=1-\lambda_2$ prende in E_f^+, E_f^- i valori μ e $-\mu$ e non è, come si è visto, elemento di minimo scarto da $f(x)$.